Doing Mathematics

with

Scientific WorkPlace®

and

Scientific Notebook®

Users' Guide to Computing

Version 5

Japanese Edition

Doing Mathematics with Scientific WorkPlace® and Scientific Notebook®

Users' Guide to Computing
Version 5

Darel W. Hardy
Colorado State University

Carol L. Walker
New Mexico State University

Translation
Sunao Takahashi LightStone Corp.

MacKichan SOFTWARE, INC.

本書は, MacKichan Software 社の日本国内での総代理店である (株) ライトストーンが MacKichan Software 社との契約に基づき, 翻訳および印刷を行っております.

Printed in Japan

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

商標について

このマニュアルは *Scientific WorkPlace* と LATEX2ε を使って作成しました.

Authors: *Darel Hardy and Carol Walker*
Manuscript Editors: *Susan Bagby and George Pearson*
Compositor: *MacKichan Software Inc.*
Translator: *Sunao Takahashi (Lightstone Corp.)*

Dedicated

to the memory of our parents

Alice DeVinny Hardy

and

F. Waldo Hardy

目次

第 1 章	**数式処理の基本操作**	1
1.1	文字と数式の入力	1
1.2	数式処理の基本	5
1.3	操作に関する一般的な質問	15
第 2 章	**数値, 関数, 単位を使った計算**	19
2.1	整数と分数	19
2.2	整数論の基本	21
2.3	実数	23
2.4	関数と関係子	30
2.5	複素数	35
2.6	計測単位	39
2.7	練習問題	46
2.8	練習問題の答え	46
第 3 章	**代数**	49
3.1	多項式と有理式	49
3.2	変数と関数を定義する	59
3.3	多項式を解く	63
3.4	置換	69
3.5	指数と対数	70
3.6	練習問題	73
3.7	練習問題の答え	74
第 4 章	**三角法**	79
4.1	三角関数	79
4.2	逆三角関数と三角方程式	85
4.3	ハイパボリック関数	87
4.4	逆ハイパボリック関数	88
4.5	複素数と複素関数	89
4.6	練習問題	93
4.7	練習問題の答え	94

第 5 章　関数の定義 97
5.1 関数名と数式名 97
5.2 変数と関数の定義 100
5.3 定義した関数の管理 107
5.4 変数の仮定 109
5.5 自動計算式 112
5.6 外部関数 114
5.7 コマンド表 117
5.8 引数カッコの不要な関数 129
5.9 練習問題 131
5.10 練習問題の答え 131

第 6 章　曲線と曲面のプロット 135
6.1 プロットの基本 135
6.2 フレーム, ビュー, プロットのプロパティダイアログ 136
6.3 プロットレイアウト 138
6.4 2D プロットのビュー 141
6.5 2D プロットツール 144
6.6 数式情報 147
6.7 軸と軸スケーリング 149
6.8 プロットの注釈 150
6.9 プロットラベル 151
6.10 関数と数式の 2D プロット 152
6.11 2D プロットのアニメーション表示と VCAM ウィンドウ 171
6.12 3D プロットのビュー 176
6.13 3D プロットのツールとダイアログ 176
6.14 関数と数式の 3D プロット 182
6.15 VCAM ウィンドウと 3D プロット 201
6.16 3D プロットのアニメーション表示 202
6.17 スナップショット 207
6.18 プロットのデフォルトオプションを設定する 209
6.19 練習問題 213
6.20 練習問題の答え 214

第 7 章　微積分 221
7.1 微積分の計算 221
7.2 極限 222
7.3 微分 228
7.4 不定積分 245
7.5 積分の手法 247
7.6 定積分 249

7.7 数列と級数 . . . 269
7.8 多変数の微積分 . . . 275
7.9 練習問題 . . . 283
7.10 練習問題の答え . . . 285

第 8 章 行列と代数 291
8.1 はじめに . . . 291
8.2 行列の演算 . . . 301
8.3 行の操作と階段形 . . . 304
8.4 方程式 . . . 307
8.5 行列演算子 . . . 310
8.6 行列と結合した多項式とベクトル . . . 317
8.7 行列と結合したベクトル空間 . . . 320
8.8 行列の標準的な形式 . . . 325
8.9 行列の分解 . . . 331
8.10 練習問題 . . . 334
8.11 練習問題の答え . . . 334

第 9 章 ベクトル解析 337
9.1 ベクトル . . . 337
9.2 勾配, 発散, 回転 . . . 346
9.3 ベクトルフィールドと勾配のプロット . . . 351
9.4 スカラーとベクトルのポテンシャル . . . 359
9.5 行列演算子 . . . 361
9.6 複素関数のプロット . . . 364
9.7 練習問題 . . . 366
9.8 練習問題の答え . . . 367

第 10 章 微分方程式 371
10.1 常微分方程式 . . . 371
10.2 初期値問題と常微分方程式の系 . . . 382
10.3 常微分方程式の数値解 . . . 385
10.4 練習問題 . . . 391
10.5 練習問題の答え . . . 392

第 11 章 統計 395
11.1 統計に関する基本機能 . . . 395
11.2 データの中心に関する分析 . . . 398
11.3 データのバラツキ . . . 402
11.4 分布 と密度 . . . 406
11.5 連続分布関数 . . . 408

11.6 離散分布関数 417
11.7 乱数 420
11.8 カーブフィット 421
11.9 練習問題 427
11.10 練習問題の答え 427

第 12 章 応用現代代数 429
12.1 方程式の解法 429
12.2 整数モジュラ m 431
12.3 その他のモジュラ m 439
12.4 法を多項式とする多項式 442
12.5 線型計画法 447
12.6 練習問題 450
12.7 練習問題の答え 451

索引 455

序文

Scientific WorkPlace と *Scientific Notebook* は文章中で数式演算のできる理工系分野向けのワープロソフトです. 初歩的な方程式の勉強を目的とする大学生から, 高度な数式演算の内容を含む学術論文をタイプセット印刷する専門的研究者まで, 幅広いニーズに答えるだけの機能が用意されています. *Scientific WorkPlace* と *Scientific Notebook* における数式入力はとても簡単です. 特別な記述方法を習得する必要はありません. 計算結果として出力される数式や値も, ごく自然な形で表示されますので, 計算結果を使った二次的な計算, 編集作業なども問題無く行えます.

Scientific WorkPlace は元々, National Science Foundation Small Business Innovation Research(SBIR) の援助を受けて数式処理ソフトのインタフェースソフトとして開発されたソフトウェアです. 数式処理ソフトで計算を行う場合, 一般的に独自の文法にしたがってプログラミング言語のようなコマンドを入力する必要があります. しかし, 本ソフトウェアは次に示す新しい操作環境をユーザに提供することに成功しました.

- 自由に編集作業ができる
- 数式の入力はエンピツでノートに書き込む要領で行う

Scientific WorkPlace と *Scientific Notebook* はこの 2 点を十分に満足する製品です. 文書や数式入力の際, 特定の文法に拘束されることもありませんし, 記述した文字や数式の編集作業も自由に行えます.

Scientific WorkPlace と *Scientific Notebook* での計算には, MuPAD が使われています. すべてのバージョンで Sciface 社が提供している標準ライブラリを使用しています. *Scientific WorkPlace* と *Scientific Notebook* では, 多くのユーザの方が必要としているすべての関数に簡単に直接アクセスできます. MuPAD 本体で定義した関数をソフトウェア中で登録して利用することもできますので, これらの数式処理ソフトを頻繁に利用している上級者の方にも便利にお使いいただけます. *Scientific WorkPlace* と *Scientific Notebook* は, Windows 対応のワープロソフトと同様の使いやすさを持ち, 計算機能も充実しています.

Scientific WorkPlace と *Scientific Notebook* は個人の研究だけでなく数学教育の分野向けにも優れた機能を提供するソフトウェアです. プロジェクタがあれば, 簡単に数学の授業を行う事ができます. 数式を自然な方法で入力し, 色々な演算もその場で行えます. 黒板のような大きなスペースに数式を簡単に表示でき, しかも計算機能を使って様々な試行錯誤の様子を, その場で見せることができます. 黒板のようにスペースが限定されていませんので, 自由に好きなだけ演算を繰り返せるのも, 授業を行う上では大変便利です.

Scientific WorkPlace と *Scientific Notebook* を使って理科の実験室に相当する数学実験室を構築することもできます. 各生徒に異なる内容の練習問題を作成することもできます. また, 生徒用に数式メニューの高度な機能を非表示にしておくこともできます. これには, ツールメニューから計算エンジン設定を選び, 一般タブで簡略化した数式処理メニューの表示を選びます.

このマニュアル, Doing Mathematics with Scientific WorkPlace and Scientific Notebook Version 5, では数式の計算を行う数式処理システムの使用法についての説明があります. 主に, 組込みの数式処理システムである MuPAD の使い方の説明となります. しかし, *Scientific WorkPlace* と *Scientific Notebook* では, 数式処理システムの構文は必要ありませんので, これについては説

明していません.
このマニュアルは読者が大学生以上であることを前提に記述されています. ユーザは数学の学習レベルにとらわれることなく, 目的の項目で自由にプログラムを操作してください. ここでは参考までに本書の構成を紹介します. 前半の 4 章はシステムの利用方法から始まって, 主に初等的な数学の学習コースとなっています. それ以降の章では幾何学, 微積分, 線型代数, ベクトル解析, 微分方程式, 統計, 応用数学などの, やや高度な計算の解説となっています. 練習問題を用意しましたので, 操作方法をここで確認したり, 数学的な内容の試行錯誤を行ってみるのも良いでしょう.
最初の 5 章—**数式処理の基本操作**, **数値計算と関数**, **代数**, **三角関数**, **関数の定義**—の各章では例題を利用して学習することにより, 数式処理のための操作方法を十分に理解できます. 第 6 章**曲線と曲面のプロット**には数式のグラフ化について解説されていますし, それ以降にも, 有用な機能についての解説が用意されています. それらの章については, 目的にあった章だけをお読みいただければ十分です.
MuPAD を利用しているユーザのために, **関数の定義**の章でプログラムから MuPAD の関数にアクセスしたり, MuPAD 用ユーザ定義関数を作成するための解説を用意しました. MuPAD の関数名と *Scientific WorkPlace* と *Scientific Notebook* で利用している内部定数名, 関数名, 演算子名の対照表を用意しました.

■**オンラインヘルプ**　**ヘルプ**メニューの最初の 3 つの項目—**目次**, **検索**, **索引**—は, 操作方法や詳しい説明を得るためのメニューです.

■**目次**　目次のページには, F1 キーまたは**ヘルプ**メニューの**目次**を選んで開きます. Compute in SWP & SNB という項目をクリックして, Computing Techniques というページを開きます. ここにある項目は基本的にこのマニュアルの内容と一致しております. ヘルプドキュメント内では, 数式処理に関するヘルプ文書を順番にすべて表示できるように次の文書へのリンクがあります. リンクツールバーの右向き矢印をクリックするか, 移動 + リンク + 次の文書を選びます. このコマンドにより, すべての文書を順番に表示します.

■**検索**　あるトピックに関する説明は, **ヘルプ** + **検索**を選び, キーワードを入力します. 数式処理に関する情報だけでなく一般的な情報やリファレンスライブラリも検索します.

■**索引**　数式処理に関する説明は, **ヘルプ** + **索引** + **数式処理のテクニック**を選びます. 索引を開き, ナビツールバーのドロップダウンリストやマーカへ進むボタン  を使ったり, 履歴ツールバーを使ったり, 移動 + マーカーへメニューを選び, ドロップダウンリストから項目を選びます.
Scientific WorkPlace や *Scientific Notebook* で, テキスト編集や数式処理をすぐに行いたい場合, F1 キーを押すか, ヘルプメニューの目次を選び, Take a Tour と Learn the Basics をご覧下さい. **操作の習得に役立つ解説が用意されています**. サブフォルダ play には数式処理の特徴的な機能を体験できるサンプルファイルが入っていますので, これを一通り試すのも製品機能の理解に役立ちます. *Scientific WorkPlace* や *Scientific Notebook* でヘルプ文書のコピーを保存すれば, その中にある数式を操作して, サンプルを使って学習することができます.
文書の編集機能に関しては, オンラインヘルプに, LaTeX の記法を表示しなくても, LaTeX 文書を記述する方法, LaTeX および pdfLaTeX を使ってタイプセットする方法, HTML や RTF 形式での出力方法などが書かれています. これを見るには, 目次または索引にある一般的な情報 (General

Information) または検索を使います．これらの文書編集機能は, マニュアル, Creating Documents with Scientific Word and Scientific WorkPlace Version 5, にも書かれています.
表記
文書内で使用している表記を理解すると, このマニュアルでの手順や説明を理解しやすくなります．Windows の基本的な操作方法が前提の知識となっています. このマニュアルでは, 以下のような表記を使っています.

一般的な表記

- テキスト (Text) のように書かれている場合には, そのまま入力することを示しています.
- **テキスト (Text)** のように書かれている場合には, メニュー, コマンドを示しています.
- テキスト (TEXT) のように書かれている場合には, キーボードのキーを示しています.
- テキスト (Text) のように書かれている場合には, ファイル名またはフォルダ名を表します.
- テキスト (Text) のように書かれている場合には, プログラムの内容に特別の意味がある言葉を表します.
- テキスト ($Text$) のように書かれている場合には, 数式モードで入力された数式を示しています.
- 数式処理メニューが指定されているときには, 数式処理内のメニューを表します．例えば, 計算メニューと書かれていれば, それは数式処理メニュー ＋ 計算メニューのことです.

キーボードに関する表記

キーボードの操作では標準的な Windows の表記を使っています.

- キーの名前は, ほとんどのキーボードが採用しているキーの名前に合わせています．例えば, ENTER, F4, SHIFT のようにしています.
- プラス記号 (+) を使って, 2 つのキーを記述している場合, 最初のキーを押したまま, 2 番目のキーを押します．例えば, CTRL ＋ G は, CTRL キーを押したまま, G を押し, 両方同時に離すということです.
- CTRL ＋ 文字列という表記は, CTRL キーを押したまま, ＋ 記号の後ろの文字列を入力し, CTRL キーを離すということです.

テクニカルサポートについて

ヘルプやマニュアルを見ても, 操作方法が分からない場合には, まずホームページをご覧下さい.

開発元のホームページ: **http://www.mackichan.com/techtalk/knowledgebase.html**
(株) ライトストーンのホームページ: **http://www.lightstone.co.jp/SWP**

ホームページでも情報が見つからない場合, E-Mail, 電話, FAX で専任スタッフに問い合わせをすることもできます. 問題の内容によっては, 作成中の文書ファイルをお送り頂いた方が, 問題解決までの時間が短縮されます。そのような場合には, E-Mail でのお問い合わせをお願いします.
ファイルをお送り頂く際には, 問題発生までの操作方法をお知らせ頂きますようお願いします. 電話でのお問い合わせの場合には, コンピュータで実際に操作していただくこともありますので, コンピュータの近くからお問い合わせ頂きますようお願いします. テクニカルサポートにお問い合わせの際には, 以下の情報をお知らせ下さい.

- お使いの製品名
- バージョン番号およびビルド番号 (ヘルプメニューのバージョン番号をご覧下さい.)
- シリアル番号 (ヘルプメニューの機能の確認をご覧下さい.)
- お使いの Windows のバージョン
- お使いのコンピュータのタイプ
- 現象および操作方法
- 画面上に表示されたメッセージ

▶ テクニカルサポートの問い合わせ先

- 日本国内では, Mackichan Software 社の総代理店である (株) ライトストーンでサポートを受けることができます. サポート時間は, 月曜日から金曜日までの午前 10:00 から午後 5:00(12:00 から 1:00 を除く) までとなっております.

E-Mail: tech@lightstone.co.jp
電話: 03-5670-0302
Fax: 03-5670-0311

MacKichan のホームページには, *Scientific WorkPlace* と *Scientific Notebook* についての詳しい情報があります. ホームページの情報は定期的に更新され, プログラムに関する最新の技術情報が公開されています. また, ホームページには, 他の TEX および LATEX に関するホームページにリンクがあります. また, フォーラムやメーリングリストを使って, 情報を共有したり, 共通の問題を話し合ったり, 技術的なヒントを得ることができます. ホームページをお持ちであれば, **http://www.mackichan.com** や **http://www.lightstone.co.jp** などにリンクしてご利用ください.

Darel W. Hardy
Carol L. Walker
Hiroshi Nojo (Lightstone)

第 1 章

数式処理の基本操作

この章では *Scientific WorkPlace* と *Scientific Notebook* の数式処理機能について解説します. 簡潔な機能説明と例題を中心に解説を進めますので, 新規作成画面を開いて実際にご自分の PC で操作することをお勧めします.
ファイルを開くだけで, すぐに計算することができます.

▶ **数式の入力と計算**

1. **挿入**メニューから**数式**を選択します. (数式というメニューが無い場合は, すでに数式モードになっていますので, ステップ 2 に進んでください.)
2. 例えば, $2 + 2$ のような簡単な足し算の式を入力します (数式は赤色で表示されます.).
3. カーソルが式中または式の右隣にある状態で**数式処理**メニューから**計算**を選択します.

式 $2 + 2$ の計算結果が次のように表示されます. $2 + 2 = 4$
数式モードで入力した数式は, 文字モードで入力した数式と文字の間隔が異なります. 例えば, 数式モードでは“$2 + 2$” となり, 文字モードでは, “2+2”となります. そのため, 調整する必要はありません.

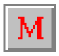
1.1 文字と数式の入力

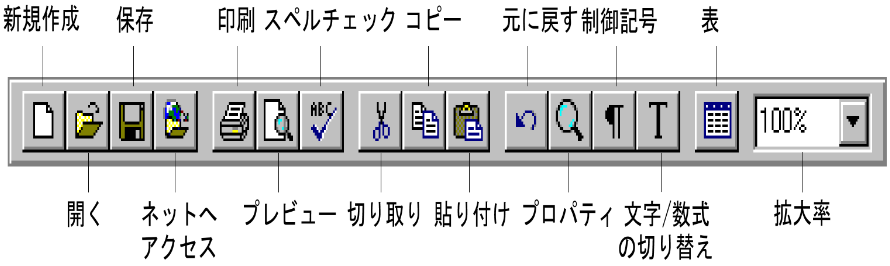
画面上で点滅している箇所を入力ポイントと呼びます. 入力ポイントを示すアイコンは一般的にカーソルと呼ばれます. 文字や数式の入力はこの入力ポイントから始めます. 既に文字や数式が入力されている範囲では, マウスをクリックすることによって入力ポイントを自由に選択できます. マウスの位置は縦棒 (|) で表示され, このオブジェクトはマウスポインタと呼ばれます.

1.1.1 覚えておきたい基本的なこと

一つの文章中に文字と数式を自由に入力できます. 数式モードで入力した情報はすべて数式演算に利用でき, 文字モードの情報は数式演算においては無視されます. したがって, 数式と文字が混在しても文書作成と計算にはまったく支障はありません.

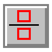
- 標準ツールバーの数式/文字の切替ボタンが  になっている状態で文字を入力します.

- 数式は同じく標準ツールバーの数式/文字切替えボタンが,  になっている時に入力します.



数式は赤色, 文字は黒色で画面表示されます. モードの切り替えに関する詳細は, **ヘルプ**+ **検索** + **Screen Defaults** をご覧下さい.
ツールバーのボタンを使って入力モードの切替えを行うことは説明しましたが, これをキーボードショートカットで行う場合は CTRL+M　または CTRL+T とします. しかし, ツールバーの数式記号をクリックすると自動的に数式モードに切り替わった上で, 目的の記号が入力されます. したがって操作が煩雑になることはありません. 1 度数式モードに切り替えたら, そのまま自動的に数式モードが維持されます. 文字モードに戻る場合は左右の矢印キーで文字入力されている文章に移動するか, 切替ボタンをクリック, または ENTER キーを押して改行します. 入力モードの切替方法は**ツール**メニューの**ユーザ設定**にある数式タブで, スペースバーや INSERT キーを利用する方法に変更することもできます. 詳細は**ヘルプ**+ **検索**+**User Preferences** を参照してください.
数式テンプレートツールバー (または利用したい他のツールバー) は, 自動的に画面に表示されない場合, **ヘルプ**+ **検索** + **toolbars** + **Customizing the toolbars** を選択してツールバーの表示方法を調べてください.

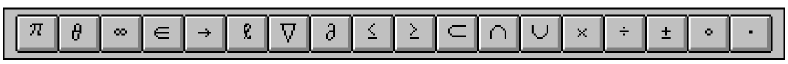
▶ 分数, ルート, 指数, 下付き文字を入力する

1. 数式テンプレートツールバーにある , , ,  をクリックします.
   または
   挿入メニューから**分数**, **ルート**, **上付き文字**, **下付き文字**などを選択します.
   または
   CTRL+F, CTRL+R , CTRL+H (または CTRL + 上矢印), CTRL + L (または CTRL + 下矢印) を押します.
2. 入力ボックスに値を入力します.

スペースバーや矢印キーを使って数式中でカーソルを移動することもできます. タブキーを使えば入力ボックスを移動できます.

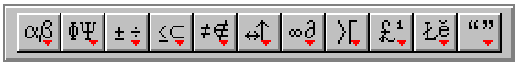
▶ 乗算と除算などの記号を入力する

- 記号キャッシュツールバーから目的の記号を選択します.

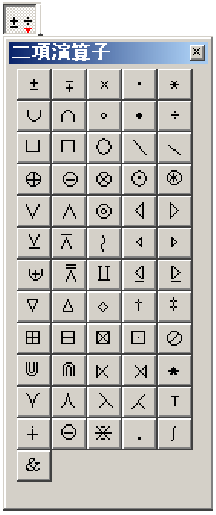


または

- 記号パネルツールバーの二項演算子のボタン  をクリックします.



そして次のドロップダウンリストから目的の記号を選択します.



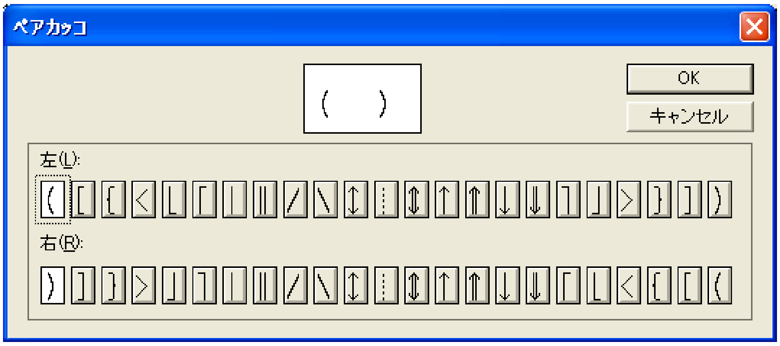
または

- *や/をキーボートから入力します.
  数式モードで入力した数式や文字をマウスの左ボタンを使って選択します. 同じ操作は, SHIFT キーと矢印キーを使って行うこともできます. 選択した数式範囲は画面上で反転表示されます. この操作は, 画面上で文字などを選択する際の一般的な方法です. また, 数式を選択する 1 つの方法となっています. 数式の自動またはユーザ選択については, 9 ページをご覧下さい.

また, 前書き (xiii ページ) には, このマニュアルで使用しているキーボードの表記について説明があります.
数式入力のための様々なカッコが用意されています. ボタンやダイアログ, または CTRL キーを押しながらキーボードから入力したカッコはペアカッコ (フェンスと呼ばれることもあります) になり, 左右両側が入力されます. ペアカッコは内容に応じて, 高さと幅が変化します. ペアカッコは, 非常に長い数式を含む場合でも, 行末で分割されることはありません. キーボードから (CTRL キーを押さずに) 入力した左右のカッコはそれぞれ独立したものになります. それらの高さは固定されます.

► **数式にカッコを入力する**

- 数式テンプレートツールバーの または をクリックします.
  または
- 挿入メニューからペアカッコを選択するか数式オブジェクトツールバーから をクリックし, 左右のカッコをペアカッコダイアログから選択します.



  または
- CTRL ＋ 9 または CTRL＋ [または CTRL ＋ SHIFT ＋ [を押します.
  または
- 数式内に適切な記号を入力します.

Tip　数式と文字の切替ボタン — または — は入力ポイントにおける入力モードを示しています.

1.1.2　数式をディスプレイ環境に入力する

数式を単独で別の行に, 中央揃えで記述する場合はディスプレイ環境を利用します.

$$y = ax + b$$

▶ ディスプレイ環境を作成する

1. アイコン をクリック, または**挿入**メニューから**ディスプレイ**を選択, または CTRL ＋ D を押します.
2. ディスプレイ環境を示すボックスの中に数式を入力します. または既に記述した数式をディスプレイ環境のボックスにドラックします.

▶ ディスプレイ環境に数式を入力する

1. 数式をクリックしてドラッグ, または, SHIFT＋ 右矢印キーで選択します.
2. 数式オブジェクトツールバーのディスプレイボタンをクリックします. または, **挿入**メニューから**ディスプレイ**を選択します.

ディスプレイ環境ではデフォルトで数式モードに切り替わります. もちろん, ディスプレイ環境で

文字モードに切り替えても問題はありませんし, 両者が混在してもかまいません (参照 2 ページ).

Note　ディスプレイ環境の直前で ENTER キーを押すと縦方向のスペースが若干広がります. 一度挿入したこの余分な幅を削除する場合は, ディスプレイ環境の直前にカーソルを移動し, BACKSPACE キーを押します (新しい節を作成する制御記号を削除したことになります).
ディスプレイ環境の後で ENTER キーを押すと, 逆に新しい節の制御記号が入力されますので, 通常の行間より若干広の幅いスペースが挿入されます. この新規パラグラフに伴う余分な行間幅やインデントを削除する場合は, 新規の行頭で BACKSPACE キーを押します.

既存の数式をディスプレイ環境で表示する場合は次のようにします.

1.1.3　プロット, 画像, 文節の中央揃え

別の行に記述した文節を中央揃えにする場合は中央揃えのタグを利用します. このタグは画面下中央のセクション/ボディタグにあります.
プロットや画像を別の行の中央に表示する場合はレイアウトダイアログでディスプレイを選択します. その詳細は第 6 章, 曲線と曲面のプロットを参照してください. 複数のプロットや画像を同じ行で中央揃えで配置する場合はレイアウトダイアログの設定をインラインにし, 中央揃えのタグを使います. ディスプレイ環境の中にプロットや画像を配置すると簡単に中央揃えできますが, プロットや画像が数式オブジェクトとして認識され, コンパイルの時にトラブルの原因となることがあります.

1.2　数式処理の基本

文中で "カーソルを数式に配置して" という場合, カーソルを数式の中の任意の場所か, または数式の右端に配置することを指します. 数式の左端にカーソルを配置すると計算を行えません. カーソル位置の入力モードは文字/数式の切替ボタンの表示で確認します.

1.2.1　数式の計算

数式の入力は改行した新しい行, もしくは文のすぐ右隣や, スペースを挟んだ位置から開始します. ある数式の隣に, 別の数式を記述すると思わぬ計算結果が表示されてしまうことがあります. ですから, 数式は横に連続して入力するのではなく, ENTER で改行して新しい行に書くようにしましょう.

1. アイコン 

をクリック (または CTRL+M) し, 数式モードに入ります. ボタンの表示は 

に変わります.
2. $3+8$ と入力します.
3. 式 $3+8$ にカーソルを置き, 次のように操作します.
    - 数式処理ツールバーの  をクリックする

      または

- **数式処理**メニューから**計算**を選択する

  または

- CTRL+E とする

この操作により $3+8$ の右隣りに $=11$ が表示され $3+8=11$ となります. 同じ操作方法で次に示す演習を行ってください.

Note　例題にある通り数式の左辺を入力し, 計算を実行すると計算結果が例題のように右辺に表示されます. このマニュアルでは, 基本的にこの方法で例題とその答えを記述しています. 数式をプロットする例題の場合は, 数式のすぐ下に実際のプロットが表示されます.

加算

▶ **計算コマンド**

$235+813=1048$　　$49.3+2.87=52.17$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{7}=\frac{17}{21}$　　$(x+3)+(x-y)= 2x-y+3$

減算

▶ **計算コマンド**

$96-27= 69$　　$\left(2x^2-5\right)-(3x+4)=2x^2-3x-9$

$49.3-2.87=46.43$　　$\frac{2}{3}-\frac{8}{7}= -\frac{10}{21}$

乗算

▶ **計算コマンド**

$82\times 37= 3034$　　$(936)\,(-14)= -13104$

$14.2*83.5= 1185.7$　　$\frac{2}{3}\,\frac{8}{7}= \frac{16}{21}$

除算

▶ **計算コマンド**

$82\div 37=\frac{82}{37}$　　$36/14=\frac{18}{7}$

$\frac{14.2}{83.5}= 0.170\,06$　　$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{8}{7}}= -\frac{7}{12}$

Important　*Scientific WorkPlace* と *Scientific Notebook* で数学的な矛盾が生じなければ, 数式の記述スタイルにとくに制限はありません.

例えば, 次の数式をご覧下さい.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{7}}\qquad \frac{2}{3}\div\frac{8}{7}\qquad \frac{2}{3}/\frac{8}{7}\qquad (2/3)\,/\,(8/7)$$

これらの表記はどれも同じ意味を持つ式として認識されます．また,

$$(936)\,(14) \qquad 936\cdot 14 \qquad 936\times 14 \qquad 936 * 14$$

のような積も, それぞれ同じ値を持つものとして理解されます．ただし, 次に示すような縦書きの記述には問題がありますので, 注意してください.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{+15} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 235 \\ \underline{-47} \end{array} \qquad 2\overline{)364}$$

これらの記述は数式処理機能で計算することはできません．総和, 除算, 積, 分数などは次に示す形式で記述してくだい $24+15$, $235-47$, 36×14 , $364/2$, $\frac{364}{2}$, $364\div 2$
π, i, e など常識的な定数は数式モードでそのまま, 記号として利用できます．これらの定数を使ったまま計算を行っても問題はありません.

Note　計算結果の有効桁数はツールメニューの数式処理設定ダイアログの一般タブで設定します．詳細は 28 ページを参照してください．したがって, マニュアルの中で表記されている演算結果の有効桁数がユーザの画面表示と異なる場合があります.

1.2.2　**数式の書き換え**

あいまいな数式表現をそのまま入力してもエラーが発生することはありません．しかし, なるべく, あいまいな表現は避けてください．あいまいな数式表現を自動的に書き換える機能がありますので, これを利用してカッコを付けた明確な表現に変換します.

▶　**あいまいな数式表現を書き換える**

1. 数式にカーソルを配置します.
2. CTRL キー押した状態で ? を押します.
   または
   数式処理メニューから**標準的な表記**を選択します.

▶　CTRL + ?

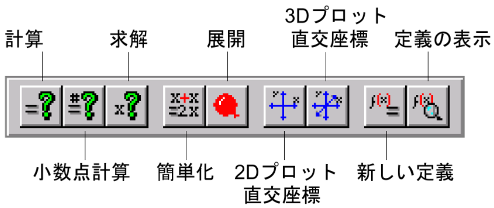
$1/3x+4=\frac{1}{3}x+4 \qquad 1/\left(3x+4\right)=\frac{1}{(3x+4)}$

$1/\left(3x\right)+4=\frac{1}{3x}+4 \qquad 1/3\left(x+4\right)=\frac{1}{3}\left(x+4\right)$

Tip　数式の中で色々なカッコを利用することが可能ですが, できれば $(3+\pi)$ のように標準的なカッコを使うように心掛けましょう．標準的なカッコ以外のものを最初に利用すると, ごくまれに, カッコが本来の意図とは異なって解釈される場合があります．また, カッコを使う場合は**挿入**メニューから**ペアカッコ**を選択するか, キーボードショートカットコマンドを使って入力します．こうすれば, 閉じカッコを忘れてしまうミスを防ぐことができます.

1.2.3　数式処理メニューとツールバー

数式処理メニューをクリックすると**計算**, **数値計算**, **簡単化**, **結合**, **因数分解**, **展開**などの項目がメニューとして表示されます.
次に示す数式処理ツールバーには, **数式処理**メニューにある利用頻度の高いコマンドが用意されています.



▶ **数式処理の実行**

1. 目的の数式にカーソルを移動します.
2. ツールバーのボタンをクリックするか, またはメニューからコマンドを選択します.

数式処理メニューのコマンドを次の手順でキーボードから実行できます.

Important　**数式処理**メニューのコマンドを示す場合, 数式処理という言葉を省略します. 例えば, **計算**とある場合は数式処理 + 計算の意味です.

▶ **キーボードから数式処理メニューのコマンドを実行する**

- ALT キーを押しながら, 次のキーを押します.
  - 'C' キーを押すとメニューが表示されます. 続けてコマンドの右側にあるカッコ内の文字を押します.
  - コマンドの右側に矢印が付いている場合は, サブメニューがありますので, 続けてサブメニュー内の文字を押します.

いくつかのコマンドにはキーボードショートカットがあります. CTRL + KEY という表記は, “CTRL キーを押しながら, KEY を押す” という意味です.)

ショートカット	コマンド
CTRL + E	数式処理 + 計算
CTRL + SHIFT + E	数式処理 + 計算 (インプレイス)
CTRL + =	数式処理 + 関数定義 + 新しい定義

多くのコマンドにはキーボードショートが用意されています. キーボードショートカットに関する詳細は, ヘルプ + 検索を選び, keyboard shortcuts 内の Keyboard shortcuts を選びます.

1.2.4　数式の選択

数式における挿入ポイントの位置や利用するコマンドによって, 数式処理の対象となる数式の範囲は異なります. そこで, プログラムが自動的に数式処理の対象を決定する場合を**自動選択**と呼ぶことにします. 一方, ユーザが数式中のある一部だけを計算するために, 選択する方法を**ユーザ選択**と呼びます.

自動選択機能について

カーソルを数式中に配置して, **数式処理**メニューから目的のコマンドを選択します. 自動選択機能はカーソルのある数式に対して自動的に実行されます. この機能は数式がインライン, 行列, ディスプレイ環境のどこにあるかで動作が異なる場合があります. インラインに数式が入力されている場合, 次の 2 通りのパターンでプログラムは数式を自動選択します.

- 数式中の挿入ポイントの存在する箇所で, 例えば, 文字と二項関係 $=$, $<$, $\leq$ などの記号で挟まれる部分を自動選択します.(二項関係で利用できる記号は  をクリックすると一覧表示されます.)
- 方程式や不等式など, 数式全体をひとつの数式オブジェクトとして選択します.

次の 2 つのセクションでは, 上記で説明した 2 つの選択法の例を示しています.

■数式の自動選択　文字と数式で挟まれる数式部分が自動選択される例を示します. 式 $2x + 3x = 1 + 4$ の左辺の任意の位置にカーソルをおきます. ただし, 2 の左側は例外とします. そして**計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

$2x + 3x = 5x = 1 + 4$

コマンドが実行すると数式 $2x + 3x$ のすぐ後ろに $= 5x$ と表示されます. つまり, 自動選択機能によって左辺が選択され, 計算されました. 計算結果は元の式と完全に同じ値を持ちますから, 等号記号で各式が結ばれた形になっています. カーソルは計算結果の右端に配置されますので, この計算結果に対して, すぐに他の演算を実行することができます.
数値計算, **簡単化**, **結合**, **因数分解**, **展開**などのコマンドも, 上記の式と同じような式で利用すると, これと同じような形で自動選択を行います.

■方程式や不等式の自動選択　式 $2x + 3x = 1$ の適当な所にカーソルを置き, **求解**サブメニューから**解**を選択するか, または  **をクリックします**.

▶ **求解 + 解**

$2x + 3x = 1$, 解: $\frac{1}{5}$

$3x + 5 \leq 5x - 3$, 解: $[4, \infty)$

この場合は, 数式オブジェクト全体—方程式や不等式—が選択されます. **求解**サブメニューの他のコマンドおよび**相等チェック**を選択すると, コマンドは全体をひとつの数式オブジェクトとして認

識します.

選択したコマンドが数式に適したものでなければ, 何の計算も行なわれません. ですから, 式 $x = y = z$ に対して**相等チェック**, または**求解**コマンドを実行すると, 等号を 2 つも利用している方程式ということで文法エラーが発生します. エラーの表示方法は数式エンジンの設定にあるエラー表示の設定内容によって異なります. この設定を変更する場合は**ツール**メニューの**計算エンジン設定**コマンドを利用します. 詳細は 13 ページを参照してください.

ディスプレイ環境と行列における選択パターン

ディスプレイ環境と行列に入力した数式では, その式に対して実行したコマンドによって, それぞれ計算パターンが異なる場合があります. カーソルをディスプレイや行列に置いた状態でコマンドを実行すると, コマンドによっては, 行列全体が自動選択される場合があります. 行列全体を対象とする場合, 行列のある要素だけ, もしくは, ディスプレイの中身を対象とする場合など, コマンドによって異なる計算が実行される訳です. その結果, コマンドと自動選択箇所に不整合が発生した場合は, 文法エラーのメッセージが表示されます.

ディスプレイ環境では, 自動選択は全ての数式になされます. そして結果は通常, ディスプレイ環境の外側に返されます. ディスプレイ環境内で数式を選択するには, 挿入箇所にカーソルを配置した状態で, 数式を処理するためのコマンドを選択します.

次の式の左端にカーソルを配置した状態で  をクリックするか, または**計算**コマンドを選択すると

$$2x + 3x = 3 + 5$$

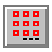
$5x = 8$ という結果がディスプレイ環境の外側にインライン形式で出力されます. 上式をインラインに入力し, カーソルを左辺に配置して計算を実行すると $2x + 3x = 5x = 3 + 5$ という計算結果になります. ディスプレイ環境や行列などの中に記述した数式に対しては, 式全体が自動選択され, 計算結果は常にディスプレイ環境の外に表示されます.

行列式に対して  をクリック, または**計算**コマンドを実行すると, 行列要素を含む式全体に対して計算が実行されます. **数値計算**, **簡単化**, **因数分解**, **結合**サブメニューの各コマンドも, 同じ自動選択パターンで計算を実行します.

▶ **求解 + 解**

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 3 \\ 6x - y &= 5 \end{aligned}$$

, 解: $\left[x = \frac{13}{17}, y = -\frac{7}{17}\right]$

矩形配列に数式を配置するのに行列を利用することができます. 行列を作成するには, **挿入**メニューから行列を選択するか  をクリックします. 行数と列数を設定し, OK ボタンをクリックします. 画面に何も表示されない場合, **表示**メニューを選択し, **ヘルパーライン**または**入力ボックス**をオンにします. 行列の入力ボックスに数字または数式を入力します.

行列の数式に対して  または**計算**を実行すると, 式全体が対して計算が実行され, 結果が行列で返されます. **数値計算**, **簡単化**, **因数分解**および**結合**の各サブメニューを選択しても同様に動作します.

► **計算, または簡単化**

$$\begin{pmatrix} x+x & 5+3 \\ 5/2 & 6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 8 \\ \frac{5}{2} & 36 \end{pmatrix}$$

► **数値計算**

$$\begin{pmatrix} x+x & 5+3 \\ 5/2 & 6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0x & 8.0 \\ 2.5 & 36.0 \end{pmatrix}$$

► **因数分解**

$$\begin{pmatrix} x+x & 5+3 \\ 5/2 & 6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2^3 \\ \frac{5}{2} & 2^2 3^2 \end{pmatrix}$$

表の内部を選択する

表内で数式を記述している場合, 数式にマウスカーソルを置くと自動的にセル内の数式が選択されます. 例えば, **計算**コマンドを実行すると, 表全体ではなく, セル内の式を計算します. 結果はセル内に表示されます. 表自体は, 数学的なオブジェクトではなく, 数学オブジェクトである行列内の数式とは動作が異なります.

選択した範囲だけを計算する

マウスを使って選択した特定の範囲だけを, 数式処理の計算範囲として部分的に計算することができます. マウスの左ボタンを使って目的の部分を選択します. 選択された箇所は反転表示されます. 目的の範囲を部分的に計算するには 2 つの方法があります. つまり, 計算結果を式の右側に表示する方法と, 元の部分を計算結果で置換する方法です. 次にサンプルの式を使ってその利用方法を紹介します.

► **選択範囲を部分的に計算する**

1. マウスを使うか, SHIFT+ 矢印キーを使って, 数式を選択します.
2. 数式にコマンドを適用します.

Example 1 式 $2+3-x$ に対してマウス, または, SHIFT キーと矢印キーを使って $2+3$ だけを選択します. そして**数式処理**メニューから**計算**コマンドを選択します. 計算結果は式の右側にコロン (:) を挟んで表示されます.

$$2+3-x:5$$

式 $(x+y)^3(7x-13y)^3+\sin^2 x$ でマウス, または, SHIFT キーと矢印キーを使って $(x+y)^3$ を選択します. **数式処理**メニューから**展開**を選択します. 計算結果は式の右側にコロン (:) を挟んで表

示されます.

$$(x+y)^3(7x-13y)^3+\sin^2 x : x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

したがって, 範囲選択した計算結果は, 普通, 式全体の計算結果とは異なります. 両者の違いをハッキリさせるため, コロンなどを使って右端に結果を表示するようにしました. コピーと貼り付けコマンドを使えば, 部分計算した結果を自由に, 好きな場所に貼り付けることができます.

▶ **選択範囲を計算結果で置き換える**

1. マウスを使うか, SHIFT+ 矢印キーを使って, 数式を選択します.
2. CTRL キーを押しながら, 数式にコマンドを適用します.
   または
   計算コマンドを実行するために, CTRL ＋ SHIFT ＋ E を押します.

選択した数式が出力結果で置き換わります. これは次のセクションで述べるようにインプレースの計算となります.

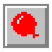
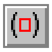
1.2.5　部分計算

CTRL キーを使うことで, 選択した範囲の数式をその箇所で計算し, 元の式と置き換えることができます. この機能のことを“部分計算”と呼びます. 式の表示スタイルを色々と変更することができるので, 式を書き換える手間を省くことができます.
目的の式をマウスで選択します. そして CTRL キーを押しながら, 目的のコマンドを選択します. 元の式は選択した計算を実行した答えに置換されます. 置換された式は選択された状態になっていますから, 式にカッコを付ける場合は, 計算終了後, 目的のカッコボタンをクリックします.

▶ **式を選択し,** CTRL ＋ **計算または** CTRL ＋ SHIFT ＋ E
$2/3$ は $\frac{2}{3}$ に置換されます　　　$146+529-19+6$ は, 662 に置換されます.

▶ **式を選択し,** CTRL ＋ **展開**
$2345/567$ は $4\frac{11}{81}$ に置換されます　　$(a+b)^3$ は, $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ に置換されます.

この機能はコピーと貼り付けコマンドを応用したものです. 数式処理の過程を詳細に記述する際に利用すると便利です.

Example 2 式 $(x-2y)^2(7x-13y)\left(x^2+1\right)$ における $(x-2y)^2$ だけを展開する場合は, $(x-2y)^2$ を選択します. そして CTRL キーを押した状態で  をクリック, または**展開**を選択します. この操作により選択した $(x-2y)^2$ は展開式で置換されます. ただし, 展開式はカッコで囲まれませんので,  をクリックして適当なカッコを付けます.

$$(x-2y)^2(7x-13y)\left(x^2+1\right)$$

は, 次式に置換されます

$$(x^2-4xy+4y^2)(7x-13y)(x^2+1)$$

これを元に戻す場合は展開式 $\left(x^2 - 4xy + 4y^2\right)$ を選択し, CTRL キー押しながら**因数分解**を選択します.

1.2.6　計算を停止する

数式処理の実行に要する時間は目的の式によって異なりますが, これを途中で停止する時は次のようにします.

▶ **数式処理の停止**

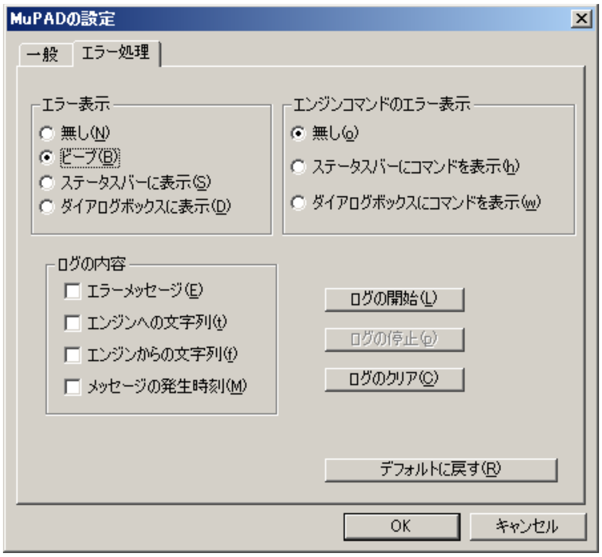
- 停止ツールバーの停止ボタン  をクリックする.
  または
- CTRL ＋ BREAK を押します.

1.2.7　計算エンジン

Scientific WorkPlace および *Scientific Notebook Version 5.5* に組み込まれている計算エンジンは, MuPAD 3.1 です．この計算エンジンがアクティブになっているかどうかを確認するには, **ツール**+ **数式処理設定** + **計算エンジンの選択**を選びます.
メニューコマンド, 利用可能な関数や定数, MuPAD の元々のコマンドや関数の説明などは, 117 ページを参照するか, **ヘルプ**+ **検索** + **function** を選び, “A brief description of commands and functions”を選びます.

1.2.8　エラー処理

ツールメニューから**計算エンジン設定**を選択し, エラー処理のタブを表示します. ここで, **エラー表示**, 数式処理コマンドのエラー, ログの内容に付いてのデフォルト設定を変更できます.
エラー表示の項目には, 無し, ビープ音, ステータスバーに表示, ダイアログボックスに表示の選択肢があります．これらは, 計算エンジンに送られる数学的な構文エラーに対するエラー表示となります.
エンジンコマンドのエラー表示の項目では, 無し, ステータスバーにコマンドを表示, ダイアログボックスにコマンドを表示の選択肢があります．ステータスバーやダイアログボックスへの表示を選択すると, エラーメッセージがそれぞれの場所に表示されます.



選択肢のデフォルト設定は次の通りです．

- エラーの表示: ビープ音
- エンジンコマンドのエラー: 無し
- ログの内容: チェック項目無し

デフォルト設定に戻すボタンをクリックすれば，エラー処理に関するデフォルトの状態に戻ります．
ログの内容項目では希望する情報をテキストファイルに記録することができます．この項目のデフォルト設定は，何も記録しないように設定されています．ログを取る場合はソフトウェアを起動後，毎回次のように操作します．

▶ ログの開始

1. **ツール**メニューから**計算エンジン設定**を選択し，エラー処理のタブを表示します．
2. ログの開始ボタンをクリックします．
3. ログの内容項目にあるエラーメッセージ，エンジンへの文字列，エンジンからの文字列など必要なものをチェックします．
4. ログの発生時刻を記録する場合はメッセージの発生時刻という項目をチェックします．
5. ログの開始を選択し，OK をクリックします．

ログの開始ボタンをクリックすると *Scientific Notebook* と *Scientific WorkPlace* のルートディレクトリに **engine.log** というログファイルが生成されます．そしてログの停止ボタンがクリックされるまでの間に発生したエラーをこのファイルに記録します．ログファイルの内容をクリアする場合はログのクリアボタンをクリックします．ログファイル **engine.log** は，テキストファイルですから，メモ帳などで開くことができます．

1.3　操作に関する一般的な質問

ここではソフトウェアの操作中に生じるいくつかの疑問について Q&A 形式で解説します.

Q. 画面上の文字がズレたり, 重なったりしています. どうすれば正常に表示できますか?

A. ESC を押すか, または, **表示**+ **再描画**とします.

Q. 本来数式モードで入力すべき文字を文字モードで入力してしまいました. 再入力しなければなりませんか?

A. 目的の文字をマウスまたはキーボードを使って選択します. キーボードで選択する場合は文字列の左端にカーソルをおいて SHIFT ＋ 右矢印として選択します. 次に入力モードの切替ボタン  をクリックして  にします.

Q. 画面上に作成中の文書を全体表示したときは, どうしたら良いでしょうか?

A. 数式の一部が画面の横幅に入りきらず, はみ出してしまう場合は操作画面下の左右スクロールバーを操作します. 数式の途中で改行してもかまわない場合は, **挿入**+ **スペース**+ **ブレーク**として改行を設定します.
画面の表示範囲を増やす場合, スクリーンフォントを小さくするのも一つの方法です. **表示**メニューから**カスタム**を選択し, 拡大率を変更します. 拡大率は 50% から 400% までの間で変更できます. **表示**メニューで 100% は実寸, 200% は 2 倍に拡大して表示します.

Q. スペースバーと, ENTER キー, タブキーの動作を変更できますか?

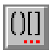
A. **ツール**+ **ユーザ設定**のメニューで動作を変更できます. デフォルト設定のスペースバーと ENTER キーを使って, 複数の横スペースや, 水平, 垂直方向にスペースを作成できます. ユーザ設定の編集タブには, このスペースバーと ENTER キーの動作を編集する機能が用意されています. タブに表示されているスペースキーボタンやタブキーボタンをクリックしてみましょう.
スペースの種類にも様々なものがあります. これらは**挿入**+ **スペース**+ **縦**または**横スペース**メニューを選択すると一覧表示されます. ここではスペースの大きさも色々選択することが出来ます. カスタムをチェックすると, 任意の大きさのスペースを作成できますし, 文字間を空白で埋める（端まで伸ばす）こともできます.
数式モードで入力した文字や記号は数式のバランスによって, 自動的にスペースが調整されます. 数式に追加スペースを挿入する場合, 必ず数式モードで行なってください. 文字モードのスペースを挿入すると数式が正しく理解されないことがあります.

Q. 数式処理のコマンドを実行しましたが, 何も動作しません. 他の機能を試したところ, それらは正常に動作しています. どこがいけないのでしょうか?

A. **数式処理**+ **関数定義**+ **定義の一覧**を選択し, 問題の関数が定義関数であるか確認します. 定義関数の場合は, 問題の変数または関数に対して**数式処理**+ **関数定義**+ **定義の削除**を実行します.

この操作でも問題が解決しない場合は**ツール**メニューから**計算エンジン設定**で, エラー処理のタブを表示し, エラー表示の設定を変更します. 無しの場合は, エラーが発生しても何もおこりません. ビープ音を選択すると, エラー時にビープ音が鳴ります. これ以外の設定にすると, 数式処理エンジンのエラーに関するメッセージが画面上に表示されます (エラー処理に関する詳細は 13 ページを参照してください).

Q. 数式の絶対値を求めようとしましたが, うまく行きません. 何がいけないのでしょうか?

A. 絶対値を示す記号にはカッコのボタン  をクリックして表示される記号を使います. キーボードの縦棒記号も絶対値記号として利用できますが, 動作不良の原因になる場合があります. また, 二項関係のアイコン  をクリックした時にも縦棒の記号がありますが, これは絶対値記号としては利用できません.

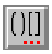
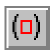
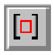
Q. 記述した数式が正確に数式として認識されていることを確認するためにはどうしたら良いでしょうか?

A. 数式を選択して CTRL + ?, または, **数式処理**+ **標準的な表記**とします. 数式は次に示すように明確な記述で表示されます.

$$\sin a/\sin b = \frac{\sin a}{\sin b} \qquad \sin x/y = \sin\frac{x}{y} \qquad \int xy = \int xy\, d?$$

変形された式が目的の式と意味合いが異なっている場合は, 適切な位置にカッコを付けたり, 式そのものを編集します.

Q. 入力した数式に間違いはなさそうですが, エラーが発生します. どのように対応すれば良いでしょうか?

A. ディスプレイ環境に数式を入力しましたか? ディスプレイ環境の中にカーソルを置いて計算コマンドを実行します. 数式の一部に文字が入っていてもディスプレイ環境全体に対して計算を実行します. 逆に数式の一部に対して計算を行う場合は目的の部分を選択してコマンドを実行します. 問題の発生する式で, 大カッコ, 中カッコ, カッコなど, 異なる種類のカッコを利用している場合はこれらを, 普通のカッコで統一しましょう. 基本的にカッコが必要な場合は, まず, 普通のカッコを利用することを原則とします. 特に, 左右のカッコの数が異なる場合は小カッコを使います. 例えば, (2)(3) は一組の外側カッコ“()” と, もう一組のカッコ“)(” で構成されていると解釈されます. したがって, この式の計算結果は (2)(3) = 2 となってしまいます. 中カッコ  , 小カッコ  と  , さらにキーボードにあるカッコはそれぞれ, 他のカッコで代用しても問題はありません. ただし, ボタンによるカギカッコ, キーボードのカッコやカギカッコは, 使い方によっては目的通り動作しないことがあります. 特にキーボード上の不等号を通常のカッコとして利用することはやめましょう. 記号パネル  の記号や二項関係の記号をカッコとして利用するには不適切です. カギカッコや大カッコは数式中では特別な意味を持つ場合がありますので, なるべく使わないことをお勧めします. これらの使用により, 正しく数式処理計算を行なえないことがあります.

Q. 数式からプロットが作成できません. どうすればいいでしょう?

A. プロットコマンドを選択する時に CTRL キーを押しましょう．こうすると, プロットを作成する前に, プロットのプロパティダイアログを画面上に表示します．数式情報のタブを表示して表示範囲を変更したり, 不連続点を正確に計算するというオプションのチェックを外します.

また, **数式処理**+ **関数定義**+ **定義の一覧**を選択するか, または数式処理ツールバーにある定義の表示ボタン  をクリックします．そして, 式で利用している変数が定義済みになっていないか, 確認します．定義されている場合は変数を選択し, **数式処理**+ **関数定義**+ **定義の削除**と操作します.

Q. 文章中に複雑なプロットを作成したせいで, 画面のスクロールに大変時間がかかってしまいます．再描画の機能を停止させ, 編集作業を効率よく行なうにはどうすればいいですか?

A. 2 通りの方法があります．数式処理を文章中で実行する必要がなく, 常にプロットを画面表示させておく必要が無い場合は数式処理の動作を停止させます．**ツール** + **数式処理設定**を選び, 計算エンジンの選択タブを表示します．そこで, エンジンを無しにします．もう一つは作成したプロットの表示をアイコン化することです．プロットを選択して**編集**メニューから**プロパティ**を選びます．レイアウトタブの画面表示に関する属性の項目でアイコン化を選択します．これ以外にも, プロットを単独の画像として保存し, それを改めてインポートするという方法もあります．詳細は 207 ページを参照してください

第 2 章

数値, 関数, 単位を使った計算

計算を行なう場合, 数値や関数は数式モードで入力します．数式モードで入力した情報は赤色（または灰色の背景）で表示されます．文字モードで入力した数値を選択して  をクリックすると数式モードの情報に変更できます．単位付きの値を計算に利用する場合, 単位は単位名のメニューに登録されているものでなければなりません．詳細は 39 ページを参照してください．

▶ **数式を入力する**

- 改行した新規の行の先頭から数式を入力する．
  または
- 文節のすぐ右隣り, または, 文字スペースの隣に入力する．

Note　ある数式のすぐ右隣に別の数式を入力するとトラブルの原因になります. 数式はなるべく ENTER キーで改行して別の行に書きましょう．

2.1　整数と分数

はじめに整数と分数（有理数）による計算例を紹介します．実数, 複素数などの例は後半で紹介します．本書の中で取り扱う数式 (実数や複素数を含む) には様々な種類のものがありますが, 操作方法は基本的にほぼ同じです．色々な数式オブジェクトを例に解説します．

2.1.1　加算と減算

▶ 3, 6, 14 **の加算**

1. 次に示す, いずれかの方法で入力ポイントを数式モードにします．
   - **挿入**+ **数式とします**. (**挿入**メニューに**文字**と表示されている場合は, すでに数式モードになっています).
   - 標準ツールバーの文字と数式の切替えボタン  をクリックします．アイコンが  となっている場合は, 既に数式モードになっています．

- CTRL + M とします.

2. $3 + 6 + 14$ と入力します. 数式は赤い色で表示されます.
3. 数式 $3 + 6 + 14$ にカーソルを置き, 次に示す, いずれかの方法で計算します.
    - **数式処理**メニューから**計算**を選択する
    - 数式処理ツールバーの計算ボタン  をクリックします.
    - CTRL + E とします.

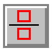
この操作により計算結果 $= 23$ が式 $3 + 6 + 14$ の右隣りに表示され, $3 + 6 + 14 = 23$ となります. このように単純な操作で足し算や引き算の計算を行なえます. 計算コマンドを使った計算例を次に示します. 実際に操作してみましょう.

▶ **計算**

$235 + 813 = 1048$　　$\frac{2}{3} - \frac{8}{7} = -\frac{10}{21}$　　$96 - 27 + 2 = 71$

Note　実際に自分で操作し, 同じ答えが得られるか確認してみましょう.

▶ **分数形式で入力する**

- 分数を入力したい場所に, マウスカーソルを置きます.
    - **挿入** + **分数**を選ぶ.
      または
    - 数式テンプレートツールバーの分数ボタン  をクリックします.
      または
    - CTRL + F または CTRL + 1 を押します.

分子の位置にマウスカーソルがある分数テンプレートが現れ, すぐに数値または式を入力できます. 画面上でテンプレートの入力ボックスを表示するには, **表示** + **入力ボックス**を選びます.

2.1.2　乗算と除算

乗算や除算の場合も, 足し算の場合と同様, ごく普通に式を入力します. そして カーソルを式に配置して**計算**コマンドを選択します.

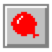
▶ **計算**

$16 \times 37 = 592$　　$(84)(-39) = -3276$　　$\frac{2}{9}\,\frac{13}{7} = \frac{26}{63}$

$103 \div 37 = \frac{103}{37}$　　$8.2/3.7 = 2.2162$　　$\frac{-\frac{2}{9}}{\frac{13}{7}} = -\frac{14}{117}$

2.1.3　帯分数と長除

帯分数 $14\frac{5}{9}$ は整数と分数の和 $14 + \frac{5}{9}$ として表記できます. 帯分数に対して実行したコマンドの計算結果は分数で表示されます. 例えば $14\frac{5}{9}$ に対して**計算**や**簡単化**などのコマンドを実行すると $\frac{131}{9}$ という答えが表示されます. これを元の形に戻す時は**展開**コマンドを実行します. これらのコマンドは数式処理ツールバーにボタンとしても用意されています.

- 計算ボタン  , 簡単化ボタン  , 展開ボタン  をクリックします．

▶ **計算 または 簡単化**

$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$　　　$193\frac{87}{94} = \frac{18229}{94}$　　　$1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} = \frac{53}{12}$

▶ **展開**

$\frac{18229}{94} = 193\frac{87}{94}$　　　$\frac{53}{12} = 4\frac{5}{12}$

展開コマンドで分数を帯分数に戻す過程を長除と呼びます．計算例から, 18229 を 94 で割った時の商は 193 で, 余りが 87 であることが分かります．

2.2　整数論の基本

正の整数を用いた演算にはいくつかの, 興味深い事柄があります．それらの多くは素数と強い関係を持っています．

2.2.1　素因数分解

より大きな正の整数で, それ自身と 1 以外で割り切れないものを素数と呼びます．素数には例えば $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ などがあります．1 より大きな正の整数は素数の積に置き換えることができます．素因数分解によって, 整数を構成する素数を知ることができます．
素因数分解を行なう場合は, カーソルを数値の部分に配置して因数分解を選択します．

▶ **因数分解**

$12345 = 3 \times 5 \times 823$　　　$82723 = 82723$

$4733\,64564\,31063\,80000 = 2^5 3^{10} 5^4 7^3 11^2 13 \times 17 \times 19 \times 23$

数式モードで factor という関数を入力して**計算**コマンドを実行し, 素因数分解する方法もあります．

▶ **計算**

$\text{factor}\,(12345) = 3 \times 5 \times 823$　　　$\text{factor}\,(82723) = 82723$

$\text{factor}\,(4733\,64564\,31063\,80000) = 2^5 3^{10} 5^4 7^3 11^2 13 \times 17 \times 19 \times 23$

素因数分解したものを元に戻す場合は**簡単化**や**計算**コマンドを利用します．

2.2.2　最大公約数と最小公倍数

複数の整数に対する最大公約数とは, それぞれの整数を割りきることの出来る最大の整数のことです．

▶ **最大公約数を求める**

1. 数式モードで gcd と入力します．gcd は最後の d を入力した時点で灰色で表示されます．
2. 複数の整数をコンマ区切りで入力し, カッコで囲います．

3. カーソルを式中に配置して  をクリック, または**計算**コマンドを選択する, または CTRL + E を押します.

▶ **計算**

$\gcd(35,15,65) = 5$　$\gcd(910,2405,5850,2665) = 65$　$\gcd(104,221) = 13$

Note　関数 gcd をキーボードからを入力する場合, gc は赤い字の数式モードで表示されますが, 最後の d を入力したところで関数 gcd は灰色の gcd に代ります. 関数 gcd は g, c, d の 3 文字を自動的に置換した関数です. gcd の入力は  をクリックして表示されるダイアログや**挿入**+ **数式名**のダイアログから行います.

最小公倍数は複数の整数の倍数で, それぞれの整数を割り切れる一番小さな整数のことです. 複数の整数に対する最小公倍数は, 関数 lcm を使います. 対象となる整数をコンマ区切りで入力してカッコで囲います. カーソルを関数中に配置して計算コマンドを選択します.

▶ **計算**

$\operatorname{lcm}(24,36) = 72$　　$\operatorname{lcm}(35,15,65) = 1365$

数式モードで関数 lcm をキーボードから入力します. 画面上では灰色で表示されます. **挿入**+ **数式名**で表示されるダイアログにこの関数が無い場合は, 数式名のテキストボックスにこの関数名を入力し, 追加ボタンを押して自分で登録します.

最大公約数と最小公倍数を両方とも求める場合は, 各整数を素因数分解して, 目的の値を計算で求めることもできます.

2.2.3　階乗

階乗とは整数 n の関数で $n!$ と記述します. これは n までの各整数の積となります.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$$

ゼロの階乗は次の通りです.

$$0! = 1$$

階乗の計算は**計算**コマンドで行います.

▶ **計算**

$3! = 6$　　$7! = 5040$　　$10! = 3628800$

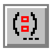
2.2.4　二項係数

式 $a+b$ の形で記述される式を**二項式**と呼びます. 整数 n を使った式 $(a+b)^n$ の展開式は次のように定義されます.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

この関数は個数 n から k 個のものを選ぶ時の組合せの数を求める式となっています．この式の係数 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ を二項係数と呼びます．この係数式は $\binom{n}{k}$ ，または $C_{n,k}$ や $_nC_k$ と記述される場合もあります．数式処理の機能でこの係数を求める場合は $\binom{n}{k}$ と記述してください．

▶ **二項係数の記述方法** $\dbinom{n}{k}$

1. 数式オブジェクトツールバーの二項式のアイコン  をクリック，または**挿入**+ **二項式**とします．
2. 線種は無しを選択して，OK ボタンをクリックします．
3. 入力ボックスに数値を入力します．

▶ **計算**

$\dbinom{5}{2} = 10 \qquad \dbinom{35}{7} = 6724\,520$

二項係数の表記を分数式に変換する場合は**書換え**コマンドを利用します．

▶ **書換え ＋ 階乗**

$\dbinom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!} \qquad \dbinom{m}{5} = \frac{1}{120}\dfrac{m!}{(m-5)!}$

2.3　実数

整数や分数 (有理数) などを実数と呼びます．無理数の $\sqrt{2}$ や π など，整数の商を使って表現できない数も実数に含まれます．

Reminder　計算に利用する数値の入力は必ず数式モードで行います．数式モードで入力した情報は画面に赤い色で表示されます．赤い色で表示されていない文字や数字を数式に変更する場合は， をクリックするか，または**挿入**+ **数式**とします．

2.3.1　基本的な計算方法

整数と分数を計算した結果は普通，分数で表示されます．しかし，計算の対象となる数値のうち浮動小数点形式の物がある場合，計算結果はやはり浮動小数点形式で表示されます．$\sqrt{2}$ や π などの実数は**数値計算**コマンドを使った場合のみ，実際の数値で計算されます．次の式を計算する場合，式中にカーソルを配置して計算，または，**数値計算**のコマンドを選択します．式を計算し，計算結果で置換する場合は CTRL + SHIFT + E とします．

▶ **計算 (または** CTRL + E**)**

$9.6\pi - 2.7\pi = 6.9\pi \qquad 42\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right)\sqrt{2} = 34\sqrt{2}$

▶ **数値計算**

$9.6\pi - 2.7\pi = 21.677 \qquad 42\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{7}\right)\sqrt{2} = 48.083$

数式の計算およびその値を置換するには，CTRL + SHIFT + E を押すか，マウスで数式を選択する

か, SHIFT ＋ 矢印を押し, CTRL を押しながら計算を選択します.

▶ CTRL ＋ **計算 (または**CTRL＋ SHIFT ＋ E)

$235.3 + 813$ は, 1048.3 に置換されます.

▶ CTRL ＋ **計算 (または**CTRL＋ SHIFT ＋ E)

$42\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{7}\right)\sqrt{2}$ は, 48.083 に置換されます.

数値計算における有効桁数は, **計算エンジン設定**メニューの一般タブで行ないます. 詳細は 28 ページを参照してください.

浮動小数点形式の数値を有理数に変換する場合は, **数式処理**メニューから**書換え**を選択します.

▶ **書換え ＋ 有理数**

$0.125 = \frac{1}{8}$　　$4.72 = \frac{118}{25}$　　$6.9\pi = \frac{69}{10}\pi$　　$3.1416 = \frac{3927}{1250}$

有理数や記号を使った数式を浮動小数点形式に変換する場合は**数式処理**メニューから書換えを選択します.

▶ **書換え ＋ 浮動小数点**

$\frac{1}{8} = 0.125$　　$\frac{118}{25} = 4.72$　　$\frac{69}{10}\pi = 21.677$　　$\frac{3927}{1250} = 3.1416$

数式モードで “float” と入力すると灰色で関数 float が表示されます. float を使って計算を実行すると浮動小数点形式の値が求められます.

▶ **計算**

$\mathrm{float}\left(\frac{1}{8}\right) = 0.125$　　$\mathrm{float}\left(\frac{118}{25}\right) = 4.72$

2.3.2　累乗とルート

累乗表記の値を計算する場合は, 入力した式に対して**計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

- ルート記号を入力したい場所にマウスカーソルを置きます.
  - 数式テンプレートツールバーのルートボタン  をクリックします.
    または
  - **挿入**＋ **ルート**を選びます.
    または
  - CTRL ＋ R または CTRL ＋ 2 を押します.

入力ボックスにマウスカーソルが配置されて, テンプレートが現れ, すぐに数値または式を入力できます.

画面上で入力ボックスを表示するには, **表示 ＋ 入力ボックス**を選びます.

▶ **上付き文字 (下付き文字) のテンプレートを表示する**

- 上付き文字 (下付き文字) を入力したい場所にマウスカーソルを置きます.

– **挿入**+ **上付き文字**(**下付き文字**) を選びます.
  または
– 数式テンプレートツールバーの上付き文字ボタン  (下付き文字ボタン ) をクリックします.
  または
– CTRL + H または CTRL + 上矢印または CTRL + 3 (CTRL + L または CTRL + 下矢印または CTRL + 4) を押します.

入力ボックスにマウスカーソルが配置されて, テンプレートが現れ, すぐに数値または式を入力できます.
画面上で入力ボックスを表示するには, **表示** + **入力ボックス**を選びます.

▶ **計算**

$3^4 = 81$ $\quad 3^{-4} = \frac{1}{81}$ $\quad \sqrt{2.34} = 1.5297$ $\quad (2.5)^{\frac{4}{5}} = 2.0814$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{32} = \frac{4294967296}{23283064365386962890625}$ $\quad 0.4^{32} = 1.844674407 \times 10^{-13}$

ここでひとつ注意すべきことがあります. たとえば $\left(\frac{2}{5}\right)^{32}$ と $(0.4)^{32}$ の計算結果は異なる値になります. 数学的な厳密さで言えば, $\left(\frac{2}{5}\right)^{32}$ の計算結果が正確であると言えます. $(0.4)^{32}$ は有効数字 10 ケタでの表示になりますので, 誤差が発生します. 指数とルートに関する計算では, 実数のルート計算に関して答えが若干異なります.

ルート記号

代数や小数点形式で入力した正の実数に対して, MuPAD にはその n 乗根を求める機能が用意されています. **計算**コマンドを実行することによって, 記号を利用した代数式であれ, 小数点形式の式であれ, 式の計算を実行します. また, 小数点形式の値に対して複素数根を求める機能があります. 詳細は 36 ページを参照してください.

▶ **計算**

$\sqrt[3]{0.008} = 0.2$ $\quad \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ $\quad \sqrt{\frac{9}{4}\pi^2} = \frac{3}{2}\pi$ $\quad \sqrt[3]{\frac{16}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{16}$

$\sqrt[4]{16} = 2$ $\quad \sqrt[3]{-8} = -2$ $\quad \sqrt[5]{18.234} = 1.7872$ $\quad \sqrt[5]{-18.234} = -1.7872$

▶ **簡単化**

$\sqrt[3]{\frac{16}{27}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$ $\quad \sqrt[4]{162\pi^6} = 3\sqrt[4]{2}\pi^{\frac{3}{2}}$

数式によっては関数 simplify を使った方が効率的に計算できる場合もあります. 数式モードで "simplify" と入力すると自動的に灰色の表示に変わります.

▶ **計算**

$\mathrm{simplify}\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$ $\quad \mathrm{simplify}\left(\sqrt[4]{162\pi^6}\right) = 3\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{2}$

ルートの指数表記

ルートを指数表記する場合, 指数部分にどのような値でも入力することができます. 整数を指数表記に変換してもルート記号が付くだけですが, 小数点形式で式を記述した場合は, 式が計算されます.

▶ **計算**

$(16)^{\frac{1}{4}} = 2$　　$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8}$　　$(0.008)^{\frac{1}{3}} = 0.2$　　$(24)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{24}$

$(3.1416)^{2.7183} = 22.460$　　$(-0.008)^{\frac{1}{3}} = 0.1 + 0.173\,21i$

▶ **簡単化**

$(16)^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{16}$　　$(-8)^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{-1}$　　$(-0.008)^{\frac{1}{3}} = 0.1 + 0.173\,21i$

数値計算のコマンドを実行すると実数値の計算結果が表示されます. 負の実数の奇数乗の根を計算すると, 複素数根が計算されます. 詳細は 36 ページを参照してください.

▶ **数値計算**

$8^{\frac{1}{3}} = 2.0$　　$\pi^e = 22.459\,2$　　$(-8)^{\frac{1}{3}} = 1.0 + 1.732\,1i$

2.3.3　分母の有理化

分母を有理化する方法を説明します. カーソルを分数に配置します. そして**数式処理**メニューから**簡単化**を選択します.

▶ **簡単化**

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$　　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{7} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{7} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$$

2.3.4　数値の近似計算

数式処理を実行した計算結果は数値や記号を使って表記されます. このうち数値で表示されるものは, 有効桁数や表示桁数の関係から近似値で表示される場合があります. なぜなら, 数値計算の結果を浮動小数点形式で表記したい場合は, **数式処理**メニューから**数値計算**コマンドを選ぶか, または, 元の式の数値を小数点を使って入力して計算を実行します. 小数点を使って入力した値は自動的に有理数ではなく, 浮動小数点形式の数値として認識されますので, その数値の演算を行った結果, 近似値が画面に表示されることになります. 例外として, π, e, $\sqrt{2}$ などの記号の値は, **計算**コマンドで処理しても, そのままの形式で画面に表示されます.

したがって, 数値解析を行なうということは, 浮動小数点形式の値を使った誤差解析と言い換えることが出来るかもしれません. 浮動小数点形式の演算においては常に丸め誤差や, 無限長の値を有限長の値で置き換えるために短縮誤差が発生します. また, 浮動小数点法はハードウェアによっても精度が異なります. そもそも, 浮動小数点形式で表現される数値は有理数, 無理数のどちらでもありません. すなわち, 浮動小数点形式の数値は有理数や無理数の近似値を表しているに過ぎないのです.

数式処理システムでは有限精度や拡張精度と呼ばれる精度を使って整数や有理数を正確に表現しています. 例えば, $\sin 1$, $\sqrt{2}$, π, e などをそのまま計算に利用すれば, 精度を失うことはありません. しかし, **計算エンジン設定**にある数式処理の有効桁数や, 数式処理設定にある計算結果表示桁数の項目によって, 数値計算のコマンドの計算結果である近似値は大きく影響されます. 有効桁

数, 表示桁数をそれぞれ 25 桁に設定した時の例を次に示します. 詳細は 28 ページを参照してください.

$$\begin{aligned}\sin 1 &= 0.841\,470\,984\,807\,896\,506\,652\,502\,3\\ \sqrt{2} &= 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,689\\ \pi &= 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\\ e &= 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\end{aligned}$$

小数点以下の値を見やすくするため, 近似値は小数点以下で 3 桁ごとに区切って表示されます. 数値の精度は右側に行くにしたがって低くなります. 次の例をご覧ください.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

ところが有効桁数 25 桁で計算すると

$$1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,689^2 = 2.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001$$

のようになります.
比較のため, **計算**コマンドと**数値計算**コマンドの計算結果を次に示します.

計算	数値計算
$82 \div 37 = \frac{82}{37}$	$82 \div 37 = 2.216\,2$
$936/14 = \frac{468}{7}$	$936/14 = 66.857$
$93.6/1.4 = 66.857$	$936/14.0 = 66.857$
$\sqrt{234} = 3\sqrt{26}$	$\sqrt{234} = 15.297$

表示桁数と科学記数法での桁数の設定は数式処理設定ダイアログで行ないます. 計算に利用する有効桁数の設定は数式処理エンジンの設定ダイアログで行ないます. 詳細は後述します.

2.3.5　科学記数法

ゼロでない実数 x は次のように記述できます.

$$x = c \times 10^n$$

ここで $1 \le c < 10$ で n は整数です. このような記述形式を科学記数法と呼びます.

$$\begin{aligned}12 &= 1.2 \times 10\\ 8274.9837 &= 8.2749837 \times 10^3\\ 0.000001234 &= 1.234 \times 10^{-6}\\ -54163.02 &= -5.416302 \times 10^4\end{aligned}$$

▶　科学記数法での表記方法

1. c に小数点以下の数を持つ数値を入力します.
2. 記号キャッシュツールバーまたは, 二項演算子のパネル  から $\times$ を選択します.
3. 10 を入力します.
4. **挿入**+ **上付き文字**, または  をクリックして整数, n を入力します.

これらの操作をキーボードショートカットで行うこともできます.

▶ **キーボードショートカットによる科学記数法入力**

1. 数式モードで c に相当する数値を入力します.
2. 続けて数式モードのまま ttt と入力します.
   (3 文字の t は自動的に $\times 10$ に置換されます. 上付き文字の入力ボックスが表示されない時は, **表示**+ **入力ボックス**をチェックします.)
3. 上付き文字の入力ボックスに整数 n を入力します.

数値演算の結果によっては答えが自動的に科学記数法で表示される場合があります. これは数値の桁数が科学記数法の設定桁数に達しているためです. 設定の変更方法は 29 ページを参照してください.

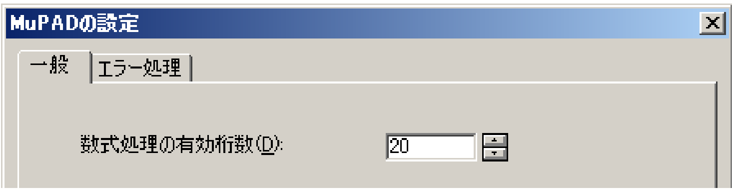
2.3.6　数式処理と計算結果の表示方法

数式処理の際に適用する有効桁数と, その計算結果を表示する際の桁数は, それぞれ別に定義します. **ツール**メニューにある**数式処理設定**と, **計算エンジン設定**でそれぞれの設定を行ないます. 文章ファイルごとに数式処理の桁数に関する設定を変更する場合は, **数式処理**メニューの**数式処理設定**を選び, デフォルトを変更します. 計算結果の精度と表示方法に関する設定を細かく調整できます.

数式処理の有効桁数

▶ **数式処理に関する有効桁数のグローバル設定**

1. **ツール**メニューから**計算エンジン設定**を選択します.
2. 一般のタブをクリックします.
3. 有効桁数のボックスで値を変更します.

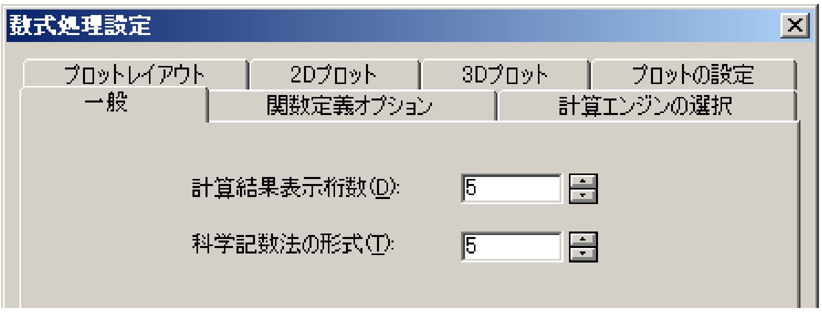


桁数を増やせば精度は向上しますが, 計算時間は長くなります. 複雑な計算を行なう時にこの設定を変更し, 計算時間と精度の関係をチェックしてみましょう.

計算結果表示桁数
計算結果の表示桁数をグローバル設定することもできますし, 個別の文書ファイルで別々に設定することもできます.

▶ **計算結果の表示桁数をグローバル設定する**

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択します.
2. 一般のタブを表示します.
3. 表示桁数のボックスで値を変更します.
4. OK ボタンをクリックします.



▶ **計算結果表示桁数のローカル設定**

1. **数式処理**メニューから**設定**を選択します.
2. 一般のタブを表示します.
3. 現在の値を使うラジオボタンをクリックします.
4. 表示桁数のボックスで値を変更します.
5. OK ボタンをクリックします.

計算結果の表示桁数は言葉通り, 計算した値の画面表示上の形式にすぎません. この設定で計算の精度が影響されることはありません. しかし, 表示有効桁数よりも大きな浮動小数点の値で, 計算か数値計算を行なうと, 答えは科学記数法で表示されます.
数値だけを用いた計算の場合, **計算**と**数値計算**コマンドによって違いが生じることはありません.
表示桁数の設定にしたがって計算結果は丸め処理されます. 一般に表示桁数は有効桁数に一致させると実用的です.

科学記数法の形式
表示桁数の設定で決めた桁数よりも大きな数値を画面表示する場合は科学記数法で表示されます. また, 0 ではじまる小数点以下の数値に対して数値計算コマンドを実行すると, これも科学記数法によって表記されます. 科学記数法に利用する桁数の設定は数式処理設定ダイアログで行います. この桁数によって 10 の累乗の前に付く数値を設定します. 科学記数法の桁数は, 対象の数値が負の値であっても, 正の場合と同じように表示します. マイナスの記号を考慮する必要はありません. 次に設定と表示に関する例を紹介します.

表示桁数	**科学記法の桁数**	**対象となる値**	**数値計算コマンド**
6	3–6	100π	314.159
6	1–2	100π	3.14159×10^2
6	3–6	-100π	-314.159
6	1–2	-100π	-3.14159×10^2
5	5	56789	56789.
5	1–4	56789	5.6789×10^4
4	1–4	56789	5.679×10^4
9	6–9	0.000001111	0.000001111
9	1–5	0.000001111	1.111×10^{-6}
8	1–8	0.000001111	1.111×10^{-6}

► **科学記数法のグローバル設定**

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択します.
2. 一般タブを表示します.
3. 科学記数法の形式の値を設定します.
4. OK ボタンをクリックします.

► **科学記数法のローカル設定**

1. **数式処理**メニューから**設定**を選択します.
2. 一般タブを表示します.
3. ローカル設定というラジオボタンをクリックします.
4. 科学記数法の桁数の値を設定します.
5. OK ボタンをクリックします.

科学記数法の値を計算結果の表示桁数よりも大きくすることはできません. たとえば, 計算結果の表示桁数が 5 の場合, 科学記数法の最大桁数は 5 です.

2.4 関数と関係子

計算を目的とした数値や数式は数式モードで入力する必要があります. 数式モードで入力した情報は赤い色で表示されますので, 文字モードとは簡単に区別できます. 文字モードの情報を数式モードに変更する場合は目的の文字を選択して  をクリックします.
以下は基本的な組込み関数 (絶対値, 最大/最小値, 整数の最大/最小値) と組込み関係子 (和集合, 共通部分, 差分) の例です.

2.4.1　絶対値

ある値 z の絶対値はゼロから z までの距離を示すものです．数値や数式の絶対値は縦棒を用いて $|z|$ のように記述します．

▶　**数式に絶対値の記号を付ける**

1. 数式を選択します．
2. アイコン  をクリックします．絶対値記号を選択して OK ボタンをクリックします．
   または
   挿入+ **カッコ**として絶対値の記号を選択して OK ボタンをクリックします．
   または
   キーボードから CTRL + スペースバーとします．

▶　**絶対値を求める方法**

1. 絶対値記号のついた数式にカーソルを配置します．
2. 計算コマンドを選択します．

▶　**計算**

$|-7| = 7$　　$|-11.3| = 11.3$　　$|43| = 43$　　$|21-13| = 8$

複素数の絶対値に関する詳細は 38 ページを参照してください．

2.4.2　最大値と最小値

max と min はカッコ内に記述された複数の数値から最大値または最小値を見つける関数です．この時, カッコ内の値はコンマで区切ります．関数 max と min は  をクリックするか, または**挿入**+ **数式名**で表示されるダイアログを使って入力します．数式モードから直接タイプ入力することもできます．これ以外に, 二項演算子の和 $\vee$ または積 $\wedge$ の記号を使って最大値と最小値を求めることもできます．二項演算子は  をクリックすると表示されます．最大値または最小値を求めるための式を記述したら  をクリック, または計算コマンドを選択することによって目的の値を見つけることができます．

▶　**計算**

$$\max(27, \sqrt{236}, \tfrac{65}{2}, -14) = \tfrac{65}{2} \qquad 27 \vee \sqrt{236} \vee \tfrac{65}{2} \vee -14 = \tfrac{65}{2}$$

$$\max\left(27, \min\left(\sqrt{236}, \max\left(\tfrac{65}{2}, -14\right)\right)\right) = 27 \qquad 27 \vee \left(\sqrt{236} \wedge \left(\tfrac{65}{2} \vee -14\right)\right) = 27$$

$$\min(27, \sqrt{236}, \tfrac{65}{2}, -14) = -14 \qquad 27 \wedge \sqrt{236} \wedge \tfrac{65}{2} \wedge -14 = -14$$

$$\max\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \\ \pi & 6 \end{pmatrix} = 6 \qquad \max\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/6 & 5 \\ -5 & 4 & \pi & e^2 \end{pmatrix} = e^2$$

有限区間内で最大値, 最小値を見つける場合, 関数 max や min のサブスクリプトに区間の開始値と終了値を示す整数を記述します. たとえば $1 \le n \le 10$ や $k \in [1, 10]$ とします.

▶ **計算**

$$\max_{1\le n\le 10}(\sin n) = \sin 8 \qquad \min_{k\in[1,10]}(\cos k) = \cos 3$$

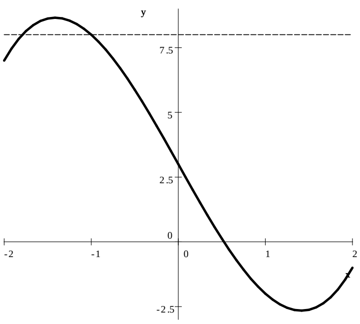
$$\max_{1\le n\le 10}(\sin 1.5n) = 0.997\,49 \qquad \min_{k\in[1,10]}(\cos 2.6k) = -0.994\,18$$

▶ **数値計算**

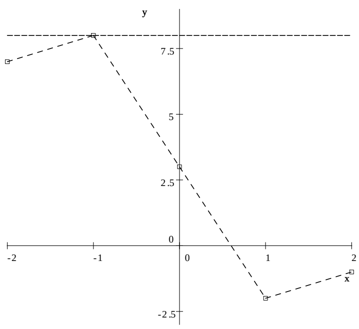
$$\max_{1\le n\le 10}(\sin n) = 0.989\,36 \qquad \min_{k\in[1,10]}(\cos k) = -0.989\,99$$

$$\max_{-2\le x\le 2}\left(x^3 - 6x + 3\right) = 8.0 \qquad \min_{k\in[1,10]}(\cos 2.6k) = -0.994\,18$$

関数 max と min は区間内の整数変数に対する最大値と最小値を求める関数です. $x \in [-2, 2]$ と $-2 \le x \le 2$ は両方とも x が 5 個の整数変数 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ をとることを意味しています. 上に示した最大値を求める二番目の例題は関数 $x^3 - 6x + 3$ の $x = -2, -1, 0, 1, 2$ に対する値の内, 最大のものを求めるという問題です. 連続した関数 $x^3 - 6x + 3$ の最大値を求める問題ではありません.



$x^3 - 6x + 3$



$x^3 - 6x + 3$
$x = -2, -1, 0, 1, 2$

2.4.3　最大と最小の整数を見つける関数

ある数値よりも小さいか等しい整数で, 最大の整数を見つける関数をフロア関数と呼び, $\lfloor z \rfloor$ と記述します.

▶ **数式にフロア関数のカッコを付ける**

1. マウスをドラッグして数式を選択します.
2. アイコン  をクリックするか, または**挿入**+ **ペアカッコ**を選択し, フロア関数のカッコ $\lfloor$ を選択し, OK をクリックします.

▶ **最大整数の検索**

1. フロア関数のカッコを付けた数式にカーソルを配置します.
2. **計算**コマンドを選択します.

▶ **計算**

$\lfloor 5.6 \rfloor = 5$　　$\lfloor -11.3 \rfloor = -12$　　$\left\lfloor \frac{43}{5} \right\rfloor = 8$　　$\lfloor \pi + e \rfloor = 5$

これとは逆にある数値よりも大きいか等しい整数のうち, 最小の整数を見つける関数をシーリング関数と呼び, $\lceil z \rceil$ と記述します.

▶ **数式にシーリング関数のカッコを付ける**

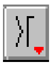
1. マウスをドラッグして数式を選択します.
2. アイコン  をクリックするか, または**挿入**+ **カッコ**を選択します.
3. シーリング関数のカッコ $\lceil$ をクリックし, OK ボタンをクリックします.

▶ **最小整数の検索**

1. シーリング関数のカッコを付けた数式にカーソルを配置します.
2. **計算**コマンドを選択します.

▶ **計算**

$\lceil 5.6 \rceil = 6$　　$\lceil -11.3 \rceil = -11$　　$\left\lceil \frac{43}{5} \right\rceil = 9$　　$\lceil \pi + e \rceil = 6$

フロア関数およびシーリング関数のカッコは特殊な区切り記号のパネル  に用意されています. ただし, カッコがペア型になっていませんので注意してください.

2.4.4　**相等チェック**

相等チェックの結果は真, 偽, と判定不可の 3 つです. 数式の等号をチェックした時に, その真偽が決定できない場合があります. その場合には判定不可と表示されます. 計算エンジンは確率的な手法を使って相等をチェックしますので, 真と判定された式に僅かでも偽になる可能性が残されていると, これを決定することはできません. 実際にいくつかの数式については, この確率法で解決できないものがあります.

相等チェックコマンドの利用方法

▶ **相等性をチェックする**

1. カーソルを数式に配置します.
2. **相等チェック**コマンドを選択します.

▶ **相等チェック**

$e^{i\pi} = -1$ は真　　$\pi = 3.14$ は偽　　$\arcsin \sin x = x$ は判定不可

2 つの数値の非相等性をチェックする時に相等チェックの機能を利用します. 2 つの数値の差を表す式と, その差の絶対値を表す式が等しいという式をたて, カーソルを配置します. そして**相等チェック**を選択します.

▶ **相等チェック**

$\frac{9}{8} - \frac{8}{9} = \left|\frac{9}{8} - \frac{8}{9}\right|$ は真　　$\pi^e - e^\pi = |\pi^e - e^\pi|$ は偽

この結果 $\frac{9}{8} - \frac{8}{9} \geq 0$, または $\frac{9}{8} \geq \frac{8}{9}$ であり, $\pi^e - e^\pi < 0$, または $\pi^e < e^\pi$ であることがわかりました.

関数 istrue **を使って相等性をチェックする**

数式モードで $istrue$ と入力するか, または**挿入**+ **数式名**ダイアログでこの関数を, 新たな数式名としてを入力します.

▶ **計算**

$\operatorname{istrue}\left(\frac{9}{8} < \frac{8}{9}\right) =$ 偽　　$\operatorname{istrue}(\pi^e < e^\pi) =$ 真

$\operatorname{istrue}(2 + 2 = 4) =$ 真　　$\operatorname{istrue}\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\right) =$ 真

論理演算子を使って相等チェックを行なう

演算子 $\wedge$ (かつ) と $\vee$ (または) は論理演算子としての機能を持っています. 式 $\alpha \wedge \beta$ は α と β がそれぞれ真の時だけ真となります. 一方, 式 $\alpha \vee \beta$ は α または β のどちらか一方が真であれば真となります. 同語反復 $0 = 0$ や $1 = 1$ を使って, もう一方の式の真偽を調べることができます.

▶ **計算**

$\left(5^6 < 6^5\right) \wedge (1 = 1) =$ 偽　　$\left(5^6 > 6^5\right) \wedge (1 = 1) =$ 真

$\left(5^6 > 6^5\right) \vee (1 = 1) =$ 真　　$\left(5^6 < 6^5\right) \vee (1 = 1) =$ 真

$(1 = 1) \vee (1 = 0) =$ 真　　$(e^\pi = \pi^e) \wedge (0 = 0) =$ 偽

数値計算の機能で非相等であることをチェックする

数値によっては**数値計算**のコマンドを実行することによって, 相等性をチェックできる場合があります.

▶ **数値計算**

$\frac{9}{8} = 1.125$　　$\frac{8}{9} = 0.88889$　　よって $\frac{9}{8} > \frac{8}{9}$

$\pi^e = 22.459$　　$e^\pi = 23.141$　　よって $\pi^e < e^\pi$

2.4.5　和集合と共通部分

複数の集合の和集合を求める場合は記号 $\cup$ で集合を結び**計算**コマンドを利用します.

▶ **計算**

$\{1,2,3\} \cup \{a,b,c\} = \{1,2,3,a,b,c\}$　　$\{1,2,3\} \cup \{3,5\} \cup \{7\} = \{1,2,3,5,7\}$

$\left\{\sqrt{2},\pi,3.9,r\right\} \cup \{a,b,c\} = \left\{\pi,r,a,b,c,3.9,\sqrt{2}\right\}$

複数の集合の共通部分を求める場合は記号 $\cap$ で集合を結び**計算**コマンドを利用します.

▶ **計算**

$\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$　　$\{a,b,c,d\} \cap \{d,e,f\} = \{d\}$

$\{1,2,3\} \cap \{a,b,c\} = \emptyset$　　$\{1,2,3\} \cap \{\} = \emptyset$

共通部分が無い時は空集合の記号である空のカッコ $\{\}$ または, 記号 $\emptyset$ が表示されます. 逆に空集合の記号 $\emptyset$ を入力する場合はその他の記号アイコン  をクリックしてパネルで目的の記号を選択します.

集合の差を求める場合は, 2 つの集合の間にバックスラッシュ $\setminus$, または二項関係のパネルからマイナス記号 $\setminus$ を入力して, **計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

$\{1,2,3,4\} \setminus \{2,4\} = \{1,3\}$　　$\{a,b,c,d\} \setminus \{d,e,f\} = \{a,b,c\}$

$\{1,2,3\} \setminus \{a,b,c\} = \{1,2,3\}$　　$\{1,2,3\} \setminus \{1,2,3\} = \emptyset$

ペアカッコを使ってグループ分けした集合の和, 差, 共通部分を求める場合は**計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

$\{1,2,3,c\} \cap (\{2,4,6\} \cup \{a,b,c\}) = \{2,c\}$

$(\{1,2,3,c\} \cap \{2,4,6\}) \cup (\{1,2,3,c\} \cap \{a,b,c\}) = \{2,c\}$

$(\{2,4,6\} \cup \{a,b,c\}) \setminus \{2,a,b\} = \{c,4,6\}$

2.5　複素数

実数 a と b による $a+b\sqrt{-1}$ という形式の数値を複素数と呼びます. 複素数の演算は実数の標準的な計算規則と全く同じです. 複素数の場合, 恒等式 $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ が成り立ちます. 複素数は多項式の解を求める場合に役立つという意味で考えられた数値です.

$\sqrt{-1}$ はデフォルトでは i と表記されます. この代りに j を利用する場合は, 次の手順にしたがってデフォルト設定を変更します.

▶ **すべての文書で $\sqrt{-1}$ の表記に j を利用する**

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択し, 一般タブを表示します.
2. 虚数単位の項目で i を j に変更するをチェックします. そして OK ボタンをクリックします.

この様に設定すると虚数単位は i でなく j で表示されます. 文章で虚数単位とは別の目的で i を使うことができます.
グローバル設定を変更すること無く, ローカル設定のみを変更する場合は次のようにします.

▶ **$\sqrt{-1}$ を j で表記するローカル設定の方法**

1. **数式処理**+ **設定**から一般タブを表示します.
2. ローカル設定にチェックします.
3. 虚数単位で i を j に変更するにチェックして, OK ボタンをクリックします.

2.5.1　基本操作

加算, 減算, 乗算, 除算はどれも標準的な記述方法で数式を入力し, **計算**コマンドで計算を実行します. 計算結果は実数 a と b を使って $a+bi$ や $a+ib$ の形式で表示されます.

▶ **計算**

$(23-5i)+(1+16i)=24+11i$　　$\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$(1+i)(3-2i)=5+i$　　$\dfrac{i}{1+i}\dfrac{2+i}{3-i}=\frac{1}{2}i$

$\dfrac{2.5+3i}{3.59+16i}=0.21189-0.10871i$　　$(2+3i)\div(6i)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$

複雑な数式に対してキーボードコマンド CTRL + Y (文字送り) を実行すると, CTRL + E や**計算**コマンドとは違った結果が出力されることがあります. CTRL + Y は計算ステップをひとつしか実行しませんので, 計算過程を示す場合に便利です.

2.5.2　複素数に対する実数の累乗とルート

複素数の指数計算を行なう場合は, 一般的な累乗計算の場合と同じように式を記述します.

▶ **計算**

$i^2=-1$　　$(3+2i)^{-4}=-\frac{119}{28\,561}-\frac{120}{28\,561}i$　　$\sqrt{-5}=i\sqrt{5}$

$(3+2i)^4=-119+120i$　　$\left((3+2i)^{\frac{1}{4}}\right)^4=3+2i$

$\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}i\right)^5=\frac{113\,221}{400\,000}+\frac{43\,737}{128\,000}i$　　$(0.4-0.75i)^5=0.283\,05+0.341\,70i$

式 $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}i\right)^5$ と $(0.4-0.75i)^5$ の計算では答えが異なります. 式 $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}i\right)^5$ の計算結果がより正確であり, 式 $(0.4-0.75i)^5$ の計算結果は有効数字 5 桁の近似値が算出されます.

▶ **数値計算**

$\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}i\right)^5=0.283\,05+0.341\,70i$

▶ **計算**

$\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$　　$\sqrt{(-2)}\sqrt{(-3)}=-\sqrt{2}\sqrt{3}$

この場合, 単純に $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ のように計算できません. この場合のエラーを回避するには, 最初に負数のルートを複素数として入力して計算します.

記号数の場合, 求めたい計算結果が常に表示されるとは限りません. 例えば, $\sqrt[3]{i}$ を計算しようとすると, $\sqrt[3]{i}$ が表示されます. **書換え**+ **直交座標**を使って, 標準的な複素数の形式に書き換えます.

▶ **書換え + 直交座標**

$\sqrt[3]{i} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ $\qquad (8i)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{8} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}\right)i$

$\sqrt{2+3i} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{13}+1} + i\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{13}-1}$

$\sqrt{a+ib}$ のような直交座標の記号数を書き換えるには, 初めに, 記号 a や b は実数として解釈するよう推定 (実数) を実行します.

▶ **書換え + 直交座標**

$\sqrt{a+ib} = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} + i\sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$

$(a+bi)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$

負の実数の複素数根を求めるには, **数値計算**メニューまたはツールバーの数値計算ボタンを使います.

▶ **計算**

$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-27}$ $\qquad \sqrt[3]{-0.008} = 0.1 + 0.173\,21i$

▶ **数値計算**

$\sqrt[3]{-27} = 1.5 + 2.598\,1i$ $\qquad \sqrt[3]{-0.008} = 0.1 + 0.173\,21i$

$(-8)^{\frac{1}{3}} = 1.0 + 1.732\,1i$ $\qquad \sqrt[3]{-8} = 1.0 + 1.732\,1i$

三角法を含む複素数の累乗のルートの計算に関しては, この章では記述していません. 複素数の累乗やルートに関しては, 36 ページを参照してください.

2.5.3 複素数の実数部と虚数部

複素数の実数部と虚数部の値を個別に求める場合は関数 Re と Im を利用します. これらの関数を数式モードで入力すると自動的に灰色で表示されます.

▶ **計算**

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{2+3i}{3-5i}\right) = -\frac{9}{34}$ $\qquad \mathrm{Im}\left(\dfrac{2+3i}{3-5i}\right) = \frac{19}{34}$

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{3.6+6i}{5-3.25i}\right) = -4.2179\times10^{-2}$ $\qquad \mathrm{Re}\left(\dfrac{a+bi}{c+di}\right) = \dfrac{ac}{c^2+d^2} + \dfrac{bd}{c^2+d^2}$

▶ **計算**

$\dfrac{2+3i}{3-5i} = -\frac{9}{34} + \frac{19}{34}i$ $\qquad \dfrac{3.6+6i}{5-3.25i} = -4.217\,9\times10^{-2} + 1.172\,6i$

指数形式の複素数の実数部と虚数部を分けるには, 解を使います.

▶ 解

$e^{3(x-5i)+2x} = e^{5x}e^{-15i}$

書換えを使って, 標準形式の複素数の因数分解を計算する.

▶ **書換え ＋ Sin と Cos または書換え ＋ 直交座標**

$e^{-15i} = \cos 15 - i \sin 15$

2.5.4　絶対値

複素数 z の絶対値, すなわち z の原点からの距離は $|z|$ と記述します. 実数 a と b からなる $z = a + ib$ では $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ となります.

▶ **数式に絶対値記号を付ける**

1. マウスで数式を選択します.
2. アイコン  をクリック, または**挿入**+ **カッコ**とするか, または CTRL ＋ 縦棒記号とします.
3. 絶対値の記号を選択して OK ボタンをクリックします.

▶ **複素数の絶対値を求める**

1. 絶対値で囲まれた数式中にカーソルを配置します.
2. **計算**コマンドを選択します.

▶ **計算**

$|2 + 3i| = \sqrt{13}$　　$\left|\sqrt{1 + 2i}\right| = \sqrt[4]{5}$

$|2.5 - 16.3i| = 16.491$　　$\left|e^{i\pi}\right| = 1$

$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

▶ **数値計算**

$|2 + 3i| = 3.6056$　　$\left|\sqrt{1 + 2i}\right| = 1.4953$

2.5.5　共役複素数

a と b を実数とする複素数 $a + ib$ の共役複素数は $a - ib$ で与えられます. 式 $a + ib$ の共役複素数を求める場合は式 $(a + ib)^*$ に**計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

$\mathrm{assume}\,(a, \mathrm{real}) = \mathbb{R}$　　$\mathrm{assume}\,(b, \mathrm{real}) = \mathbb{R}$

▶ **計算**

$(5 - 14i)^* = 5 + 14i$　　$\left(\dfrac{3.6 + 6i}{5 - 3.25i}\right)^* = -4.2179 \times 10^{-2} - 1.1726i$

$(a + ib)^* = a - ib$　　$(a + ib)\,(a + ib)^* = (a - ib)\,(a + ib)$

$(a + ib)\,(a + ib)^* = a^2 + b^2$ なので, これは $zz^* = |z|^2$ であることを意味します. z の逆数を求める場合は $z \neq 0$ と仮定し, $\frac{z^*}{|z|^2}$ の計算を実行します.

► **計算**

$\frac{(5-14i)^*}{|5-14i|^2} = \frac{5}{221} + \frac{14}{221}i$ $\qquad$ $(5-14i)\left(\frac{5}{221} + \frac{14}{221}i\right) = 1$

ここで使用されている z^* と同様に上線 $\bar{z}$ などのいくつかの表記法は共役複素数でも利用可能です.

2.5.6 複素数の近似値

数式処理を実行した計算結果は数値や記号を使って表記されます. このうち数値で表示されるものは, 有効桁数や表示桁数の関係から近似値で表示される場合があります. なぜなら, 数値計算の結果を浮動小数点形式で表記したい場合は, **数式処理**メニューから**数値計算**コマンドを選ぶか, または, 元の式の数値を小数点を使って入力して計算を実行します. 小数点を使って入力した値は自動的に有理数ではなく, 浮動小数点形式の数値として認識されますので, その数値の演算を行った結果は, 近似値が画面に表示されることになります. **数式処理**メニューから**数値計算**コマンドを選ぶか, または, 元の式の数値を小数点を使って入力して計算を実行します. 小数点を使って入力した値は自動的に有理数ではなく, 浮動小数点形式の数値として認識されますので, その数値の演算を行った結果は, 近似値が画面に表示されることになります. 28 ページを参照してください. また, 数式処理計算の有効桁数は**ツール**メニューの**計算エンジン設定**コマンドで行ないます. 数値計算の近似に関する詳細はセクション 2.3.4 (26 ページ) を参照してください.

2.6 計測単位

SI 単位系の単位や科学技術分野で今日広く利用されている計測単位を画面上で利用することができます. **SI** 単位系の単位は基本, 補足, 派生の 3 つのグループに分けることができます. 長さ, 質量, 時間, 電流, 熱力学温度, 物質量, 光度の 7 つの物理量は, 独立した計測単位です. これ以外にも一般的に利用されている計測単位が用意できます. 登録されていない単位を, 既存の単位を使って, 新たに登録することもできます.

2.6.1 単位

単位として登録されている文字列は画面上に灰色で表示されます. 単位名は数式モードで入力し, 数式オブジェクトの一部として認識されます.

► **文章に単位を入力する**

1. 単位を入力するポイントにカーソルを移動します.
2. **挿入**+ **単位名**を選択するか, 数式テンプレートバーの  をクリックします.
3. 物理量のリストから目的のカテゴリを選択します.
4. 単位名を選択し, 挿入ボタンをクリックします.

カーソルの位置に単位名が入ります. 単位名のダイアログがそのまま画面上に残ります. このダイアログを閉じる場合は右上の × をクリックします.

▶ 単位を変更する

1. 変更する単位をマウスで選択します. または, 単位名の右端にカーソルを配置します.
2. **挿入**+ **単位名**を選択します.
3. 物理量のリストから目的のカテゴリを選択します.
4. 目的の単位名を選択します.
5. 置換ボタンをクリックします.

単位名が新しく置き換わります. 単位名のダイアログがそのまま画面上に残ります. このダイアログを閉じる場合は右上の × をクリックします.
キーボードショートカットを使って直接, 単位名を入力することもできます. 下記キーボートショートカットの一般的ガイドラインは各物理量の単位を入力するための特定のキーボードショートカットの一覧です,

▶ キーボードから単位名を入力する

1. 目的の位置にカーソルを配置します.
2. 入力位置を数式モードにします.  をクリックするか, **挿入**+ **数式**, または CTRL + M とします.
3. 'u' に続けて単位をアルファベットで入力します. ただし, 次に示す例外に注意してください.
   - 単位の記号 μ の場合は, u に続けて 'mc'.
   - 'uhr' で一時間を示す h.
   - 'uda' で一日を示す d.
   - 'use' で秒を示す s.
   - 'ume' でメートルを示す m.
   - 'uan' でオングストロームを示すÅ.
   - 'uCo' でクーロンを示す C.
   - 'uTe' でテスラを示す T.
   - 'uli' でリットルを示す l.
   - 単位のオーダーを示す接頭語に続けて 'ohm' で電気抵抗 Ω.
   - '$ucel$' で摂氏を示す °C . '$ufahr$' で華氏を示す °F.
   - '$udeg$' で角度を示す °. (参照 80 ページ.)
   - '$udmn$' で角度の分を示す ′. 'uds' で角度の秒を示す ″.

単位は大文字と小文字をハッキリと使い分けています. 正しく入力するよう気をつけてください.
適切に入力すると, 認識出来しだい緑色で単位を表示します.
単位と合わせて使える接頭語の一覧を次に示します.

接頭語	単位	記号	接頭語	単位	記号
kilo	10^3	k	milli	10^{-3}	m
mega	10^6	M	micro	10^{-6}	μ (mc)
giga	10^9	G	nano	10^{-9}	n
tera	10^{12}	T	pico	10^{-12}	p
peta	10^{15}	P	femto	10^{-15}	f
exa	10^{18}	E	atto	10^{-18}	a

2.6.2 物理量と記号，およびキーボードショートカット

単位記号ダイアログに用意されている単位とキーボードショートカットの一覧を次に示します

物理量		
単位名	記号	キーボードショートカット

放射能		
ベクレル	Bq	uBq
キュリー	Ci	uCi

物質量		
アトモル	amol	$uamol$
エクサモル	Emol	$uEmol$
フェムトモル	fmol	$ufmol$
ギガモル	Gmol	$uGmol$
キロモル	kmol	$ukmol$
メガモル	Mmol	$uMmol$
マイクロモル	μmol	$umcmol$
ミリモル	mmol	$ummol$
モル	mol	$umol$
ナノモル	nmol	$unmol$
ペタモル	Pmol	$uPmol$
ピコモル	pmol	$upmol$
テラモル	Tmol	$uTmol$

面積		
エーカ	acre	$uacre$
ヘクタール	hectare	$uhectare$
平方フィート	ft^2	uft (上付き文字で)
平方インチ	in^2	uin (上付き文字で)
平方メートル	m^2	ume (上付き文字で)

電流		
アンペア	A	uA
キロアンペア	kA	ukA
マイクロアンペア	μA	$umcA$
ミリアンペア	mA	umA
ナノアンペア	nA	unA

電気容量

ファラッド	F	uF
マイクロファラッド	μF	$umcF$
ミリファラッド	mF	umF
ナノファラッド	nF	unF
ピコファラッド	pF	upF

電荷

クーロン	C	uCo

電気伝導度

キロジーメンス	kS	ukS
マイクロジーメンス	μS	$umcS$
ミリジーメンス	mS	umS
ジーメンス	S	uS

電位差

キロボルト	kV	ukV
メガボルト	MV	uMV
マイクロボルト	μV	$umcV$
ミリボルト	mV	umV
ナノボルト	nV	unV
ピコボルト	pV	upV
ボルト	V	uV

電気抵抗

ギガオーム	GΩ	$uGohm$
キロオーム	kΩ	$ukohm$
メガオーム	MΩ	$uMohm$
ミリオーム	mΩ	$umohm$
オーム	Ω	$uohm$

エネルギー

英国熱量単位	Btu	$uBtu$
カロリー	cal	$ucal$
エレクトロンボルト	eV	ueV
エルグ	erg	$uerg$
ギガエレクトロンボルト	GeV	$uGeV$
ギガジュール	GJ	uGJ
ジュール	J	uJ
キロカロリー	kcal	$ukcal$
キロジュール	kJ	ukJ
メガエレクトロンボルト	MeV	$uMeV$
メガジュール	MJ	uMJ
マイクロジュール	μJ	$umcJ$
ミリジュール	mJ	umJ
ナノジュール	nJ	unJ

力

ダイン	dyn	$udyn$
キロニュートン	kN	ukN
メガニュートン	MN	uMN
マイクロニュートン	μN	$umcN$
ミリニュートン	mN	umN
ニュートン	N	uN
オンスフォース	ozf	$uozf$
ポンドフォース	lbf	$ulbf$

周波数

エクサヘルツ	EHz	$uEHz$
ギガヘルツ	GHz	$uGHz$
ヘルツ	Hz	uHz
キロヘルツ	kHz	$ukHz$
メガヘルツ	MHz	$uMHz$
ペタヘルツ	PHz	$uPHz$
テラヘルツ	THz	$uTHz$

長さ

オングストローム	Å	uan
アトメートル	am	$uame$
センチメートル	cm	ucm
デシメートル	dm	$udme$
フェムトメートル	fm	$ufme$
フィート	ft	uft
インチ	in	uin
キロメートル	km	$ukme$
メートル	m	ume
マイクロメートル	μm	$umcme$
マイル	mi	umi
ミリメートル	mm	$umme$
ナノメートル	nm	$unme$
ピコメートル	pm	$upme$

照度

フートキャンドル	fc	ufc
ルックス	lx	ulx
フォト	phot	$uphot$

輝度

スチルブ	sb	usb

光束

ルーメン	lm	ulm

光度

カンデラ	cd	ucd

磁束

マクスウェル	Mx	uMx
マイクロウェーバー	μWb	$umcWb$
ミリウェーバー	mWb	$umWb$
ナノウェーバー	nWb	$unWb$
ウェーバー	Wb	uWb

磁気インダクタンス

ヘンリー	H	uHe
マイクロヘンリー	μH	$umcH$
ミリヘンリー	mH	umH

磁気誘導

ガウス	G	uGa
マイクロテスラ	μT	$umcT$
ミリテスラ	mT	umT
ナノテスラ	nT	unT
ピコテスラ	pT	upT
テスラ	T	uTe

質量

原子質量単位	u	uu
センチグラム	cg	ucg
デシグラム	dg	udg
グラム	g	ugr
キログラム	kg	ukg
マイクログラム	μg	$umcg$
ミリグラム	mg	umg
ポンド	lb	$ulbm$
スラッグ	slug	$uslug$

平面角

度	°	*udeg*
マイクロラジアン	μrad	*umcrad*
ミリラジアン	mrad	*umrad*
分	′	*udmn*
ラジアン	rad	*urad*
秒	″	*uds*

電力

ギガワット	GW	*uGWa*
馬力	hp	*uhp*
キロワット	kW	*ukWa*
メガワット	MW	*uMWa*
マイクロワット	μW	*umcWa*
ミリワット	mW	*umWa*
ナノワット	nW	*unWa*
ワット	W	*uWa*

圧力

気圧	atm	*uatm*
バール	bar	*ubar*
キロバール	kbar	*ukbar*
キロパスカル	kPa	*ukPa*
メガパスカル	MPa	*uMPa*
マイクロパスカル	μPa	*umcPa*
ミリバール	mbar	*umbar*
水銀計 1 ミリ (0 °C)	mmHg	*ummHg*
パスカル	Pa	*uPa*
トル	torr	*utorr*

隅角

ステラジアン	sr	*usr*

温度

摂氏	°C	*ucel*
華氏	°F	*ufahr*
ケルビン	K	*uK*

時間

アト秒	as	*uas*
日	d	*uda*
フェムト秒	fs	*ufs*
時	h	*uhr*
マイクロ秒	μs	*umcs*
ミリ秒	ms	*ums*
分	min	*umn*
ナノ秒	ns	*uns*
ピコ秒	ps	*ups*
秒	s	*use*
年	y	*uy*

体積

立方フィート	ft^3	*uft*	(上付き文字で)
立方インチ	in^3	*uin*	(上付き文字で)
立方メートル	m^3	*ume*	(上付き文字で)
ガロン (US)	gal	*ugal*	
リットル	l	*uli*	
ミリリットル	ml	*uml*	
パイント	pint	*upint*	
クォート	qt	*uqt*	

Note　物理定数はフラグメントツールバーを使って入力することも可能です.

2.6.3　混合単位

▶ **混合単位の入力**

- 混合単位は $\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}$, ft lbf, acre ft のように, 分数や積で表記します.

単位名を追加登録する場合は, **数式名**コマンドを使います. **数式名**コマンドを使って入力した単位は, 関数式で利用した場合と同様に灰色で画面上に表示されます.

► **単位名を追加する**

1. 単位を付けたい場所にカーソルを移動します.
2. **挿入**+ **数式名**を選択します.
3. 単位のボックスに追加登録する新しい単位名を入力して OK をクリックします.
4. 既存の単位を使って, 新しい単位を完成させることもできます.
5. 数式の適当な場所にカーソルがある事を確認して**関数定義**+ **新しい定義**を選択します.

► **関数定義 ＋ 新しい定義**

$\mathrm{century} = 100\,\mathrm{y}$　　$\mathrm{decade} = 10\,\mathrm{y}$

► **計算, 簡単化**

$5\,\mathrm{century} = 500\,\mathrm{y} = 15\,778\,463\,000\,\mathrm{s}$　　$\frac{1}{2}\,\mathrm{decade} = 5\,\mathrm{y} = 157784630\,\mathrm{s}$

$2\,\mathrm{century} + 1\,\mathrm{decade} = 210\,\mathrm{y} = 6626\,954\,460\,\mathrm{s}$

2.6.4　単位の付いた数値の演算

単位の付いた数値の演算も計算コマンドを使えば実行できます. 単位が異なる場合, 計算された値は同一カテゴリの基本単位で表示されます. 長さはメートル法で表記されます.

► **計算**

$6\,\mathrm{ft} + 8\,\mathrm{ft} = 14\,\mathrm{ft}$　　$6\,\mathrm{ft} \times 8\,\mathrm{ft} = 48\,\mathrm{ft}^2$

$4\,\mathrm{ft} + 16\,\mathrm{in} = 1.625\,6\,\mathrm{m}$　　$4\,\mathrm{d} + 3\,\mathrm{mi} = 345\,600\,\mathrm{s} + 4827.0\,\mathrm{m}$

$10\,\mathrm{A} \times 5\,\mathrm{T} = 50\,\mathrm{A\,T}$　　$\dfrac{10\,\mathrm{mi}}{15\,\mathrm{s}} = \frac{2}{3}\dfrac{\mathrm{mi}}{\mathrm{s}}$

2.6.5　単位の変換

求解+ **解**コマンドで単位の変換を行います.

► **単位を変換する**

- 式 $47\,\mathrm{ft} = x\,\mathrm{m}$ にカーソルを配置して求解 + 解とします.

► **求解 ＋ 解**

$7\,\mathrm{ft} = x\,\mathrm{in}$, 解: 84.0　　$7\,\mathrm{ft} = x\,\mathrm{m}$, 解: 2.134

$458.4\,{}^\circ = x\,\mathrm{rad}$, 解: $8.000\,6$　　$8\,\mathrm{rad} = x\,{}^\circ$, 解: 458.4

$1\,\mathrm{acre\,ft} = x\,\mathrm{gal}$, 解: 3.259×10^5

lbf は力の単位であり, kg は質量の単位です. したがって, “$1\,\mathrm{kg} \approx 2.2\,\mathrm{lb}$” とするためには, 重力加速度を定義する必要があります.

► **求解 ＋ 解**

$1\,\mathrm{lbf} = x\,\mathrm{lb}$, 解: $9.806\,6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$　　$47\frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{kg}} = x$, 解: 21.319

$47\,\mathrm{lb} = x\,\mathrm{kg}$, 解: 21.319　　$47\,\mathrm{lbf} = x\,\mathrm{kg}$, 解: $209.07\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

2.7　練習問題

1. 100 と 120 の間に存在する素数を求めてください.
2. 1000 と 1100 の間にあって, 最大公約数が 23 となる 2 つの整数を求めてください.
3. 式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ で $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ の場合を数値計算してください. これらの結果から, よく知られている数を予測してください.
4. 簡単な数を使って次の等式を確認してみましょう

$$
\begin{aligned}
a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\
a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c)
\end{aligned}
$$

5. 次の等式を

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ として確認してみましょう.

6. アルミニウムの重量が 403.2 lbf で密度が $168\,\frac{\mathrm{lbf}}{\mathrm{ft}^3}$ であるとき, 体積を ft^3 で求めてください.
7. 初速度 80 m / s で真上に打ち上げたロケットの t 秒後の高さは $80t - 16t^2$ m となります. 地上に落下するのは何秒後になりますか? また, 頂点へ到達するのは何秒後でしょうか?

2.8　練習問題の答え

1. 100 から 120 までの間にある奇数について**因数分解**のコマンドを実行します.

$$
\begin{array}{lllll}
101 = 101 & 103 = 103 & 105 = 3 \times 5 \times 7 & 107 = 107 & 109 = 109 \\
111 = 3 \times 37 & 113 = 113 & 115 = 5 \times 23 & 117 = 3^2 13 & 119 = 7 \times 17
\end{array}
$$

その結果, 答えは 101, 103, 107, 109, 113 となります.

2. $\frac{1000}{23} = 43\frac{11}{23}$ の展開計算を行ないます. ここで最大公約数 23 を使って $44 \cdot 23 = 1012$ であり, $45 \cdot 23 = 1035$ であることが分かります. 実際に最大公約数の関数を使って確認すると $\gcd(1012, 1035) = 23$ となります. もちろん, これ以外にも条件に適した整数が存在します.
3. 実際に計算すると

$$
\begin{array}{ll}
\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 & \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.4414 \\
\left(1+\frac{1}{8}\right)^8 = 2.5658 & \left(1+\frac{1}{16}\right)^{16} = 2.6379 \\
\left(1+\frac{1}{32}\right)^{32} = 2.677 & \left(1+\frac{1}{64}\right)^{64} = 2.6973 \\
\left(1+\frac{1}{128}\right)^{128} = 2.7077 & \left(1+\frac{1}{256}\right)^{256} = 2.713
\end{array}
$$

となり, $e = 2.7182818284590452354$ に近づくことが分かります.

4. 整数 1, 2, 3 で試してみましょう

$$
\begin{array}{lcl}
1 \wedge (2 \vee 3) = 1 & \text{かつ} & (1 \wedge 2) \vee (1 \wedge 3) = 1 \\
2 \wedge (3 \vee 1) = 2 & \text{かつ} & (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 1) = 2 \\
3 \wedge (1 \vee 2) = 2 & \text{かつ} & (3 \wedge 1) \vee (3 \wedge 2) = 2
\end{array}
$$

同様に,

$$\begin{aligned} 1 \vee (2 \wedge 3) &= 2 \qquad \text{かつ} \qquad (1 \vee 2) \wedge (1 \vee 3) = 2 \\ 2 \vee (1 \wedge 3) &= 2 \qquad \text{かつ} \qquad (2 \vee 1) \wedge (2 \vee 3) = 2 \\ 3 \vee (1 \wedge 2) &= 3 \qquad \text{かつ} \qquad (3 \vee 1) \wedge (3 \vee 2) = 3 \end{aligned}$$

この結果次の 2 つの式が正しい事が分かります.

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

5. 次のようになります.

$$\{1,3,5,7,9\} \cap (\{1,4,9,16\} \cup \{2,3,5,7,11\}) = \{1,3,5,7,9\}$$

であり,

$$(\{1,3,5,7,9\} \cap \{1,4,9,16\}) \cup (\{1,3,5,7,9\} \cap \{2,3,5,7,11\}) = \{1,3,5,7,9\}$$

6. アルミニウムの塊の体積は

$$\frac{403.2\ \ \mathrm{lbf}}{168\,\frac{\mathrm{lbf}}{\mathrm{ft}^3}} = 0.0\,6796\,\mathrm{m}^3$$

立方フィートに変換すると

$$0.0\,6796\,\mathrm{m}^3 = x\,\mathrm{ft}^3$$

よって

$$x = 2.4$$

7. 高さが $0\,\mathrm{m}$ の時に落下した事になります.

$$\left(80t - 16t^2\right)\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m}$$

これから $t = 0$ または $t = 5$ となります. ロケットは 5 秒後に落下したことが分かります. ロケットはその半分の時間で頂点に達したことになりますから, $\frac{5}{2}\,\mathrm{s} = 2.5\,\mathrm{s}$ となります. 頂点の高さは $80\,(2.5) - 16\,(2.5)^2 = 100.0\,\mathrm{m}$ となります.

第 3 章

代数

代数式は数式演算の代表的なものです．代数式は変数や定数を単独に，または，加減乗除や指数，ルートなどによって組合せた式で構成されます．その中でも加算，減算，乗算によって構成される簡単な代数式を多項式と呼びます．変数 x による n 次元の多項式は次のように表記します．

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ここで $a_0, a_1, \ldots, a_n$ は係数で $a_n \neq 0$ とします．

3.1　多項式と有理式

多項式に対して実行できる演算について紹介します．一般的な操作方法は次の通りです．

▶ **多項式に対する演算**

1. 数式モードで多項式を入力し，数式中にカーソルを配置します．
1. **数式処理**メニューから目的のコマンドを選択します．

計算，**簡単化**，**因数分解**，**展開**，**結合**サブメニューの**累乗**，**多項式**サブメニューの**除算**，**部分分数**，**複素数解**，**並べ替え**などのコマンドを利用できます．

3.1.1　多項式の加減乗除

▶ **項の整理，多項式の加算，減算，そして商の有理化は次のように行ないます．**

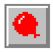
1. 数式モードで多項式を入力し，数式中にカーソルを配置します．
2. 数式処理ツールバーの計算ボタン  をクリックするか、**計算**コマンドを選択するか、キーボードの CTRL ＋ E を押します．

▶ **計算**

$\left(3x^2+3x\right)+\left(8x^2+7\right) = 11x^2+3x+7$

$\left(3x^2+3x\right)/\left(8x^2+7\right) = \dfrac{1}{8x^2+7}\left(3x^2+3x\right)$　　$x \div y = \dfrac{x}{y}$

計算コマンド以外（簡単化など）にも結果として同じ演算を行なうコマンドがあります.

多項式の積を展開する場合は, 式にカーソルを配置して**展開**コマンドを選択します. または  をクリックします.

▶ **展開**

$\left(3x^2+3x-1\right)\left(8x^2+7\right)=21x+13x^2+24x^3+24x^4-7$

次のように expand 関数を使って計算することもできます.

▶ **計算**

$\operatorname{expand}\left(\left(3x^2+3x-1\right)\left(8x^2+7\right)\right)=21x+13x^2+24x^3+24x^4-7$

数式モードで関数名 $xpnd$ を入力します. 入力した数式モードの文字は自動置換により灰色で expand と表示されます.

自動置換される数式モードの文字は**ツール**+ **自動置換**のダイアログで確認できます.

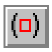
一般的な円の方程式は平方和として与えられます. 部分計算 (参照 12 ページ) の機能は多項式の演算に便利です.

Example 3 円を表す式 $x^2-6x+18+y^2+10y=0$ から中心と半径を求めてください. 両辺から定数項 18 を引きます.

$$x^2-6x+18+y^2+10y-18=0-18$$

左辺を選択し, CTRL キーを押しながら**簡単化**を選択します. 右辺についても同じ操作を行ないます.

$$x^2-6x+y^2+10y=-18$$

x の項を選択し,  をクリックします. 同じことを y の項についても行ないます.

$$\left(x^2-6x\right)+\left(y^2+10y\right)=-18.$$

x の係数の二分の一に相当する数の二乗を両辺に足します. 同じことを y についても行ないます.

$$\left(x^2-6x+\left(\frac{-6}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+10y+\left(\frac{10}{2}\right)^2\right)=-18+\left(\frac{-6}{2}\right)^2+\left(\frac{10}{2}\right)^2$$

項 $\left(x^2-6x+\left(\frac{-6}{2}\right)^2\right)$ を選択します. CTRL キーを押した状態で**因数分解**を選択します. 同じことを y についても行ないます.

$$(x-3)^2+(y+5)^2=-18+\left(\frac{-6}{2}\right)^2+\left(\frac{10}{2}\right)^2$$

方程式の右辺を選択し, CTRL キーを押した状態で**簡単化**を選択します.

$$(x-3)^2+(y+5)^2=16$$

標準的な円の式に変形できました. 円の中心は $(3,-5)$ で, 半径は $\sqrt{16}=4$ です.

3.1.2　総和記号

多項式の一般形は総和記号を使って次のように記述できます.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

► **総和記号の右辺に多項式を入力する**

1. アイコン  をクリックします. または**挿入**+ **オペレータ**としてパネルから  を選択します.
2. オペレータ $\sum$ の右側にカーソルを配置して  をクリックします. または, **挿入**+ **下付き文字**とします.
3. 入力ボックスに $k = 0$ を入力します.
4. TAB キー, または, スペースバーを押し,  をクリックします. または, **挿入**+ **下付き文字**としてます.
5. 入力ボックスに n を入力します.
6. スペースバーか, または右矢印キーを押して通常の入力位置に戻り $a_k x^k$ と入力します.

► **計算**

$\sum_{k=0}^{5} a_k x^k = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

3.1.3　有理式の和と差

書換え + **標準形式**を選択すると展開された分子と最大公約数が 1 である分母を持つ有理式を返します.

► **有理式の和または差と公分母の組合せを求める**

1. 数式モードで有理式を入力し, 数式にカーソルを配置します.
1. **因数分解**コマンドを選択し, **書換え**+ **有理式**コマンドを選択します.

► **書換え** + **標準形式**

$\frac{3x^2+3x}{8x^2+7} + \frac{5x^2+3}{2x^2+x+7} = \frac{1}{16x^4+8x^3+70x^2+7x+49}\left(46x^4 + 9x^3 + 83x^2 + 21x + 21\right)$

► **因数分解**

$\frac{3x^2+3x}{8x^2+7} + \frac{5x^2+3}{2x^2+x+7} = \frac{21x+83x^2+9x^3+46x^4+21}{(x+2x^2+7)(8x^2+7)}$

► **有理式公分母を求める**

1. 数式モードで有理式を入力し, 数式にカーソルを配置します.
2. **書換え**+ **有理化**コマンドを選択します.
   または

簡単化コマンドかアイコン  をクリックします．または**因数分解**コマンドを選択します．

▶ **書換え ＋ 標準形式**

$\left(8x^2+7\right)^{-1}\left(x+2x^2+7\right)^{-1}\left(4x^3-5\right)\left(x^2+x\right)=-\frac{-4x^5-4x^4+5x^2+5x}{16x^4+8x^3+70x^2+7x+49}$

▶ **書換え ＋ 有理式**

$$\left(8x^2+7\right)^{-1}\left(x+2x^2+7\right)^{-1}\left(4x^3-5\right)=\frac{4x^3-5}{\left(8x^2+7\right)\left(x+2x^2+7\right)}$$

3.1.4　部分分数

部分分数コマンドは**多項式**と**微積分**のサブメニューにそれぞれ用意されています．このコマンドを利用すると有理式を簡単な分数の和として表現できます．つまり, 前節で行った操作と逆の処理を行う訳です．

部分分数コマンドは有理式を分数和に変形します．変換された各分数の分母はそれ以上分割できない形で表現されます．つまり, 各分数の分母の解や係数が無理数になってしまうところまで, 分割を行います．

結果として分子は定数か, または, 1 次式になります．部分分数の一般的な形を次に示します．

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{または} \quad \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^m}$$

数式に複数の変数が存在する場合, ダイアログで目的の変数を入力します．その他の変数は定数として処理されます．

▶ **有理式を部分分数和に書き換える**

1. 数式モードで有理式を入力します．
2. カーソルを式に配置します．
3. **多項式**サブメニュー（または**微積分**サブニュー）から**部分分数**を選択します．
1. 多項式変数ダイアログボックスが表示されたら, 変数を指定します．

▶ **多項式 ＋ 部分分数**

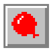
$\frac{36}{(x-2)(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{4}{x-2}-\frac{9}{(x-1)^2}-\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{4}{x+1}$

$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}=\frac{\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}{(x^2+1)^2}-\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{(x^2+1)^3}+\frac{\frac{15}{8}x-\frac{1}{8}}{x^2+1}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x}$

(変数: y) $\frac{y}{(x-y)^2(x+1)}=\frac{x}{(x-y)^2(x+1)}-\frac{1}{(x-y)(x+1)}$

部分分数では, 小数点や浮動小数点形式の数値は利用できません．係数は必ず整数や, 整数の分数で入力してください．小数点形式の数値を分数に変換する場合は**書換え**+ **有理化**コマンドを利用します．詳細は 24 ページを参照してください．

3.1.5　多項式の積と累乗

多項式の積や累乗計算を求める場合は**展開**コマンド (または  をクリック) を利用します.

▶ **展開**
$\left(3x^2+3x\right)\left(8x^2+7\right)=24x^4+24x^3+21x^2+21x$
数式モードで関数名 $xpnd$ を入力します. 最後の文字を入力すると関数 expand が表示されます. 次の例に示すように多項式をカッコ内に入力して計算コマンドを実行します.

▶ **計算**
$\operatorname{expand}\left(\left(3x^2+3x\right)\left(8x^2+7\right)\right)=24x^4+24x^3+21x^2+21x$

3.1.6　多項式の除算

多項式の商を $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ から $q(x)+\dfrac{r(x)}{g(x)}$ の形に変形することができます. ここで $r(x)$ と $q(x)$ は多項式で $\deg r(x)<\deg g(x)$ とします.

▶ **多項式の除算**

1. 多項式の商を入力します.
2. カーソルを式に配置します.
3. **多項式**サブメニューから, **除算**を選択します.

▶ **多項式 ＋ 除算**
$\frac{3x^5+3x^3-4x^2+5}{8x^2+7}=\frac{3}{64}x-\frac{\frac{21}{64}x-\frac{17}{2}}{8x^2+7}+\frac{3}{8}x^3-\frac{1}{2}$

Note　このアルゴリズムは一般的に多項式の長除として知られています.

3.1.7　項の整理と並べ替え

同次数の項の演算を行ない, 並べ替える場合は**多項式**メニューの**並べ替え**コマンドを選択します. 同次数の項の演算だけを行なう場合は, **多項式**メニューの**項の整理**を選択します. 変数が複数ある場合は, 基準となる変数をコマンド選択後に表示されるダイアログに入力します.

▶ **多項式 ＋ 並べ替え**
$x^2+3x+5-3x^3+5x^2+4x^3+13+2x^4=2x^4+x^3+6x^2+3x+18$
$5t^2+3xt^2-16t^5+y^3-2xt^2+9=t^2x+5t^2-16t^5+y^3+9$ (変数: x)
$5t^2+3xt^2-16t^5+y^3-2xt^2+9=-16t^5+xt^2+5t^2+y^3+9$ (変数: t)

▶ **多項式 ＋ 項の整理**
$5t^2+3xt^2-16t^5+y^3-2xt^2+9=t^2x+\left(5t^2-16t^5+y^3+9\right)$ (変数: x)
$5t^2+3xt^2-16t^5+y^3-2xt^2+9=(x+5)\,t^2-16t^5+\left(y^3+9\right)$ (変数: t)

多項式の内容によって両方のコマンドを順番に実行することもあります.

▶ **多項式 + 項の整理, 多項式 + 並べ替え**

$x^3b+e+x^2c+x^2+x^4k+x-x^3d+a = kx^4+(b-d)x^3+(c+1)x^2+x+(a+e) = kx^4+(b-d)x^3+(c+1)x^2+x+(a+e)$

(変数は x)

▶ **多項式 + 項の整理, 多項式 + 並べ替え**

$x^3b+e+x^2c+x^2+x^4k+x-x^3d+a = kx^4+x^3(b-d)+x^2(c+1)+x+a+e = kx^4+(b-d)x^3+(c+1)x^2+x+(a+e)$

3.1.8 多項式の因数分解

多項式の因数分解は重要な演算機能の一つです. **数式処理**メニューに用意されている因数分解の機能は非常に強力で, しかも便利です. 多項式を整数や有理数の解をもつ式に因数分解します. また, 展開した多項式の係数を使って因数分解することも可能です.

対象となる多項式に小数点形式の数値が存在すると因数分解は行なえません. 実際, 1.5 という数値は浮動小数点形式の値として解釈されますので, 因数分解は実行されません. このような場合は, 一度, **書換え**+ **有理化**のコマンドを使って,$1.5 = \frac{15}{10}$ のように変形してから**因数分解**のコマンドを実行します.

▶ **因数分解**

$5x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+5 = 5(x-1)^2(x+1)^3$

$\frac{1}{16}x^2-\frac{7}{5}x+\frac{1}{6}ix-\frac{56}{15}i = \frac{1}{16}\left(x+\frac{8}{3}i\right)\left(x-\frac{112}{5}\right)$

$120x^3+20\left(-3+2\sqrt{3}\right)x^2-\frac{5}{2}\left(8\sqrt{3}-3\right)x+\frac{5}{2}\sqrt{3} = 120\left(x+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$

因数分解の結果, 各項には整数係数が付くように処理されます. 因数分解された多項式の解は上の例からも分かるように, 係数と大きく関係しています. 技術的な言い方をすれば, 係数によって表現される空間上に多項式は因数分解される訳です. すべての係数が有理数の時, 多項式は有理解を使って因数分解されます.

解を後から容易に見つけることのできる場合は, 次の例のように適当な値を掛けることで, 因数分解を実行することもできます.

▶ **因数分解**

$5x^2+x+3 = x+5x^2+3$

$i\sqrt{59}\left(5x^2+x+3\right) = \left(5i\sqrt{59}\right)\left(x-\frac{1}{10}i\sqrt{59}+\frac{1}{10}\right)\left(x+\frac{1}{10}i\sqrt{59}+\frac{1}{10}\right)$

因数分解のコマンドの代わりに数式モードで関数 factor を入力して, カッコ内に多項式を入力し、**計算**コマンドを実行する方法もあります.　コマンド expand は、数式モードで xpnd と入力します.

▶ **計算**

$\text{factor}\left(5x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+5\right) = 5(x-1)^2(x+1)^3$

$\text{expand}\left(5(x-1)^2(x+1)^3\right) = 5x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+5$

2 乗の差の因数分解はもちろん, 3 乗の和と差, さらに同じ指数を持つ 2 変数の差の因数分解も可能です.

▶ **因数分解**

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ $\qquad x^3 - y^3 = (x-y)\left(xy + x^2 + y^2\right)$

$x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)\left(x^2 + y^2\right)$

同じ奇数乗の数の和と差の式について因数分解することができます.

▶ **因数分解**

$x^3 + y^3 = (x+y)\left(-xy + x^2 + y^2\right)$

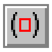
$x^5 + y^5 = (x+y)\left(-xy^3 - x^3y + x^2y^2 + x^4 + y^4\right)$

$x^7 + y^7 = (x+y)\left(-xy^5 - x^5y + x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2 + x^6 + y^6\right)$

3.1.9　2 つの多項式の最大公約数

2 つの整数に対する最大公約数 (参照 21 ページ) を求める方法と同じ方法で 2 つの多項式の最大公約数を求めることができます.

▶ **2 つ以上の多項式の最大公約数を求める**

1. 数式モードで *gcd* と入力するか, または数式名のダイアログから選択します.
2. アイコン  をクリックし, 数式モードで多項式を入力します. この時, 多項式はコンマで区切ります.

▶ **計算**

$\gcd(5x^2 - 5x, 10x - 10) = 5x - 5$

$\gcd\left(x^2 + 3x + yx + 3y,\ x^2 - 4yx - 5y^2, 3x^2 + 2yx - y^2\right) = x + y$

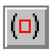
計算結果を確認する場合は, 元の多項式を因数分解します.

▶ **因数分解**

$x^2 - 4yx - 5y^2 = (x-5y)(x+y)$ $\qquad 3x^2 + 2yx - y^2 = (3x-y)(x+y)$

多項式の最小公倍数 (参照 21 ページ) を求めることもできます.

▶ **2 つ以上の多項式の最小公倍数を求める**

1. 数式モードで *lcm* と入力します (灰色に変わります).
2. アイコン  をクリックするか, または挿入 + カッコとして目的の記号を選択します. または CTRL + 9 を押します.
3. 入力ボックスに多項式を入力します. 多項式の間はコンマで区切ります.
4. **計算**コマンドを選択します.

▶ **計算**

$\operatorname{lcm}(yx + 3x - 5y - 15, xz - 53x - 5z + 265) = 265y - 159x - 15z - 53xy + 3xz - 5yz + xyz +$

795
多項式の関係を明確にするために因数分解を行います.

▶ **因数分解**

$yx+3x-5y-15=(y+3)(x-5)$　　$xz-53x-5z+265=(z-53)(x-5)$

$265y-159x-15z-53xy+3xz-5yz+xyz+795=(z-53)(y+3)(x-5)$

3.1.10　多項式の解

変数にある値を代入したとき, 多項式の値がゼロになったとすれば, その値を多項式の解と呼ぶことができます. つまり, 多項式 $p(x)$ の解は, 方程式 $p(x)=0$ の解となります. 例えば, 1 は, x^2-1 の解です. 多項式が $x-r$ の累乗で表示できる場合, r を多項式の解と呼びます.

▶ **多項式の複素数解を求める**

1. 多項式を入力し, カーソルを配置します.
2. **多項式**サブメニューから**複素数解**を選択します.

▶ **多項式 + 複素数解**

$5x^2+2x-3$, roots: $\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$　　x^2+1, roots: $\begin{bmatrix} -i \\ i \end{bmatrix}$

$x^3-\frac{13}{5}ix^2-8x^2+\frac{29}{5}ix+\frac{81}{5}x+6i-\frac{18}{5}$, roots: $\begin{bmatrix} 3 \\ 5+3i \\ -\frac{2}{5}i \end{bmatrix}$

書換え + 直交座標コマンドを使って, これらの複素式を簡単化することができます.

▶ **書換え + 直交座標**

$\left(\frac{5}{2}+\frac{13}{10}i\right)-\frac{1}{10}\sqrt{(336+850i)}=\frac{2}{5}i(-1)$

$\frac{1}{10}\sqrt{(336+850i)}+\left(\frac{5}{2}+\frac{13}{10}i\right)=5+3i$

設定を変更して, 実数解のみを計算できます.

▶ **多項式の実数解を求める**

1. 数式モードで assume(real) と入力します.
2. マウスカーソルを assume (real) に置き, 計算コマンドを選択します.
3. マウスカーソルを多項式に置きます.
4. **多項式**サブメニューから**複素数解**を選択します.

▶ **計算**

$\operatorname{assume}(\mathrm{real})=\mathbb{R}$

▶ **多項式 + 複素数解**

$x^3-\frac{13}{5}ix^2-8x^2+\frac{29}{5}ix+\frac{81}{5}x+6i-\frac{18}{5}$, roots: 3

$5x^2 + x + 3$, roots: $\emptyset$
シンボル $\emptyset$ は, 空集合を表します．この場合, 実数解が無いことを意味します.

▶ **デフォルトモードに戻す**

- unassume または assume (complex) で, 計算コマンドを選択します.

多項式の次数が解の数（複素数解や重解を含む）を示していることは代数の基本定理として, 良く知られています.
有理数（実数や複素数）を係数に持つ 4 次までの多項式に対して, 数式処理システムは機械的な公式を使って解を求めます. 5 次以上の多項式については, その解を求める一般化された方法がありません. しかし, 浮動小数点形式の係数で表示される多項式ならば, その次数に関係無く数値解を求めることができます.

2 次多項式
$ax^2 + bx + c$ の解を求めるための, 二次方程式の根を解く公式を求めることができます. すべての場合が考慮されます. 論理記号 $\wedge$ は"かつ"を示しますので, $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$ は, すべての係数 a, b, c が 0(ゼロ) であることを表します．シンボル $\mathbb{C}$ は, 複素数すべての集合を表します. シンボル $\emptyset$ は, 空集合を表します．この場合, 解がないことを意味します.

▶ **多項式 + 複素数解**
$ax^2 + bx + c$, (変数は x)

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \text{if} \quad a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0 \\ \emptyset & \text{if} \quad c \neq 0 \wedge a = 0 \wedge b = 0 \\ \left\{-\frac{1}{b}c\right\} & \text{if} \quad b \neq 0 \wedge a = 0 \\ \left\{-\frac{1}{2a}\left(b - \sqrt{-4ac + b^2}\right), -\frac{1}{2a}\left(b + \sqrt{-4ac + b^2}\right)\right\} & \text{if} \quad a \neq 0 \end{cases}$$

3 次, 4 次の多項式
3 次や 4 次の多項式の解はルート記号が複数入って複雑な式になります. これを簡略化する場合は無理数を近似します. 実際には係数の内, ある一つを小数点形式で記述すれば自動的に近似解が得られます. または, ルート記号で表された式に対して数値計算コマンドを実行します. 次にルート記号で表したものと, 数値解の例を示します (表示桁数は 6 に設定されています) .

▶ **多項式 + 複素数解**
$x^3 + 3x + 1$, 解:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}\right)$$

► **多項式 + 複素数解**

$$x^3+3x+1.0,\ \text{解:}\ \begin{array}{c} -0.322\,19 \\ 0.161\,09-1.754\,4i \\ 0.161\,09+1.754\,4i \end{array}$$

多項式 x^3+3x+1 の x に対する解を代入すると, 0(ゼロ) になります. これを計算するのは骨の折れることですが, 簡単化することで, 次の結果が得られます.

► **簡単化**

$$\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}\right)\right)^3+$$
$$3\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}\right)\right)+1=0$$

近似解を使って計算を行なうと, 必ずしもゼロになるとは限りません. したがって, 解の近似値を求める前に数値の表示桁数を増やして, より誤差の少ない近似解を求めてください (参照 29 ページ).

► **計算**

$$(-0.322185)^3+3\,(-0.322185)+1.0=\ 1.174312318\times10^{-6}$$

$$(-0.32218535462608559291)^3+3\,(-0.32218535462608559291)+1$$
$$=\ 4.870126439\times10^{-21}$$

► **多項式 + 複素数解**

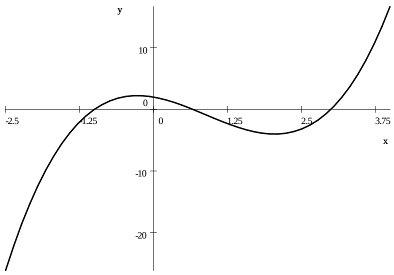
$$x^4+3x^3-2x^2+x+1.0,\ \text{解:}\ \begin{array}{c} -0.428\,98 \\ -3.\,609\,6 \\ 0.519\,28+0.613\,32i \\ 0.519\,28-0.613\,32i \end{array}$$

$$x^4-7x^3+2x^2+64x-96,\ \text{解:}\ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

例多項式を因数分解します.

$$x^3-\frac{8}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=\frac{1}{3}\,(x-3)\,(3x-2)\,(x+1)$$

これから 3, $\frac{2}{3}$, -1 が多項式の解であることが分かります. これは式 $y=x^3-\frac{8}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2$ が x 軸と交わる交点の x 座標を表しています. 次のグラフは多項式をグラフ化したものです. 数式のグラフ化に関する詳細は第 6 章を参照してください.



複素多項式を因数分解します.

$$x^3 - \frac{13}{5}ix^2 - 8x^2 + \frac{29}{5}ix + \frac{81}{5}x + 6i - \frac{18}{5} = (x-3)\left(x+\tfrac{2}{5}i\right)(x-(5+3i))$$

多項式の解は $3, -\frac{2}{5}i, 5+3i$ です.

5 次以上の多項式

5 次以上の多項式については常に近似値が算出されます. 解の表示桁数は数式処理設定や計算エンジン設定コマンドで行ないます (参照 29 ページ).

▶　**多項式 ＋ 複素数解**

$$5x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 5,\ \text{解:}\quad \begin{array}{r} 1.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \end{array}$$

$$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ \text{解:}\quad \begin{array}{c} -0.939\,69 - 0.342\,02i \\ -0.939\,69 + 0.342\,02i \\ 0.173\,65 + 0.984\,81i \\ 0.173\,65 - 0.984\,81i \\ -0.5 + 0.866\,03i \\ -0.5 - 0.866\,03i \\ 0.766\,04 - 0.642\,79i \\ 0.766\,04 + 0.642\,79i \end{array}$$

3.2　変数と関数を定義する

記号を使って数式オブジェクトを定義したり, 既存の数式を組合せて新たな関数を定義する場合は関数の定義コマンドを利用します. **関数定義**サブメニューにある**新しい定義**, **定義の削除**, **定義の一覧**, **全定義の削除**コマンドについて解説します. 関数定義の詳細については第 5 章, 97 ページを参照してください. 微積分, ベクトル, 行列における利用例について各ページで解説されています.

3.2.1　変数に値を代入する

変数に値を代入する場合には**関数の定義** コマンドを利用します.

▶ **z に 5 を代入する**

1. 数式モードで $z = 5$ と記述し, カーソルを数式内に配置します.
2. 数式処理ツールバーの  をクリックします. または, **関数定義** + **新しい定義**を選ぶか, CTRL + = キーを押します.

これにより, 関数の定義を削除する (参照 62 ページ) までの間, z は 5 として解釈されます. つまり, $3+z$ の計算結果は 8 になります. 文書を閉じたり, 開いたりした時の, 定義した変数の動作に関する詳細は 108 ページを参照してください.
変数は通常 1 文字で表されます (参照 97 ページ). 変数には数値以外にも色々な値を代入できます. その例を次に示します.

- 数値: $a = 245$
- 多項式: $p = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$
- 多項式の商: $b = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
- 行列: $z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ここで記号 p は数式 $x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ と定義されています. しかし, これは関数ではありません. つまり, $p(2)$ は $x = 2$ の時の値を示すものではありません. 実際, $p(2)$ は積 $2p = 2x^3 + 6x^2 - 10x + 2$ と解釈されます.

3.2.2　1 変数の関数を定義する

関数の定義は, 次の方法で行います. 関数の後に変数をカッコ付きで書き, 等号とその右辺に数式を記述します.

▶ **関数名を f とし, x における値を $ax^2 + bx + c$ とします.**

1. 数式入力モードで, 式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を記述します.
2. カーソルを式に配置します.
3. 数式処理ツールバーの新しい定義のボタン  をクリックします. または, **関数定義**サブメニューから**新しい定義**を選択します. または, CTRL + = とします.

よって関数の定義を削除するまで記号 f は関数として利用できます. 例えば, $f(t)$ に計算コマンドを実行すると $f(t) = at^2 + bt + c$ となります.

Note　関数 $f(y) = ay^2 + by + c$ と $f(x) = ax^2 + bx + c$ を定義することはまったく同じことです. 変数にどんなアルファベットを使っても機能的には同じです. しかし, 見かけ上は異な

る式を定義することができます.

例えば, 2 つの式 $y = x^2 + \sqrt{x}$ と $y = t^2 + \sqrt{t}$ は y を表すための表現が x と t で異なっていますから, 式としては別の存在なります. しかし, 実質的には $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ と $f(t) = t^2 + \sqrt{t}$ で計算結果は同じになります.
いま, g と h が既に定義されている関数であるとすれば, 次ように別の関数を作成することが可能です.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2g(x) \\
f(x) &= g(x) + h(x) \\
f(x) &= g(x)h(x) \\
f(x) &= g(h(x))
\end{aligned}
$$

g と h を定義して, さらに上記のように入力した各 $f(x)$ に対して**計算**コマンドを実行します. **計算**コマンドを f に対して実行するたびに, 既存の定義に新しい定義が上書きされます. 例えば, 一度定義した $f(x) = 2g(x)$ に対して $g(x)$ の定義を変更すると, 結果として $f(x)$ の定義も更新されることになります.

Note 代数式には, $f \pm g$, $f \circ g$, fg, f^{-1} のようなオブジェクトも含まれます. x での $f + g$ の値は, $f(x) + g(x)$ と書きます. 定義した 2 つの関数式 f および g の合成関数は, $f(g(x))$ または $(f \circ g)(x)$ と書きます. 定義した 2 つの関数の積は, $f(x)g(x)$ と書きます. **求解**+ **解**を選択して, 関数式 $f(y) = x$ で, 変数として y を与えるような $f(x)$ の逆関数を求めることができます.

Example 4 $f(x) = x^2 + 3x + 5$ および $g(x) = x^3 - 1$ を定義して, 計算する

$$
\begin{aligned}
f(3) &= 23 \\
g(3) &= 26 \\
f(g(3)) &= 759 \\
g(f(3)) &= 12166 \\
f(4 + 5i) &= 8 + 55i \\
f\left(f\left(f\left(4 + 5i\right)\right)\right) &= 7495808 - 6124745i
\end{aligned}
$$

関数 $y = f(x)$ の逆関数を求めることができます. 変数 x と y を入れ替えて y について求解の計算を行ないます.

► **関数 $f(x) = 5x - 3$ の逆関数を求める**

1. 関数 $f(y)$ を $f(y) = 5y - 3$ と入力して**計算**コマンドを実行します.
2. 関数 $5y - 3 = x$ に対して y を独立変数して**求解**+ **解**コマンドを実行します.

計算結果は $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ となります. よって次の式が得られます.

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$

次のようにして, この答えの検算を行ないます. 関数 $f(x) = 5x - 3$ と $g(x) = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ を定義します (関数名に f^{-1} を使うと, 上手く機能しません). ここで関数 $f(g(x))$ と $g(f(x))$ に**計算**コマンドを実行します. その結果, $f(g(x)) = x$ であり, また, $g(f(x)) = x$ となります. 関数 g が f の逆関数であることが分かります.

3.2.3　複数変数を持つ関数を定義する

▶ **複数の変数を持つ関数を定義する**

1. 例として関数 $f(x, y, z) = ax + y^2 + 2z$ または $g(x, y) = 2x + \sin 3xy$ を入力します.
2. 数式にカーソルを配置します.
3. 数式処理ツールバーから新しい定義ボタン  をクリックするか, または, **関数定義**サブメニューから**新しい定義**コマンドを選択します.

変数が 1 つの場合, 数式処理システムは関数に**計算**コマンドを実行した結果を, 新しい関数の定義として認識します.

3.2.4　定義の表示と削除

自分で定義した関数や数式の情報を保存したり, 削除する方法について解説します.

▶ **定義した変数や関数を一覧表示する**

- 数式処理ツールバーの定義の表示ボタン  をクリックするか, または**関数定義**サブメニューから**定義の表示**を選択します.

画面上に定義が表示されます. 変数と関数は定義した順番にしたがって, 一覧表示されます.

▶ **文書から定義を削除する**

1. 削除する数式にカーソルを配置するか, または関数名や式を選択します.
2. **関数定義**サブメニューから**定義の削除**を選択します.

関数定義サブメニューから**定義の表示**を選択します. 削除した関数または数式がダイアログに表示されないことを確認します.

▶ **文書のすべての定義を削除する**

- **関数定義**サブメニューから, **全定義の削除**を選択します.

既存の定義関数は文書が開いている間, アクティブな状態になっています. デフォルトでは, 定義した関数は文書内に保存され, その文書を開いたときに, メモリに読み込まれます. この設定を変更して関数定義の情報を削除することも可能です. 関数定義の保存, 読み込み, 全定義の削除などに関する詳細は 108 ページを参照してください.
関数式をどんな名前で定義しても, それを忘れてしまうことがあります. 例えば関数 $a = x^2$ を既

に定義していることを忘れ, $f(a)$ の演算を行なったと考えましょう．関数 f が単純な式ならばすぐに間違いに気づくかもしれませんが, これが複雑な式であると, 間違いを発見するのは容易ではありません.

Tip　時間がある場合は, たまに**定義の表示**コマンドを使って定義を確認しましょう．計算結果が予測と大きく異なる場合は定義を調べることも重要です.

3.3　多項式を解く

求解コマンドには**解**, **整数解**, **数値解**, **漸化式**の 4 つのオプションがあります．これらの中でも, **解**コマンドは一般的に利用されるコマンドです．代数式の場合は記号で解を求め, 係数が数値の時は解を数値形式で出力します．また, 数式にひとつでも小数点形式の数値が含まれている場合, 自動的に数値解を求めます．これ以外の 3 つのオプションは以下の項目で説明します.

3.3.1　1 変数の方程式を解く

▶ **1 変数の方程式を解く**

1. カーソルを方程式に配置します.
2. **求解**サブメニューから**解**を選択 (または  **をクリック) します**.

方程式の解が表示されます.
次の例で示すように整数や有理数を係数とする方程式では代数形式の解が得られ, 実数 (小数点形式) を係数とする場合は近似解が計算されます．これは複素数解を持つ場合でも同じです.

▶ **求解 + 解**
$5x^2 + 3x = 1$, 解: $\frac{1}{10}\sqrt{29} - \frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{29} - \frac{3}{10}$

$5x^2 + 3x = 1.0$, 解: $0.238\,52, -0.838\,52$

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$, 解: $i, -i, 3$
重解が存在する場合, 単純に解を表示するだけで重解であることには触れません.

▶ **求解 + 解**
$(x-5)^3(x+1) = 0$, 解: $5, -1$
有理式の解を求めることもできます.

▶ **求解 + 解**
$\dfrac{14}{a+2} - \dfrac{1}{a-4} = 1$, 解: $5, 10$
$|3x-2| = 5$, 解: $\left\{\frac{5}{3}e^{2i\pi X_1} + \frac{2}{3} \mid X_1 \in [0,1]\right\}$
実数解を求めるには, 最初に関数 assume (real) を入力します．数式モードでこれを入力すると, 自動的に灰色になります．挿入 + 数式を使って, assume (real) と入力しても同じです．(assume 関数についての詳細は, 254 ページをご覧下さい.)

▶ **計算**
$\mathrm{assume}\,(\mathrm{real}) = \mathbb{R}$

▶ **求解 + 解**
$x = i$, 解なし
$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$, 解: 3
$|3x - 2| = 5$, 解: $-1, \frac{7}{3}$
5 次以上の方程式については一般的な解の公式はありません. 従って, そのような場合は陰関数を使って解の存在を示すにとどめます. ただし, 3 次式や 4 次式の多項式でも時として解が大変複雑な形になる場合があります. プレビュー, 印刷, 保存などのことを考えて, 複雑な数式ではなく, それらを陰関数で表示させるよう設定を変更することもできます.

▶ **保存オプションの変更**

1. **ツール** + **計算エンジン設定**を選択します.
2. 一般タブで最大次数を 1, 2, 3 または 4 に設定します.

次数を 1 とすると, 有理数や簡単な解しか計算されません. 2 次や 3 次に設定すると, 3 次以上の多項式については陰関数で解の存在のみ示します.

▶ **求解 + 解 (最大次数を 1 に設定)**
$5x^2 + 3x = 1$, 解: ρ_1 ここで $\mathbb{C} \cap \rho_1$ は次式の解 $\frac{3}{5}\hat{Z} + \hat{Z}^2 - \frac{1}{5}$
$x^4 + x = 0$ 解: $\{-1, 0\} \cup \rho_1$ ここで ρ_1 は次式の解 $-\hat{Z} + \hat{Z}^2 + 1$

▶ **求解 + 解 (最大次数を 2 または 3 に設定)**
$5x^2 + 3x = 1$, 解: $\frac{1}{10}\sqrt{29} - \frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{29} - \frac{3}{10}$
$x^4 + x = 0$, 解: $\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -1, 0$
$x^4 + x - 1 = 0$, 解: ρ_1 ここで ρ_1 は次式の解 $\hat{Z} + \hat{Z}^4 - 1$

▶ **求解 + 解 (最大次数を 4 に設定)**
$x^4 + x$, 解: $\frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -1, 0$
$x^4 + x - 1 = 0$, 解: [この解は確かに存在しますが, 印刷するにはあまりにも大きすぎるので省略します.]
関数 solve は数式を引数とします. 関数 solve を付けて関数を入力し, **計算**コマンドを実行すると次の例のように解を求められます. 数式モードで "$solve$" を入力すると自動的に灰色で表示されます. これが灰色で表示されない時は, **挿入**+ **数式名**コマンドを利用して, 改めて数式名を作成します.

▶ **計算**
$\mathrm{solve}\,\mathrm{solve}\left(5x^2 + 3x = 1\right) = \left\{\left[x = -\frac{1}{10}\sqrt{29} - \frac{3}{10}\right], \left[x = \frac{1}{10}\sqrt{29} - \frac{3}{10}\right]\right\}$

答えを確認する

関数定義の項目で解説した方法で答えを確認できます (59 ページ参照). このサンプルを操作し終わったら, **関数定義** + **全定義の削除**を選びます.

Example 5 前出の例で求めた答えを確認します.

- 変数 a を $a=5$ と定義し, 式 $\dfrac{14}{a+2}-\dfrac{1}{a-4}$ を計算すると $\dfrac{14}{a+2}-\dfrac{1}{a-4}=1.$
- 変数 x を $x=0.238\,52$ と定義すると, $5x^2+3x=1.0$. 変数 x を $x=-0.838\,52$ と定義すると $5x^2+3x=1.0$ が得られます.
- 変数 x を $x=-\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\sqrt{29}$ と定義して, **計算**コマンドと**簡単化**を実行すると次のようになります.

$$5x^2+3x=5\left(\frac{1}{10}\sqrt{29}-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{3}{10}\sqrt{29}-\frac{9}{10}=1$$

3.3.2　複数の変数を持つ方程式

複数の変数を持つ方程式で**求解**+ **解**コマンドを実行するか, または  をクリックします. 変数を指定するダイアログが自動的に表示されますので, 目的の変数を入力します.

▶ **求解 + 解**

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ (x を入力), 解 : $\begin{cases} \text{判定不可} & \text{if} \quad y=1 \\ \left\{-\frac{1}{\frac{1}{y}-1}\right\} & \text{if} \quad y\neq 1 \end{cases}$

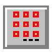
$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=1$ (z を入力), 解 : $\begin{cases} \text{判定不可} & \text{if} \quad -\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+1=0 \\ \left\{-\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-1}\right\} & \text{if} \quad -\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+1\neq 0 \end{cases}$

$\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}=\dfrac{1}{R}$ (R を入力), 解 : $\begin{cases} \text{判定不可} & \text{if} \quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=0 \\ \left\{\frac{1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}\right\} & \text{if} \quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\neq 0 \end{cases}$

3.3.3　連立方程式

連立方程式を作成する場合は 1 列の行列に入力する方法と複数のディスプレイに入力する方法があります.

▶ **行列を使って連立方程式を作成する**

1. 行列ボタン  をクリックするか, **挿入**メニューから**行列**を選択します.
2. 方程式の数分だけ行数を設定します.
3. 列数は 1 とし, OK ボタンをクリックします.
4. 方程式をそれぞれのセルに入力します.

▶ **ディスプレイに連立方程式を入力する**

1. アイコン  をクリックするか, **挿入**+ **ディスプレイ**を選択します.
2. ディスプレイにひとつの数式を入力します. そして ENTER キーを押します.

Tip　**表示**メニューから**ヘルパーライン**を選択するか, または**入力ボックス**を選択して行列, または, ディスプレイの入力位置を確認します.

▶ **連立方程式を解く**

1. 連立方程式を入力し, 数式にカーソルを配置します.
2. **求解**サブメニューから**解**を選択するか  をクリックします.
3. 変数を決めるダイアログが表示された場合は, 目的の変数を入力します. 変数が複数ある場合はコンマ区切りで入力します.

次に連立方程式の求解の例を紹介します.

▶ **求解 ＋ 解**

$$\begin{array}{c} 2x-y=5 \\ x+3y=4 \end{array}, \text{解：} \left[x=\frac{19}{7}, y=\frac{3}{7}\right]$$

$$\begin{array}{c} x^2-y^2=5 \\ x+y=1 \end{array}, \text{解：} [x=3, y=-2]$$

$$\begin{array}{c} x^2-3y=7 \\ 6x+4y=9 \end{array}, \text{解:} \begin{array}{l} \left[x=-\frac{1}{4}\sqrt{301}-\frac{9}{4}, y=\frac{3}{8}\sqrt{301}+\frac{45}{8}\right], \\ \left[x=\frac{1}{4}\sqrt{301}-\frac{9}{4}, y=\frac{45}{8}-\frac{3}{8}\sqrt{301}\right] \end{array}$$

式の数より不明なパラメータの数が多い場合は, ダイアログボックスに変数を指定することができます.

▶ **求解 ＋ 解**

$$\begin{array}{c} 2x-y=1 \\ x+3z=4 \\ w+x=-3 \end{array}, x, y, z \text{ を求めるための変数}$$

$$\text{解：} \left[x=-w-3, y=-2w-7, z=\frac{1}{3}w+\frac{7}{3}\right]$$

3.3.4　数値解

浮動小数点形式で表示される数値解を求める場合は, 方程式の係数の一つに小数点を付けて**求解**サブメニューから**解**コマンドを実行するか, または同じ**求解**サブメニューから**数値解**のコマンドを選択します. **求解**+ **数値解**コマンドを実行すると多項式の実数解を求めることができます. ただし, 連立方程式に対してこのコマンドを実行すると一つの解しか求められません. 逆に, 超越方程式の求解や解の間隔を求める場合には優先的に利用してください.

▶ **求解 ＋ 解**

$x^2+7x-5.2=0$, 解: $0.677\,32, -7.677\,3$

$x^3-3.8x-15.6=0$, 解: $-1.5-1.717\,6i, -1.5+1.717\,6i, 3.0$

求解サブメニューの**数値解**を選ぶことができます．これは, 多項式や連立方程式に対して, 実数および複素数のすべての解を求めます.

▶ **求解 ＋ 数値解**

$x^2+7x-5.2=0$, 解：$\{[x=0.677\,32], [x=-7.677\,3]\}$

$x^3-3.8x-15.6=0$,
解: $\{[x=-1.5+1.717\,6i], [x=-1.5-1.717\,6i], [x=3.0]\}$

$x^8+3x^2-1=0$,
解: $\{[x=-1.002\,3+0.632\,10i]$, $[x=-1.002\,3-0.632\,10i]$,
$[x=1.002\,3+0.632\,10i]$, $[x=1.002\,3-0.632\,10i]$, $[x=-0.573\,94]$,
$[x=0.573\,94]$, $[x=-1.240\,8i]$, $[x=1.240\,8i]\}$

▶ **求解 ＋ 数値解**

$\begin{bmatrix} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=1 \end{bmatrix}$,
解: $\{[x=-1.732\,1, y=-1.414\,2]$, $[x=-1.732\,1, y=1.414\,2]$,
$[x=1.732\,1, y=-1.414\,2]$, $[x=1.732\,1, y=1.414\,2]\}$

求解 ＋ **数値解**のコマンドは, 超越方程式や連立超越方程式を解く際や中間解を指定する際に, 特に役立ちます.

▶ **変数の範囲を限定して数値解を求める**

1. カーソルを最後の方程式の行に配置して ENTER キーを押します．行列またはディスプレイの入力ボックスが追加されます.
2. 目的の変数に対する範囲を記号 ∈ を使って記述します.

▶ **求解 ＋ 数値解**

$$\begin{matrix} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=1 \\ x\in(-2,0) \\ y\in(0,2) \end{matrix}, \text{ 解: } [x=-1.732\,1, y=1.414\,2]$$

▶ **多項式の連立方程式から, すべての数値解を求める**

1. 連立方程式のどれか一つの係数に小数点を付けます.
2. **求解**サブメニューから**解**コマンドを選択します.

▶ **求解 ＋ 解**

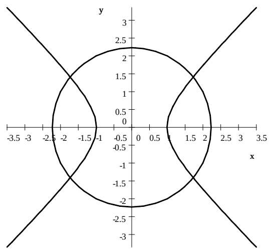
$$\begin{array}{l} x^2+y^2=5.0 \\ x^2-y^2=1.0 \end{array}, \text{解：} \begin{array}{l} \{y=-1.4142, x=1.7321\} \\ \{y=-1.4142, x=-1.7321\} \\ \{y=1.4142, x=1.7321\} \\ \{y=1.4142, x=-1.7321\} \end{array}$$

これら 4 つの式からなる連立方程式を次に図示します．円と 2 つの曲線の交点が解になります．陰関数からこのような図を作成する方法は 168 ページを参照してください．

▶ **2D プロット + 陰関数**

$x^2+y^2=5$

$x^2-y^2=1$



計算結果の表示桁数や科学記数法の変更方法については 28 ページを参照してください．

3.3.5 不等式

不等式の計算機能について紹介します．

▶ **不等式を解く**

Example 6　● 不等式にカーソルを配置し，**求解**メニューから**解**を選択します．

▶ **求解 + 解**

$16-7y \geq 10y-4$, 解: $\left(-\infty, \dfrac{20}{17}\right]$

$x^3+1 > x^2+x$, 解: $(-1,1)\cup(1,\infty)$

$|2x+3| \leq 1$, 解: $[-2,-1]$

$\dfrac{7-2x}{x-2} \geq 0$, 解: $\left(2, \frac{7}{2}\right]$

$x^2+2x-3>0$, 解: $(1,\infty)\cup(-\infty,-3)$

これらの解の意味は，カッコの形状により，以下のようになります．

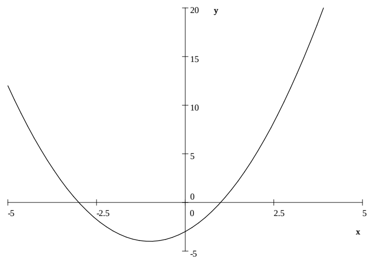
$$\begin{array}{ll} (a,b)=\{x : a<x<b\} & [a,b]=\{x : a\leq x\leq b\} \\ (a,b]=\{x : a<x\leq b\} & [a,b)=\{x : a\leq x<b\} \end{array}$$

2 つの集合 A と B について，

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

表の最後にある不等式 $x^2 + 2x - 3 > 0$ は, 多項式 $y = x^2 + 2x - 3$ をグラフ化すると良く理解できます. 次のグラフの曲線は $x = -3$ と $x = 1$ で x 軸と交わっています. したがって, -3 より小さい左側と, 1 の右側が解であることが分かります.

▶ **2D プロット + 直交座標**
$x^2 + 2x - 3$



3.4　置換

変数の置換については次に示すような一般的なものが利用できます.

$$[F(x)]_{x=a} = F(a) \quad \text{および} \quad [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

3.4.1　変数を置換する

1 変数の数式において置換を行う場合は, 式をカギカッコで囲み, 目的の変数の置換条件を下付き文字で表記します. そして最後に**計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**
$\left[x^2 + 2x - 3\right]_{x=a} = a^2 + 2a - 3$　　$\left[x^2 + 2x - 3\right]_{x=5} = 32$
$\left[\frac{x^2-3x}{5}\right]_{x=y-z} = \frac{3}{5}z - \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}(y-z)^2$
置換条件の式は等号の左側の変数に新たに右側の変数を代入するものです. ここで, $x = y + z$, $y = x - z$, $z = x - y$ は同じ式ではないので注意しましょう.

▶ **計算**
$[x+y]_{x=y+z} = 2y + z$　　$[x+y]_{y=x-z} = 2x - z$　　$[x+y]_{z=x-y} = x + y$

3.4.2　端点を使った計算

2 つの数値や数式で置換を行ない, その差を求める場合はカギカッコで変数を囲み,

$$[x]_{x=a}^{x=b}$$

上付き文字と下付き文字に値や数式を入力して計算コマンドを実行します.

▶ **計算**

$[x]_{x=a}^{x=b} = b - a$　　$\left[x^2 + 2x - 3\right]_{x=a}^{x=b} = -a^2 - 2a + b^2 + 2b$

$\left[x^2 + 2x - 3\right]_{x=3}^{x=5} = 20$

▶ **計算, 因数分解**

$\left[\frac{x^2-3x}{5}\right]_{x=y-z}^{x=y+z} = \frac{1}{5}(y+z)^2 - \frac{6}{5}z - \frac{1}{5}(y-z)^2 = \frac{2}{5}z\,(2y-3)$

左カッコに点線表示の空カッコを, そして右カッコにカギカッコを利用することもできます. または, キーボードから右カッコ用に縦棒記号だけを入力し, 下付き文字だけ, または上付き文字と下付き文字を入力して計算を行なうこともできます.

▶ **計算**

$\left[x^2 - 3\right]_{x=a}^{x=b} = b^2 - a^2$　　$x^2 - 3\Big]_{x=a}^{x=b} = b^2 - a^2$

$x^2 - 3\Big|_{x=a}^{x=b} = b^2 - a^2$　　$x + 3|_{x=y+z} = y + z + 3$

Note　先頭の例はカギカッコを左右に付けました. その他の例における空カッコは制御記号なので, 印刷出力されていません.

3.5　指数と対数

指数と対数については, ごく一般的な表記方法, 例えば, e^x, $\exp x$, $\log_5 x$, $\ln x$ などの形で計算を行なえます. $e^{\ln x} = x$ と $\ln e^x = x$ からも分かるように, 指数と対数はお互い逆関数の関係になっています.

3.5.1　指数と指数関数

指数関数は生化学関係のモデリングに一般的に利用される関数です. 指数法則は指数関数を利用する上でとても重要な事柄です.

指数の積

底を e とする指数関数の積には次の法則があります.

▶ **結合 ＋ 指数**

$(e^x)^y = e^{yx}$　　$e^x e^y = e^{x+y}$

▶ **展開**

$e^{x+y} = e^x e^y$　　$e^{x+3\ln y} = y^3 e^x$

累乗の積

任意の数 a の累乗には次の法則があります.

▶ **結合 ＋ 累乗**

$a^x a^y = a^{x+y}$

指数法則

指数法則により指数の計算を行なう場合は**簡単化**コマンドまたは, **結合** + **累乗**を使います. また, 式によっては**結合** + **指数**を使うこともできます.　指数法則は指数が実数であれ, 複素数であれ利用できます.

▶ **簡単化**

$2^x 2^y = 2^{x+y}$　　$3^{x^2-3xy} 3^{2x+5} = 3^{2x-3xy+x^2+5}$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$　　$10^{x+i} 10^{x-i} = 10^{2x}$

指数表記

関数 exp は $\exp x = e^x$ と定義されています. 数式モードで exp と入力すると, 自動的に灰色で表示されます. 指数関数の計算結果は $\exp f(x)$ ではなく, 普通, $e^{f(x)}$ として画面上に表示されます. しかし, あまりに $f(x)$ が複雑な場合は自動的には $\exp f(x)$ の形式で表示されます. 次にその例を示します.

▶ **結合** + **指数**

$\left(e^{a+b}\right)^3 = e^{3a+3b}$　　$e^{x^2-3xy} e^{2x+5} = \exp\left(2x - 3xy + x^2 + 5\right)$

指数関数を計算する

近似値を求める場合は**計算**または**数値計算**コマンドを利用します. 小数点を使うと自動的に数値解が得られるのは, ここでも同じです. 有効桁数の設定は**ツール**メニューの**計算エンジン設定**コマンドで行ないます. ここでは計算結果の表示桁数を 8 にした時の例を示します (参照 29 ページ).

指数式	計算コマンド	数値計算コマンド
e^2	e^2	7.3890561
$e^{0.0025}$	1.0025031	1.0025031
5^4	625	625.0
$2^{\sqrt{5}}$	$2^{\sqrt{5}}$	4.7111131

3.5.2　対数と対数関数

関数 $\ln x$ は底を e とする自然対数です. これ以外の底を持つ対数は log で記述して底も明記します. 例えば, $\log_5 25 = 2$ や $\log_{10} 10^3 = 3$ などとします. 仮に $\log x$ と入力しても, **数式処理設定**メニューで底に関するオプションを変更しない限り自然対数になります. この設定はグローバル設定と, 文書ごとに設定するローカル設定に分かれています.

▶ **関数** log **の底を変更する**

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択します. 一般タブを表示します.
2. 対数の底の項目で, **デフォルトの e を 10 に変更する**をチェックします.　OK ボタンをクリックします.

▶ **個別の文書だけで関数**log **の底を変更する**

1. **数式処理**メニューから**設定**を選択します. 一般タブを表示します.
2. ローカル設定をチェックします.
3. 対数の底の項目で, **デフォルトの e を 10 に変更する**をチェックします. OK ボタンをクリックします.

常用対数は**計算**コマンドを使って, 自然対数に変換することができます.

▶ **計算**

$\log x = \ln x$

log のデフォルトの底を e から 10 に変更すると, 計算も自然対数で行われます.

▶ **計算**

$\log x = \log_{10} x$

自然対数の機能には大変興味深いものがあります.

対数のプロパティ

対数のプロパティは, **簡単化**と**結合**のコマンドで見ることができます.

▶ **簡単化**

$\ln x^y = y \ln x$　　　$\log 3^8 = 8 \ln 3$

▶ **結合 + 対数**

$\ln x + \ln y = \ln xy$　　$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$　　$\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$

$6 \ln 7 = \ln 117\,649$　　$2 \log 3 + 6 \log 7 = \ln 1058\,841$

対数の計算

数値計算を行なう場合は**計算**コマンドまたは**数値計算**コマンドを使います. **計算**コマンドは対数記号を使ったまま式を変形するのが基本ですが, 小数点形式の値を利用した場合は, **数値計算**を実行します. 有効桁数の設定は**ツール**メニューの**数式処理設定**や**計算エンジンの設定**コマンドを利用します. ローカル設定の場合は**数式処理**+ **設定**から一般タブを使って行ないます. ここでは計算結果の表示桁数を 5 に設定した時の例を次に示します.

数式	**計算コマンド**	**数値計算コマンド**
$\ln 2$	$\ln 2$	0.69315
$\log_{10} 5$	$\frac{\ln 5}{\ln 10}$	0.69897
$\ln 0.0025$	-5.9915	-5.9915
$\ln 1.0025$	2.4969×10^{-3}	2.4969×10^{-3}

3.5.3　指数式と対数式を解く

指数式や対数式を解く場合は**求解**サブメニューの**解**コマンドを利用します. 変数を指定するダイアログでは, 目的の変数を入力します.
数値解を求める場合は, 係数に小数点を付けて**求解**+ **解**, または, **数値計算**コマンドを選択します. 変数が 1 つの場合は**求解**+ **数値解**コマンドを使います.

▶ **求解 + 解**
$3^x = 8$, 解: $\left\{\frac{1}{\ln 3}(2i\pi k + \ln 3 \log_3 8) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$e^x = \dfrac{y+1}{y-1}$, (変数は x)
解: $\begin{cases} \emptyset & \text{if} \quad y = -1 \\ \left\{\ln \frac{1}{y-1}(y+1) + 2i\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} & \text{if} \quad y \neq -1 \end{cases}$
2 つのオプション, **一般的な解だけを求める**, と**特別な解を無視する**, が用意されています. 従って, オプションを選択しない限り全ての解を出力します.

▶ **解を求めるには, 以下のように行います.**

1. **ツール**+ **計算エンジン設定**で表示される一般タブを選びます.
2. **基本的な解だけ**オプションと, **特別なケースは無視する**という 2 つのオプションのチェックを付けます.

▶ **求解 + 解**
$3^x = 8$, 解: $\log_3 8$
$e^x = \dfrac{y+1}{y-1}$, (変数は x), 解: $\ln \dfrac{1}{y-1}(y+1)$
$P = Qe^{kt}$, (変数は k), 解: $\frac{1}{t} \ln \frac{P}{Q}$
数値解に対しては, 10 進法で係数を入力して, 求解 + 解を選ぶか, 数値計算を行います. 特定の解については, **求解** + **数値解**を選ぶことができます.

▶ **求解 + 解**
$3^x = 8.0$, 解: 1.8928

$\log(3x + y) = 8.0$, 解: $993.65 - 0.33333y$

▶ **求解 + 数値解**
$3^x = 8$, 解: $\{[x = 1.8928]\}$

$\log(3x + y) = 8$, 解: $\{[x = 842.07, y = 454.74]\}$

3.6　練習問題

1. 多項式 $x^2 - 3x + 5k$ を $x + 4$ で割ったときの余りを 9 とします. k の値を求めてください. **多項式**サブメニューの**除算**コマンドと**求解**+ **解**のコマンドを使います.

2. 関数 $f(x) = x^3 + x \ln x$ と $g(x) = x + e^x$ を定義してください．そして $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(x)g(x)$, $f(x) + g(x)$ を計算してください．
3. 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通過する直線の式を求めてください．
4. 2 点 $(2, 5)$, $(3, -7)$ を通過する直線の式を求めてください．
5. 2 点 $(1, 2)$, $(2, 4)$ を通過する直線の式を求めてください．
6. 式 $sx + ty = c$ の傾きを求めてください．
7. 楕円 $16\,x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$ の中心と半径を求めてください．
8. 式 $x^n - y^n$ にいくつかの正の整数 n を代入して因数分解してください．そして一般式を予測してください．
9. 式 $x^2 + \left(\sqrt{5} - 3\right) x - 3\sqrt{5}$ に因数分解を実行すると

$$x^2 + \left(\sqrt{5} - 3\right) x - 3\sqrt{5} = \left(x + \sqrt{5}\right)(x - 3)$$

となります．無理数を含む式でも，その形によって因数分解が可能です．一方，式 $x^2 - 3$ と $x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ に因数分解を実行しても，何も起こりません．これらの式を因数分解する場合はどうしたらよいでしょうか?

10. 次の連立方程式の実数解と虚数解を求めてください．

$$\begin{aligned} 2x^2 - y &= 1 \\ x + 3y^3 &= 4 \end{aligned}$$

3.7 練習問題の答え

1. **多項式**サブメニューから**除算**を実行します．

$$\frac{x^2 - 3x + 5k}{x + 4} = x + \frac{1}{x + 4}(5k + 28) - 7$$

余りは $5k + 28$ となります．式 $5k + 28 = 9$ に**求解**+ **解**を実行すると $\left\{k = -\frac{19}{5}\right\}$ が得られます．

2. 関数 $f(x) = x^3 + x \ln x$ と $g(x) = x + e^x$ を定義して次の計算を行ないます．

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (x + e^x)^3 + (\ln(x + e^x))(x + e^x) \\ g(f(x)) &= e^{x \ln x + x^3} + x \ln x + x^3 \\ f(x)g(x) &= \left(x \ln x + x^3\right)(x + e^x) \\ f(x) + g(x) &= x + e^x + x \ln x + x^3 \end{aligned}$$

初めの 2 つについても，$(f \circ g)(x) = (x + e^x)^3 + (\ln(x + e^x))(x + e^x)$ および $(g \circ f)(x) = e^{x \ln x + x^3} + x \ln x + x^3$ のように計算することが可能です．

3. 平面上 2 点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を通過する式は $ax + by + c = 0$ で与えられます．2 点の座標をこの式に代入すると $ax_1 + by_1 + c = 0$ および $ax_2 + by_2 + c = 0$ となります．この連立方程式に，**求解**サブメニューから**解**を実行します．

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \end{aligned}$$

(x_1, y_1) と (x_2, y_2) の関係によって, 多くの可能性が生じます. ほとんど座標に対して適合する解を簡単に得るには, **ツール**メニューから**数式エンジン設定**を選択し, 特別なケースは無視するをチェックします. これにより変数 a, b は次のようになります.

$$\text{解:}\ \left[a = \frac{cy_1 - cy_2}{x_1y_2 - x_2y_1}, b = \frac{cx_1 - cx_2}{x_2y_1 - x_1y_2}\right]$$

これを使うと式は次のようになります.

$$c\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1y_2 - x_2y_1}\right)x - c\left(\frac{x_1 - x_2}{x_2y_1 - x_1y_2}\right)y + c = 0$$

分数を無くし, 項の整理を行なうと次のようになります.

$$(y_1 - y_2)\,x - (x_1 - x_2)\,y + (x_1y_2 - y_1x_2) = 0$$

4. 2 点 $(2, 5)$, $(3, -7)$ を通過する連立方程式は次のようになります.

$$\begin{aligned} 2a + 5b + c &= 0 \\ 3a - 7b + c &= 0 \end{aligned}$$

求解サブメニューの**解**を実行します.

$$\text{解:}\ \left[a = -\frac{12}{29}c, b = -\frac{1}{29}c\right]$$

この直線の方程式を求めます.

$$-\frac{12}{29}cx - \left(-\frac{1}{29}\right)cy + c = 0$$

分数を無くし, 簡単化した式を次の示します.

$$-12x + y + 29 = 0$$

5. 直線は原点 $(0, 0)$ を通過するので, 係数 a, b のペアを一つに限定することはできません. 実際, **求解**サブメニューから**解**を選択して, 変数ダイアログで a, b を指定しても何もおこりません. この場合は, 変数に a, c を指定します. すると, 次のようになります.

$$[a = -2b, c = 0]$$

直線の式は次のようになります.

$$-2bx + by = 0$$

または b で割って**簡単化**すると, 次のようになります.

$$(-2bx + by)\,\frac{1}{b} = -2x + y = 0$$

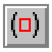
Note: 行列を使って 2 点を通る直線の式を求めることもできます. 行列による代数計算の詳細は 334 ページを参照してください.

6. 式 $y = mx + b$ の傾きは m, そして y 切片は b となります．直線の方程式が $sx + ty = c$ として与えられるとしたら，y について解を求めることで傾きが得られます．解 $y = -\frac{sx-c}{t}$ に**展開**コマンドを実行すると $y = -\frac{1}{t}sx + \frac{1}{t}c$ となり，傾きが $-\dfrac{s}{t}$ となります．
7. 式 $16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$ の中心と半径を求めます．
   (a) 両辺から 84 を引きます．

$$\left(16\,x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84\right) - 84 = 0 - 84$$

   (b) 左辺を選択して CTRL キーを押しながら**簡単化**を選択します．右辺についても同じ操作を行ないます．

$$96x - 8y + 16x^2 + 4y^2 = -84$$

   (c) 変数 x を含む項を並べ替えて，選択したら  をクリックします．同じ操作を変数 y についても行ないます．

$$\left(16x^2 + 96x\right) + \left(4y^2 - 8y\right) = -84$$

   (d) 2 次の項の係数をドラッグしてカッコの外に出し，1 次の係数をその数で割ります．

$$16\left(x^2 + \frac{96}{16}x\right) + 4\left(y^2 - \frac{8}{4}y\right) = -84$$

   (e) x^2 の係数と，x の係数を $\frac{1}{2}$ 倍した平方の積を両辺に足します．y についても同じように操作します．

$$16\left(x^2 + \tfrac{96}{16}x + \left(\tfrac{1}{2}\tfrac{96}{16}\right)^2\right) + 4\left(y^2 - \tfrac{8}{4}y + \left(\tfrac{1}{2}\tfrac{8}{4}\right)^2\right)$$
$$= -84 + 16\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{96}{16}\right)^2 + 4\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{8}{4}\right)^2$$

   (f) 項 $16\left(x^2 + \frac{96}{16}x + \left(\frac{1}{2} \times \frac{96}{16}\right)^2\right)$ を選択し，CTRL キーを押した状態で**因数分解**を実行します．y についても同じように操作します．

$$16\left(x+3\right)^2 + 4\left(y-1\right)^2 = -84 + 16\left(\frac{1}{2}\frac{96}{16}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\frac{8}{4}\right)$$

   (g) 右辺を選択し，CTRL キーを押しながら**簡単化**を実行します．

$$16\left(x+3\right)^2 + 4\left(y-1\right)^2 = 64$$

   (h) 右辺の値で両辺を割ります．

$$\frac{16\left(x+3\right)^2}{64} + \frac{4\left(y-1\right)^2}{64} = \frac{64}{64}$$

   (i) 各項を選択し，CTRL キーを押しながら**因数分解**をそれぞれ実行します．

$$\frac{1}{4}\left(x+3\right)^2 + \frac{1}{16}\left(y-1\right)^2 = 1$$

上式のように変形できましたか? 中心の座標は $(-3,1)$ で, 半径は $\sqrt{4}=2$ および $\sqrt{16}=4$ となります.

8. 適当な整数を代入し, **因数分解**を実行します.

$$
\begin{aligned}
x^2-y^2 &= (x-y)(x+y)\\
x^3-y^3 &= (x-y)\left(xy+x^2+y^2\right)\\
x^4-y^4 &= (x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)\\
x^5-y^5 &= (x-y)\left(xy^3+x^3y+x^2y^2+x^4+y^4\right)\\
x^6-y^6 &= (x-y)(x+y)\left(xy+x^2+y^2\right)\left(-xy+x^2+y^2\right)\\
x^7-y^7 &= (x-y)\left(xy^5+x^5y+x^2y^4+x^3y^3+x^4y^2+x^6+y^6\right)
\end{aligned}
$$

これらの結果から, 奇数 n に対しては次の式が予測できます.

$$x^n-y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k$$

偶数に関数する式は自分で考えてみましょう.

9. 例題から, 係数にルート記号があれば因数分解できるので, 積 $\sqrt{3}\left(x^2-3\right)$ を因数分解して $\sqrt{3}\left(x^2-3\right)=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$ を得ることができます. そして, 元に戻すために $\sqrt{3}$ で両辺を割れば, 次のようになります.

$$x^2-3=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$$

多項式 x^3+3x^2-5x+1 については, 始めに**多項式**サブメニューから**複素数解**を選択して解 $\left[1,\sqrt{5}-2,-\sqrt{5}-2\right]$ を求めます.$\sqrt{5}$ を多項式に掛けて因数分解します. $\sqrt{5}\left(x^3+3x^2-5x+1\right)=\sqrt{5}(x-1)\left(x+2+\sqrt{5}\right)\left(x+2-\sqrt{5}\right)$ となります. 最後に $\sqrt{5}$ で割れば, 次のようになります.

$$x^3+3x^2-5x+1=(x-1)\left(x+2+\sqrt{5}\right)\left(x+2-\sqrt{5}\right)$$

10. 連立方程式にカーソルを配置して

$$
\begin{aligned}
2x^2-y&=1\\
x+3y^3&=4
\end{aligned}
$$

求解サブメニューから**解**を選択します. 次のような解が表示されます.

解 : $[y=1,x=1],\ \left[x=4-3y^3, y=\rho_1\right]$
ここで ρ_1 は次式の解 $-\frac{5}{3}\hat{Z}-\frac{5}{3}\hat{Z}^2+\hat{Z}^3+\hat{Z}^4+\hat{Z}^5-\frac{31}{18}$

カーソルを次の多項式に置きます.

$$-\frac{5}{3}\hat{Z}-\frac{5}{3}\hat{Z}^2+\hat{Z}^3+\hat{Z}^4+\hat{Z}^5-\frac{31}{18}$$

多項式サブメニューから**複素数解**を選択します. 次の解を求めることができます.

$$
\text{解:}\quad
\begin{array}{l}
1.1893\\
-0.60663+0.98268i\\
-0.60663-0.98268i\\
-0.48801-0.92069i\\
-0.48801+0.92069i
\end{array}
$$

関数定義サブメニューの**新しい定義**コマンドを使って式 $x(t) = -3t^3 + 4$ を定義します．上で求めた方程式の解を選択し，ペアカッコのアイコンをクリックします．ベクトル化したカッコの前に x を入力して計算コマンドを実行します．

$$x\begin{pmatrix} -0.60663 - 0.98268i \\ -0.60663 + 0.98268i \\ -0.48801 - 0.92069i \\ -0.48801 + 0.92069i \\ 1.1893 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\left(-0.60663 - 0.98268i\right)^3 + 4 \\ -3\left(-0.60663 + 0.98268i\right)^3 + 4 \\ -3\left(-0.48801 - 0.92069i\right)^3 + 4 \\ -3\left(-0.48801 + 0.92069i\right)^3 + 4 \\ -1.0466 \end{pmatrix}$$

行列式の右端にカーソルを置いた状態で，**展開**コマンドを実行します．

$$x\begin{pmatrix} -0.60663 - 0.98268i \\ -0.60663 + 0.98268i \\ -0.48801 - 0.92069i \\ -0.48801 + 0.92069i \\ 1.1893 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\left(-0.60663 - 0.98268i\right)^3 + 4 \\ -3\left(-0.60663 + 0.98268i\right)^3 + 4 \\ -3\left(-0.48801 - 0.92069i\right)^3 + 4 \\ -3\left(-0.48801 + 0.92069i\right)^3 + 4 \\ -1.0466 \end{pmatrix}$$

この結果を次にようにしてまとめて表示します．2 つの行列の中身を別の行に並べてコピーします．そして 2 つの式を選択した状態で**数式処理**メニューの**行列 + 連結**を選択します．一番上の行を選択して，**編集**+ **行の挿入**を選び，ラベルの行を追加します．そして次に示すようにラベルを記入します．

$\mathbf{x = -3y^3+4}$	$\mathbf{y}$
1	1
-1.0466	1.1893
$-0.60247 + 0.40783i$	$-0.60663 - 0.98268i$
$-0.60247 - 0.40783i$	$-0.60663 + 0.98268i$
$0.62562 - 0.36793i$	$-0.48801 - 0.92069i$
$0.62562 + 0.36793i$	$-0.48801 + 0.92069i$

第 4 章

三角法

三角法は直角三角形を始めとする, 色々な三角形の辺と角に関する研究から出発した三角形の解析方法です. さらに三角関数を利用して辺の長さや角度を知ることが可能になったので, 三角法は色々な分野で利用されています.

4.1　三角関数

この章では主に 6 つの三角関数を利用します. その中でも基本となるのはサインとコサインで, 中心を原点に持つ半径 1 の単位円 (ユークリッド平面) で定義することができます. 単位円上の座標は $(\cos t, \sin t)$ であり, t は正の x 軸と座標点のなす（反時計回りの）角度です. $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲における角度 t に対して, これらの関数は直角三角形の一辺に比例する値を持ちます. 残りの 4 つ三角関数はサインとコサインを使って次のように定義されます.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

サイン, コサイン, タンジェント, コタンジェント, セカント, コセカントはその省略形—sin, cos, tan, cot, sec, csc—で, 関数として利用します. これらの関数の入力は, 他の関数の場合と同じで, 数式モードでキーボードから直接入力するか, または  をクリックして表示されるダイアログから目的の関数を選択します. ダイアログは**挿入** + **数式名**でも表示できます. キーボードから数式モードでこれらの関数を入力すると, 最後の文字を入力した段階で, 自動的に関数名が灰色で表示されます.

サインとコサイン関数は全ての実数と複素数に対して定義されます. ここでは, 実数に関してのみ記述します. 複素数に関しては複素数の三角関数およびハイパボリック関数 91 ページを参照してください. 実数部に関しては, サインとコサイン関数は $[-1, 1]$ の間の値を取ります. 計算を実数に制限するには, assume 関数を利用します.

► **変数を実数に仮定する**

1. 数式入力モードで assume と入力します. 最後の文字を入力すると自動的に灰色に表示されます.

1. カッコ内に変数名を入力します．assume(real)
2. **計算**コマンドを実行します．
   変数の仮定に関する詳細は 109 ページを参照してください．

Note　一般に関数の引数はカッコで囲みます．しかし，三角関数の場合，その必要はありません．三角関数の場合は関数名の後ろに直接引数を記述します．三角関数の引数にもカッコを付ける場合は，**ツール**メニューの**数式処理設定**コマンドを選択します．ローカルファイルだけに設定する場合は，**数式処理** + **設定**を選択します．一般タブにある関数の引数の形式で，引数を必ずカッコで囲むをチェックします．詳細は 129 ページを参照してください．

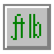
4.1.1　ラジアンと度

角度の記述方法によって三角関数はそれがラジアンか，または度であることを自動判別します．

► **数値計算**

$\sin 30 = -0.98803$　　　$\sin 30^\circ = 0.5$

度を示す記号は緑色の単位名ボタンから入力するか，または，上付き文字として赤い丸記号を入力します．度を示す記号がない場合はラジアンとして認識され，緑色または赤い色の丸記号があると，度として認識されます．

- 緑色の円記号か，または，それ以外の角度単位を入力する場合は，**挿入**+ **単位名**または数式テンプレートツールバーの単位名ボタン  をクリックして平面角を選択します．目的の単位を選択したら，挿入または置換ボタンをクリックします．平面角に関する単位名や，キーボードショートカットによる入力に関しては 44 ページを参照してください．
- 赤い円の記号は記号キャッシュツールバーと二項演算子パネルにあります．ただし，これらは上付き文字として入力してください．分を示す記号はアポストロフィーまたはプライム記号を数式モードで入力します．秒の場合は，分と同じ記号を 2 回入力します．

数式モードで入力した度，分，秒による角度のデータに**計算**コマンドを実行すると，結果はラジアンで表記されます．

$$33^\circ 16' = \frac{499}{2700}\pi \qquad \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

緑色の単位名記号が付いた式を計算すると次のようになります．

$$33^\circ 16' = 0.58061\,\mathrm{rad}$$

何らかの演算を施す際，度は自動的にラジアンに変換されます．単位の切替を行うには，度の数値を求解します．

► **ラジアンを度に記号的に変換する**

1. $2 = \theta^\circ$ のような式を記述します．
1. カーソルをこの式に配置し，**求解**サブメニューから解を選択すると $\theta^\circ = \frac{360}{\pi}$ となり，2 ラジアンは $\left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$ となります．

► **ラジアンを度に数値的に変換する**

1. $2 = \theta°$ または $2\ rad = \theta°$ のような式を記述します.
2. この数式にカーソルを配置し, **求解**サブメニューから解 (緑色の単位記号付き) または数値解 (赤または緑の記号付き) を選択します. $\theta = 114.59$ となり $2rad = 114.59°$ となります.

► **求解 + 解**

$2 = \theta°$, 解: $\frac{360}{\pi}$ $2\,\mathrm{rad} = \theta\,°$, 解 is: 114.59

$0.9\,° = x\,'$, 解: 54.0

► **求解 + 数値解**

$2 = \theta°$, 解: $\{[\theta = 114.59]\}$

4.1.2 三角関数の方程式を解く

三角関数を計算する際, π の整数の倍数による変換は引数から削除されます. さらに, π の有理倍数の引数は簡単化された結果を導きだします. 明示的な数式は度数表記の同じ角度だけでなく, 引数も返します.

$$0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

► **三角関数の値を求める**

三角関数にカーソルを配置し, **計算**または**数値計算**を選択します.

► **計算**

$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\sin(1) = \sin 1$ $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(x + 7\pi) = -\cos x$ $\cot\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$

π の有理倍数の引数は全て $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ の範囲の引数に変換されます.

► **計算**

$\sin\frac{4}{7}\pi = \sin\frac{3}{7}\pi$ $\cos\left(-\frac{20}{9}\pi\right) = \cos\frac{2}{9}\pi$ $\tan\frac{123}{11}\pi = \tan\frac{2}{11}\pi$

► **数値計算**

$\sin\frac{3\pi}{4} = 0.70711$ $\sin(1) = 0.84147$

$\sin 60° = 0.86603$ $\tan 45\,° = 1.000\,00$

ツール + 数式処理設定(または**数式処理 + 設定**) の一般タブの計算結果表示桁数の設定によって, 数値計算によって返される桁数が決まります.

三角関数の方程式の解を求めるのに, **求解**サブメニューの**解**および**数値解**の両方を利用することができます. これらの計算により, 度数はラジアンに変換されます. 方程式に 10 進表記法を利用すると, 数値解が得られます. ラジアンまたは赤い角度記号つきの場合, **求解 + 解**を選択すると記号解を, **求解 + 数値解**を選択すると数値解が得られます.

► **求解 + 解 (ラジアン)**

$x = \sin\frac{\pi}{4}$, 解: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

► **求解 + 解 (赤い角度記号)**

$\sin 22° = \dfrac{14}{c}$, 解: $\frac{14}{\sin\frac{11}{90}\pi}$ $x = 3°54'$, 解: $\frac{13}{600}\pi$

► **求解 + 解 (緑の角度記号)**

$\sin 22^\circ = \frac{14}{c}$, 解: 37.373　　$x = 3^\circ 54' = 6.8068 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad}$

► **求解 ＋ 数値解**

$x = \sin\frac{\pi}{4}$, 解: $\{[x = 0.70711]\}$　　$\sin 22^\circ = \frac{14}{c}$, 解: $\{[c = 37.373]\}$

$x = 3^\circ 54'$, 解: $\left\{\left[x = 6.8068 \times 10^{-2}\right]\right\}$

多くの場合, **求解** ＋ **解**コマンドにを使えば, 式の形式によって記号的または数値的な完全な解を求めることができます. **求解** ＋ **数値解**の場合は 1 つの数値的な解を求めます.

► **求解 ＋ 解**

$\sin t = \sin 2t$, 解: $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$2\sin x + 5\cos x = 5$, 解: $\{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\pi - 2\arctan\frac{5}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

► **求解 ＋ 数値解**

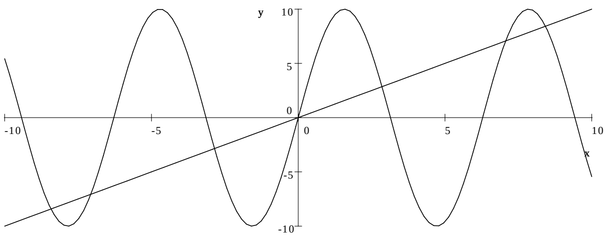
$\sin t = \sin 2t$, 解: $\{[t = 0.0]\}$

► **求解 ＋ 数値解**

$\begin{bmatrix} \sin t = \sin 2t \\ t \in (0.5, 2.5) \end{bmatrix}$, 解: $[t = 1.0472]$

$\begin{bmatrix} x = 10\sin x \\ x \in (5, 7.5) \end{bmatrix}$, 解: $[x = 7.0682]$

最初の方程式の完全な解を求めるために関数の周期性および数値解を利用します. 2 つめの例では解の範囲を $(5, 7.5)$ としました. 範囲を変更すれば,7 つ全ての解 $[x = 0]$, $[x = \pm 2.8523]$, $[x = \pm 7.0682]$, $[x = \pm 8.4232]$ を求めることができます. この時の様子をグラフ化したものを次に示します. また, この式に対して**求解**+ **解**コマンドを実行しても解を求めることはできません.



4.1.3　三角法の恒等式

三角関数の演算方法について説明します. 始めに, 三角関数の式を簡単化したり, 展開する場合によく利用される恒等式について説明します.

基本的な三角関数の定義

三角関数に**書換え** ＋ **Sin と Cos** コマンドを実行するとサインとコサインの式に変換します.

► **書換え ＋Sin と Cos**

$\tan x = \dfrac{1}{\cos x}\sin x$　　$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$　　$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

一方, セカントとコセカントに**簡単化**コマンドを実行すると, それらはサインとコサインの式に変

換されます.

▶ **簡単化**

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$　　　　$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

三角関数に**書換え** + **Sin**, **Cos**, **Tan** コマンドを実行するとそれぞれサイン, コサイン, タンジェントの式に変換します.

▶ **書換え +Sin**

$\cos x \sin x - 2\sec x \csc x = \frac{2}{(\sin x)\left(2\sin^2 \frac{1}{2}x-1\right)} - (\sin x)\left(2\sin^2 \frac{1}{2}x - 1\right)$

▶ **書換え +Cos**

$\cos x \sin^2 x = -(\cos x)\left(\cos^2 x - 1\right)$

▶ **書換え + Tan**

$\sin x = 2\frac{\tan \frac{1}{2}x}{\tan^2 \frac{1}{2}x+1}$

ピタゴラスの恒等式

▶ **簡単化**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

三角関数をサインとコサインを使った式に変換する場合は**書換え+Sin と Cos** コマンドを利用します.

▶ **書換え + Sin と Cos, 簡単化**

$\tan^2 x - \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = -1$

$\cot^2 x - \csc^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = -1$

$\dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{1}{\cos x}\sin x + \frac{1}{\cos y}\sin y}{1 - \frac{1}{\cos x \cos y}\sin x \sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$

加法定理

▶ **展開**

$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$　　$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$　　　　$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

結合と展開のコマンドを実行すると, 逆方向の計算を行なえる場合もあります.

▶ **結合 + 三角関数**

$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)$　　$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$

倍角の公式

倍角の恒等式については複数の表示方法があります. 実際, 選択する計算エンジンによって, 次の様に形が異なります. 実際にコマンドを実行して, 確認してみましょう.

▶ **展開**

$\sin 2\theta = \ 2\sin\theta\cos\theta \qquad \tan 2\theta = \ 2(\sin\theta)\dfrac{\cos\theta}{2\cos^2\theta - 1}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

展開コマンドは色々なケースで利用できます．いくつか, 例を示します．

► **展開**

$\sin 2\theta = \ 2\sin\theta\cos\theta \qquad \tan 2\theta = \ 2(\sin\theta)\dfrac{\cos\theta}{2\cos^2\theta - 1}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin 6\theta = 6\cos\theta\sin^5\theta + 6\cos^5\theta\sin\theta - 20\cos^3\theta\sin^3\theta$

4.1.4 三角関数の積と簡単化

三角関数の表記法には様々な形式があります．必要な形式を得るには, コマンドの組み合わせを変えて実行してください．三角関数や双曲線関数の積, または, 累乗計算は和の形に変形することができます．変形した式の引数は, 元の三角関数の引数を線型計算したものになります．

► **結合 + 三角関数**

$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y) \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\sin(x+y) + \frac{1}{2}\sin(x-y) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

► **結合 + 三角関数**

$\sin^5 x\cos^5 x = \frac{1}{512}\sin 10x + \frac{5}{256}\sin 2x - \frac{5}{512}\sin 6x$

$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3 = \sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{9}{2}$

$$\begin{bmatrix} \sin x\sin y \\ \sin x\cos y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ \frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y) \end{bmatrix}$$

► **展開**

$\frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y) = \sin x\sin y$

$\frac{1}{2}\sin(x+y) + \frac{1}{2}\sin(x-y) = \cos y\sin x$

簡単化コマンドを使うと, 和の形を積に変形し, 式を簡単にまとめることができます．例を次に示します．

► **簡単化**

$\cos^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x - \sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^2 x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\sin 3a + 4\sin^3 a = \ 3\sin a$

目的によっては, 複数のコマンドを式に適用する必要があります．ただし, 適用する順番にこだわる必要はありません．

► **簡単化, 展開, 因数分解**

$(\sec t)(1+\cos 2t) = \frac{1}{\cos t}(\cos 2t + 1) = \cos t - \frac{1}{\cos t}\sin^2 t + \frac{1}{\cos t} = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t + 1}{\cos t}$

$1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ のように置き換えて, 再び簡単化を行います．

▶ **簡単化**

$(\cos t)^{-1}\left(\cos^2 t + \cos^2 t\right) = 2\cos t$

4.1.5

4.2　逆三角関数と三角方程式

例えば $\sin x = y$ を満たす x を求める, というようなことが三角関数の場合にはよくあります. 三角関数が周期関数なので, 三角方程式の解も周期的に存在することになります. ここで逆三角関数を使うと, 目的の範囲内での解を求められます. これらの関数によって返される角度は度ではなく, ラジアンになります.

逆関数	**範囲**	**幅**
$\sin^{-1} x$ or $\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1} x$ or $\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1} x$ or $\arctan x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1} x$ or $\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$

arccsc と arcsec 関数は arcsin と arccos の式に書き換えられます.

▶ **計算**

$\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$　　$\sec^{-1} x = \arccos \frac{1}{x}$

$\operatorname{arccsc} x = \arcsin \frac{1}{x}$　　$\csc^{-1} x = \arcsin \frac{1}{x}$

逆三角関数やその他の関数は数式オブジェクトツールバーにある数式名ボタン sin cos をクリックした時に表示されるダイアログから選択します. キーボードから数式モードで直接入力することもできます.

4.2.1　逆三角関数の積と書換え

逆タンジェント関数の和は乗算することができます.

▶ **結合 + Arctan**

$\arctan x + \arctan y = -\arctan \frac{1}{xy-1}(x+y)$

$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{xy+1}$

書換えコマンドは逆三角関数を他の関数へ変換します.

▶ **書換え + Arcsin**

$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　$\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$

▶ **書換え + Arccos**

$\arcsin x = \frac{1}{2}\pi - \arccos x$　　$\operatorname{arccot} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

▶ **書換え ＋ Arctan**

$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{1}{2}\pi$

▶ **書換え ＋ Arccot**

$\arctan x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arccot} x$　　$\arccos x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4.2.2 三角関数方程式と逆三角関数

求解 ＋ **解**コマンドを使うと三角方程式の解は数値的に計算可能な逆三角関数の式として求めることができます．数式を十進表記にすることにより，直接，数値的な結果を得ることができます．実数解のみを求める場合には，初めに assume(real) を実行します．デフォルトの設定に戻すには unassume(real) を実行します．

▶ **計算**

$\text{assume}\,(\text{real}) = \mathbb{R}$

▶ **求解 ＋ 解**

$\sin x = 7/10$, 解: $\left\{\pi - \arcsin \frac{7}{10} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\arcsin \frac{7}{10} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\sin x = 0.7$, 解: $\{6.2832k + 0.77540 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{6.2832k + 2.3662 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\tan^2 x - \cot^2 x = 1$, 解: $\left\{\frac{1}{2}\pi - \arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} + \pi X_{33} \mid X_{33} \in \mathbb{Z}\right\}$

$\cup \left\{-\frac{1}{2}\pi + \arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} + \pi X_{34} \mid X_{34} \in \mathbb{Z}\right\}$

和集合を示す記号“∪” は “または” を意味するものです．$\mathbb{Z}$ は整数の集合です．

▶ **数値計算**

$\arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} = 0.66624$

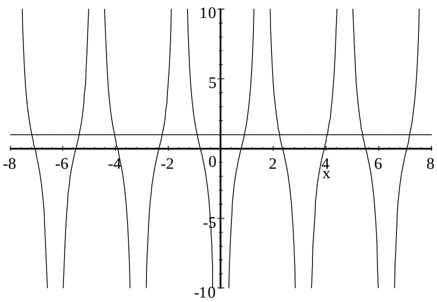
数値解を得るには，浮動小数点表現を使用します．

▶ **求解 ＋ 解**

$\tan^2 x - \cot^2 x = 1.0$, 解:

$\{3.1416X_{13} + 0.90456 \mid X_{13} \in \mathbb{Z}\} \cup \{3.1416X_{14} - 0.90456 \mid X_{14} \in \mathbb{Z}\}$

式を図式化して解を視覚的に確認してみます．下図において曲線 $y = \tan^2 x - \cot^2 x$ と $y = 1$ は方程式 $\tan^2 x - \cot^2 x = 1$ の解であることを示しています．



▶ **基本的な解のみを求める**

1. **ツール**メニューから**計算エンジン設定**を選択します.
2. 一般タブで基本的な解だけをチェックします.

▶ **求解 ＋ 解**

$\sin t = \sin 2t$, 解: 0

$8\tan x - 13 + 5\tan^2 x = 3$, 解: $\arctan\left(\frac{4}{5}\sqrt{6} - \frac{4}{5}\right)$

$\tan^2 x - \cot^2 x = 1$, 解: $2\arctan\sqrt{\sqrt{5} - 2}$

4.3　ハイパボリック関数

ハイパボリックサイン, ハイパボリックコサイン, ハイパボリックタンジェント, ハイパボリックコタンジェント, ハイパボリックセカント, ハイパボリックコセカントなど, これらの関数は指数関数 e^x と e^{-x} によって構成される関数です. 三角関数と円の関係と同じように, ハイパボリック関数は指数関数と深い関連性を持っています.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

ハイパボリック関数は三角関数同様, 引数にカッコを利用しない関数です. 引数のカッコに関する詳細は 129 ページを参照してください. ハイパボリック関数は sinh, cosh, tanh, coth, sech, csch と記述します. これらの関数名を数式モードで入力すると, 自動的に灰色に代わります. 色が変化しないときは, **挿入** ＋ **数式名**として数式名のボックスに入力します. そして OK ボタンをクリックします.

書換えコマンドでハイパボリック関数の指数式を得ることができます.

▶ **書換え ＋ 指数**

$\sinh x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$　　　$\cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

$\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$　　　$\coth x = \frac{1}{e^{2x}-1}\left(e^{2x} + 1\right)$

ハイパボリック関数の計算を行う場合は, **数値計算コマンドを実行します**.

▶ **数値計算**

$\sinh \frac{3\pi}{4} = 5.228\,0$　　　$\tanh(1) = 0.761\,59$

ハイパボリック関数を解く場合は, **求解** ＋ **解**, または, **求解** ＋ **数値解**とします.

▶ **求解 ＋ 解**

$\sinh x + \cosh x = 3$, 解: $\{2i\pi X_{123} + (\ln 3) \mid X_{123} \in \mathbb{Z}\}$

▶ **求解 ＋ 数値解**

$\sinh x \cosh x = 3$, 解: $\{[x = 1.245\,9]\}$

展開コマンドを使えば, 三角関数の和の形に変形できます.

▶ **展開**

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

ハイパボリック関数を sinh と cosh に書き換えることもできます.

▶ **書換え + Sinh と Cosh**

$\operatorname{sech} x \tanh x - \operatorname{csch}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \sinh x - \frac{1}{\sinh^2 x}$

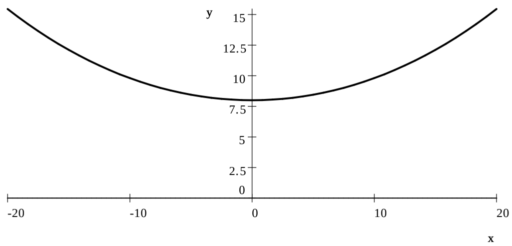
▶ **結合 + ハイパボリック三角関数**

$\sinh x \sinh y = \frac{1}{2} \cosh(x+y) - \frac{1}{2} \cosh(x-y)$

$\sinh x \cosh y = \frac{1}{2} \sinh(x+y) + \frac{1}{2} \sinh(x-y)$

$\cosh x \cosh y = \frac{1}{2} \cosh(x+y) + \frac{1}{2} \cosh(x-y)$

関数ハイパボリックコサインは垂れ下がったケーブルのような曲線を描きます.



$$28 \cosh \frac{x}{28} - 20$$

4.4　逆ハイパボリック関数

ハイパボリック関数は指数関数によって定義されている関数なので, 逆ハイパボリック関数は対数で定義されます.

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\cosh^{-1} x = \operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

▶ **逆ハイパボリック関数の入力**

- 数式名ボタン をクリック, または, **挿入** + **数式名**としてテキストボックスに数式名を入力して OK ボタンをクリックします.

書換えコマンドでハイパボリック関数の対数式を得ることができます.

▶ **書換え ＋ 対数**

$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\qquad$ $\operatorname{arcsech} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$

逆**ハイパボリック関数の値を計算する場合は数値計算コマンドを利用します**.

▶ **数値計算**

$\operatorname{arcsinh} 5 = 2.3124$ $\qquad$ $\cosh^{-1} 10 = 2.9932$

逆ハイパボリック関数の方程式を解く場合は, **求解 ＋ 解**, または, **求解 ＋ 数値解**コマンドを実行します.

▶ **求解 ＋ 解**

$\operatorname{arcsinh} x - \operatorname{arccosh} x = 0.3$, 解: $\{x = 1.3395\}$

特殊な値は次のように実行されます.

▶ **計算**

$\operatorname{arcsinh} 0 = 0$ $\qquad$ $\operatorname{arccosh} 1 = 0$ $\qquad$ $\operatorname{arctanh} 0 = 0$

4.5　複素数と複素関数

実数 a, b および $i^2 = -1$ を使って表現する値 $a + bi$ を複素数と呼びます. 複素数に関する詳細は 35 ページを参照してください.

4.5.1　複素数の偏角

点 P の座標を原点からの距離 r と, 直線 OP が x 軸との交わる角度 (時計回り) θ を使って表現する座標形式を極座標と呼びます. 平面上の実数点 (a, b) を極座標 $P(r, \theta)$ で示すと, その点は

$$a = r\cos\theta \quad \text{and} \quad b = r\sin\theta$$

となります. ここで原点から点 (a, b) までの距離は $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ で, 角度 θ は $\tan\theta = \frac{a}{b}$ を満たすものとします.

角度 θ は z の振幅または偏角と呼ばれます. 偏角は一意には決まらない点に注意してください. z の 2 つの偏角は常に, 2π の整倍数分の差となります. $-\pi$ と π の間の偏角を持つ関数は $\arg z$ で表されます.

▶ **複素数の偏角を求める**

1. 数式入力モードで arg と入力し, g を入力した時点で数式名は自動的に灰色になります.
2. カッコの中に数字を入力します.
3. **計算**, **簡単化**, **数値計算**を選択します.

▶ **計算**

$\arg(3 + 5i) = \arctan\frac{5}{3}$

▶ **簡単化**
$\arg\left((2+3i)^{3i}\right) = \frac{3}{2}\ln 13 - 2\pi$　　$\arg\left(5^{2-3i}\right) = 2\pi - 3\ln 5$

▶ **数値計算**
$\arg\left((5i)^{2+i}\right) = -1.5322$　　$\arg(3+5i) = 1.0304$

4.5.2　複素数の形式

x や y ではなく, r や θ を含む複素数の記述形式を複素数の極形式と呼びます. 直交座標における複素数

$$z = a + ib$$

は三角関数極形式を使って次のように表示できます.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

また, 指数関数極形式では次のようになります.

$$z = re^{i\theta}$$

ここで $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ で $\theta = \arctan\frac{a}{b}$ です. 書換えコマンドを使って複素数 $a+ib$ を指数関数極形式に変換します.

▶ **書換え ＋ 極座標**
$3+5i = \sqrt{34}e^{i\arctan\frac{5}{3}}$　　$16\pi - \sqrt{2}i = \sqrt{2}\sqrt{128\pi^2+1}\exp\left(-i\arctan\frac{1}{16\pi}\sqrt{2}\right)$
複素数を極座標から直交座標に変換する際も**書換え**コマンドを使用します.

▶ **書換え ＋ 直交座標**
$\sqrt{34}e^{i\arctan\frac{5}{3}} = 3+5i$

$\sqrt{256\pi^2+2}\exp\left(-i\arctan\frac{\sqrt{2}}{16\pi}\right) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{128\pi^2+1}}{\sqrt{\frac{1}{128\pi^2}+1}} - \frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{128\pi^2+1}}{\sqrt{\frac{1}{128\pi^2}+1}}i$

▶ **簡単化**
$\sqrt{2}\frac{\sqrt{128\pi^2+1}}{\sqrt{\frac{1}{128\pi^2}+1}} - \frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{128\pi^2+1}}{\sqrt{\frac{1}{128\pi^2}+1}}i = 16\pi - i\sqrt{2}$
オイラーの公式の場合は

$$re^{it} = r(\cos t + i\sin t)$$

書換えコマンドを使って指数関数を三角関数に変換します

▶ **書換え ＋ Sin と Cos**
$re^{it} = r(\cos t + i\sin t)$

4.5.3 複素数の累乗と累乗根

オイラー公式 $re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$ を使って複素数の累乗を求めることができます. $z \neq 0$ で w が複素数であり, r, a, b が実数, かつ r が正である場合, $z = re^{it}$ および $w = a + ib$ と記述します. この時, 主値 z^w は以下のように求められます.

$$\begin{aligned} z^w &= \left(re^{it}\right)^{a+ib} = \left(e^{\ln r}\right)^{a+ib}\left(e^{it}\right)^{a+ib} = e^{a \ln r} e^{ib \ln r} e^{ita} e^{-bt} \\ &= e^{a \ln r - bt} e^{i(at + b \ln r)} = r^a e^{-bt}\left(\cos(ta + b \ln r) + i \sin(ta + b \ln r)\right) \end{aligned}$$

この関数は k が整数の場合, $e^{iy} = e^{iy+2\pi k}$ であるため, 複数の値を持ちます. **書換え**コマンドを使って, 主値を計算します.

► **書換え ＋ 直交座標**

$i^i = e^{-\frac{1}{2}\pi}$ $\qquad 5^{2i} = \cos(2 \ln 5) + i \sin(2 \ln 5)$

► **書換え ＋ 直交座標, 簡単化**

$$\begin{aligned} (1+i)^{2-i} &= e^{\frac{1}{4}\pi + \ln 2} \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\ln 2\right) + \left(e^{\frac{1}{4}\pi + \ln 2} \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\ln 2\right)\right) i \\ &= 2e^{\frac{1}{4}\pi}\left(i \cos\left(\tfrac{1}{2}\ln 2\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}\ln 2\right)\right) \end{aligned}$$

4.5.4 ド·モアブルの定理

ド·モアブルの定理とは$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ かつ n を正の整数とするとき, 次の式で与えられます.

$$z^n = (r(\cos t + i \sin t))^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$$

n が小さい数である場合は**展開**コマンドにつづけて**結合**+ **三角関数**コマンド, さらに**因数分解**コマンドを実行することによって, 式を変形することができます.

► **展開, 結合 ＋ 三角関数, 因数分解**

$$\begin{aligned} (r(\cos t + i \sin t))^3 &= r^3 \cos^3 t + 3ir^3 \cos^2 t \sin t - 3r^3 \cos t \sin^2 t - ir^3 \sin^3 t \\ &= r^3 \cos 3t + ir^3 \sin 3t = r^3(\cos 3t + i \sin 3t) \end{aligned}$$

re^{it} に対しても同じ要領で計算しても

$$\left(re^{it}\right)^n = r^n e^{itn}$$

ですので, 同じ結果を得ることができます.

4.5.5 複素三角関数とハイパボリック関数

全ての三角関数, 逆三角関数およびハイパボリック関数は複素数の偏角で定義されます. i の有理倍数である偏角はハイパボリック関数の式で書き換えます.
関数 arcsinh は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の範囲の虚数部の値を生成します.

► **計算**

$\sin 5i = i \sinh 5$ $\cos \frac{5}{4i} = \cosh \frac{5}{4}$

$\tan(-3i) = -i \tanh 3$ $\arcsin 5i = i\,\mathrm{arcsinh}\, 5$

$\arccos \frac{5}{4i} = \frac{1}{2}\pi + i\,\mathrm{arcsinh}\,\frac{5}{4}$ $\arctan(-3i) = -i\,\mathrm{arctanh}\, 3$

$\frac{\pi}{2}i$ の整倍数の偏角を持つハイパボリック関数は**計算**コマンドで簡単化することができます.

▶ **計算**

$\sinh\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i$ $\cosh(40i\pi) = 1$ $\tanh\left(-10^{100}i\pi\right) = 0$

$\mathrm{arccosh}\, 0 = \frac{1}{2}i\pi$ $\mathrm{arccoth}\, 0 = \frac{1}{2}i\pi$

その他の複素数の偏角の場合は, **展開**コマンドを使って, 三角関数やハイパボリック関数に書き換えます.

▶ **展開**

$\sin\left(5i + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cosh 5 - \frac{1}{2}i\sinh 5$ $\cos\left(\frac{5}{4i} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cosh\frac{5}{4} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sinh\frac{5}{4}$

$\tan\left(-3i + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{i}{\tanh 3}$ $\sinh(x + i\pi) = -\sinh x$

特定の関数式の表示方法を求めるには, **書換え**コマンドを利用します.

▶ **書換え ＋ Sin と Cos**

$e^{2ix}\tan x = \frac{1}{\cos x}(\sin x)(\cos 2x + i\sin 2x)$

arcsin と arccos の場合, 分岐切断は $(-\infty, -1)$ と $(1, \infty)$ の実数区間になります.arctan の場合, 分岐切断は $(-\infty \cdot i, i]$ と $[i, \infty \cdot i)$ の虚数軸上の区間になります. arcsec と arccsc の場合, 分岐切断は $(-1, 1)$ の実数区間になります. arccot の場合, 分岐切断は $[i, -i]$ の虚数軸上の区間になります. 偏角が分岐切断を横切る場合, 値は移動します.

▶ **計算**

$\arcsin(-1.2) = -1.5708 + 0.62236i$ $\arcsin\left(-1.2 + \frac{i}{10^{10}}\right) = -1.5708 + 0.62236i$

$\arcsin\left(-1.2 - \frac{i}{10^{10}}\right) = -1.5708 - 0.622\,36$

arccot は $\mathrm{arccot}\, x = \arctan\frac{1}{x}$ で定義されますが,arccot 自体は arctan の式で書換えられない点に注意してください. この定義の結果として, 実数線は分岐切断を横切り,arccot は原点における飛躍不連続点を持ちます.

▶ **計算**

$\mathrm{arcsinh}(\sinh(3 + 25i)) = 3 - 8i\pi + 25i$

デフォルトの実数/複素数の設定では, **求解**+ **解**コマンドで三角関数の方程式の実数解と同様に複素数を求めます.

▶ **求解 ＋ 解**

$\tan^2 x - \cot^2 x = 1$, 解: $\left\{-\frac{1}{2}\pi + \arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\sqrt{5}+1}} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\cup\left\{\frac{1}{2}\pi - \arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\cup\left\{\frac{1}{2}\pi - \arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\sqrt{5}+1}} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\cup\left\{-\frac{1}{2}\pi + \arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

▶ **基本的な解のみを求める**

1. **ツール**メニューから**計算エンジン設定**を選択します.

2. 一般タブで基本的な解だけをチェックします.

► **求解 ＋ 解**

$\tan^2 x - \cot^2 x = 1$, 解: $\arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sqrt{5}}} - \frac{1}{2}\pi$

4.6　練習問題

1. 関数 $f(x) = x^3 + x\sin x$ と $g(x) = \sin x^2$ を定義して, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(x)g(x)$, $f(x)+g(x)$ を計算してください.
2. メトロポリタン空港では離陸から水平方向 1 mi 離れた時点で, 高度 800 ft を確保する必要があります. 上昇角度は平均的に何度になりますか?
3. $\sin nx$ の展開式は $\sin x$ と $\cos x$ によって構成されます. いま, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の場合の展開式を求め, そこから一般形を推定してください.
4. パラメータ t による関数 $(\cos t, \sin t)$ と $(t, \sin t)$ をグラフ化します. 最初のグラフに点 $(\cos 1, \sin 1)$ を, 次のグラフに点 $(1, \sin 1)$ をプロットします. そして, 2 つのグラフの関係を説明してください.
5. パラメータ t による関数 $(\cos t, \sin t)$, $(\cos t, t)$, $(t, \cos t)$ をグラフ化します. 最初のグラフに点 $(\cos 1, \sin 1)$ を, 次のグラフに点 $(\cos 1, 1)$, 3 つめのグラフに点 $(1, \cos 1)$ をプロットします. そして, 3 つのグラフの関係を説明してください.
6. 比を使ってラジアンを度に変換します. 等式 $\dfrac{\theta}{360} = \dfrac{x}{2\pi}$ を記述します. ここで, x はラジアンの値です. 求解サブメニューから解または数値解を選択し, 解を求めるための変数を θ とします. この方法を利用して, $x = \dfrac{13}{600}\pi$ を度に変換してください.
7. 三角形の解を求めるとは, 3 辺の長さや 3 つの頂点の角度 (度またはラジアン) を求めることを意味します.
   (a) 1 辺が c=2 で, 1 つの頂点の角度が $\alpha = \frac{\pi}{9}$ である直角三角形の解を求めなさい.
   (b) 2 辺が $a = 19$ および $c = 23$ である直角三角形の解を求めなさい. .
8. 正弦法則

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

   により, 1 辺と 2 つの頂点の角度, または 2 辺とその対角のうちのどちらか 1 つの頂点が分かれば, 三角形の辺の長さと頂点の角度を調べることができます. 1 辺が $c = 2$ で 2 つの頂点の角度が $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $\beta = \frac{2\pi}{9}$ である時, 三角形の解を求めなさい.
9. 正弦法則と余弦法則,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$$

   を使うと 2 辺とその頂点, または 3 辺の長さから三角形の解を求めることができます.
   (a) 2 辺が $a = 2.34$, $b = 3.57$, で 1 つの頂点の角度が $\gamma = \frac{29}{216}\pi$ の三角形の解を求めなさい.
   (b) 3 辺が $a = 2.53$, $b = 4.15$ $c = 6.19$ 三角形の解を求めなさい.

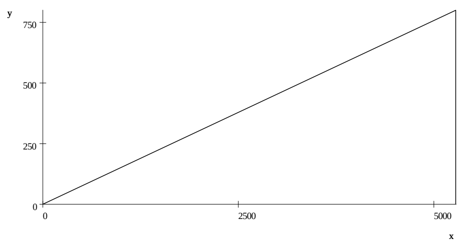
10. $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ を表示するための手順を記述し, 一般的な解を求めなさい.

4.7 練習問題の答え

1. 関数 $f(x) = x^3 + x\sin x$ と $g(x) = \sin x^2$ を定義して計算を行なった結果を次に示します.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \sin^3 x^2 + \sin x^2 \sin\left(\sin x^2\right) \\ g(f(x)) &= \sin\left(x^3 + x\sin x\right)^2 \\ f(x)g(x) &= \left(x^3 + x\sin x\right)\sin x^2 \\ f(x)+g(x) &= x^3 + x\sin x + \sin x^2 \end{aligned}$$

2. 高さ 800 ft で底辺が 5280 ft の直角三角形として角度を求めます.



上昇角度のサインは $\dfrac{800}{\sqrt{800^2 + 5280^2}}$ となります. **数値計算**コマンドを実行します.

$$\arcsin\frac{800}{\sqrt{800^2 + 5280^2}} = 0\,.15037$$

角度をラジアンから度に変換する場合は次のようにします.

$$\begin{aligned} 360 \times \frac{.15037}{2\pi} &= 8.6157 \\ 0.6157 \times 60 &= 36.942 \approx 37 \\ \theta &= 8°37' \end{aligned}$$

または次の式を解きます.

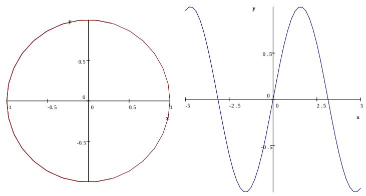
$$\begin{aligned} 0\,.15037\,\mathrm{rad} = \theta°, \text{ 解: } \{\theta = 8.\,6156\} \\ 0.6156\,° = x\,', \text{ 解: } 36.\,936 \end{aligned}$$

3. 展開計算を行ないます.

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\ \sin 3x &= 4\sin x\cos^2 x - \sin x \\ \sin 4x &= 8\sin x\cos^3 x - 4\sin x\cos x \\ \sin 5x &= 16\sin x\cos^4 x - 12\sin x\cos^2 x + \sin x \\ \sin 6x &= 32\sin x\cos^5 x - 32\sin x\cos^3 x + 6\sin x\cos x \end{aligned}$$

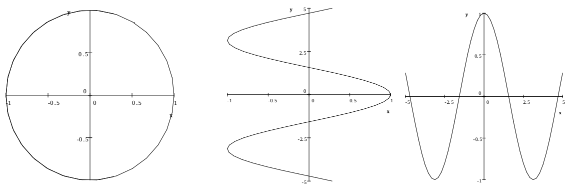
上記より一般形は, $\sin nx = 2^{n-1}\sin x\cos^{n-1}x - \cdots$ となり, 残りの項は $\sin x\cos^{n-(2k+1)}x$ となります.

4. 最初のグラフは原点を中心とする半径 1 の円です. 点 $(1, 0)$ から出発して反時計回りに円を描きます. 2 番目のグラフは角度 0 から 2π までの間で, 最初のグラフの y 座標が変化するグラフです. 点 $(\cos 1, \sin 1)$ はグラフ上に小さな点で表示されています. また, 点 $(1, \sin 1)$ は 2 番目のグラフで小さく表示されています.



$(\cos t, \sin t)$ $(t, \sin t)$

5. 最初のグラフは原点を中心とする半径 1 の円です. 点 $(1, 0)$ から出発して反時計回りに円を描きます. 2 番目のグラフは角度 0 から 2π までの間で, 最初のグラフの y 座標が変化するグラフです. 点 $(\cos 1, \sin 1)$ はグラフ上に小さな点で表示されています. また, 点 $(\cos 1, 1)$ は 2 番目のグラフで小さく表示されています. 3 番目のグラフは 2 番目のグラフで両軸を入れ替えたものです. 3 番目のグラフは $y = \cos x$ の形を表しています.

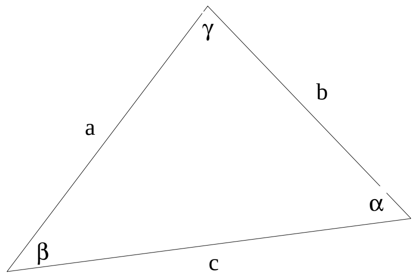


$(\cos t, \sin t)$ $(\cos t, t)$ $(t, \cos t)$

6. $\dfrac{\theta}{360} = \dfrac{\left(\frac{13}{600}\pi\right)}{2\pi}$ と記述します. 数式にカーソルを配置し, **求解**サブメニューから**解**を選択します. $\theta = \frac{39}{10}$ 度が得られます. **数値解**を選ぶと $\theta = 3.9$ 度が得られます.
7. 以下のような単純形式で計算するには, **ツール** + **計算エンジン設定**を選び, 一般タブにある求解オプションの基本的な解だけチェックボックスにチェックを付けます.
   (a) **関数定義**メニューから**新しい定義**コマンドを選択し, $\alpha = \frac{\pi}{9}$ と $c = 2$ を定義します. 式 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ に**計算**コマンドを事項して $\beta = \frac{7}{18}\pi$ となります. 式 $a = c\sin\alpha$ に**計算**コマンド (または**数値計算**コマンド) を実行して, $a = 2\sin\frac{1}{9}\pi$ $(= 0.68404)$ となります. 式 $b = c\cos\alpha$ to get $b = 2\cos\frac{1}{9}\pi$ $(= 1.8794)$ となります.
   (b) **関数定義**メニューから**新しい定義**コマンドを選択し, $a = 19$ と $c = 23$ を定義します. 式 $a^2 + b^2 = c^2$ にカーソルを配置して**求解**メニューから**解**または**数値解**コマンドを選択します. $b = 2\sqrt{42}$ $(= 12.96)$ が得られます. 式 $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$ に対してそれぞれ**求解**+ **解**コマンドを実行すると $\alpha = \arcsin\frac{19}{23}, \beta = \arccos\frac{19}{23}$; が得られます. ま

たは 2 行 1 列の行列式 $\begin{bmatrix} \sin\alpha = a/c \\ \alpha \in (0, \pi/2) \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} \cos\beta = a/c \\ \beta \in (0, \pi/2) \end{bmatrix}$ に対して**求解**+ **解**コマンドを実行すると $\alpha = 0.9721$, $\beta = 0.5987$ を得ることができます.

8. **関数定義**サブメニューから**新しい定義**コマンドを使って $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $\beta = \frac{2\pi}{9}$, と $c = 2$ と定義します. 式 $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ に**計算**コマンドを実行して $\gamma = \frac{2}{3}\pi$ を得ます. **関数定義**サブメニューから**新しい定義**コマンドを使って $\gamma = \frac{2}{3}\pi$ を定義します. 式 $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ と $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ に**求解** + **解**コマンドを実行して $a = \frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\frac{1}{9}\pi$ と $b = \frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\frac{2}{9}\pi$ を得ることができます. **求解** + **数値解**コマンドを利用すると数値解を求めることができます.
9. 一般的な三角形の解.



(a) $a = 2.34$, $b = 3.57$, と $\gamma = \frac{29}{216}\pi$ を定義します. 式 $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$ に**求解** + **解**コマンドを実行すると $c = 1.7255$. が得られます. 式 $c = 1.7255$ を定義します. 式 $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ および $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ に対して**求解** + **解**コマンドを実行します. または行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \\ \alpha \in (0, \pi/2) \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \\ \beta \in (0, \pi/2) \end{pmatrix}$ に対して**求解** + **数値解**コマンドを実行します. $\alpha = 0.58859$ と $\beta = 1.0104$ が得られます.

3 辺の長さが与えられている場合も同じ手法で求めることができます. 上記 γ を c に置き換えて考えてください.

(b) 3 辺 $a = 2.53$, $b = 4.15$, $c = 6.19$ を定義します. 式 $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$ に**求解** + **解**コマンドを実行すると $\gamma = 2.3458$ が得られます. $\gamma = 2.3458$ を定義します. 式 $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ および $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ に対して**求解** + **解**コマンドを実行します. または, 行列 $\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \\ \alpha \in (0, \pi/2) \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \\ \beta \in (0, \pi/2) \end{pmatrix}$ に対して**求解** + **数値解**コマンドを実行し, $\alpha = 0.29632$, と $\beta = 0.49948$ を得ます.

10. 極形式において, $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ となります. このとき $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ となります. 一般解の場合, $i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$ となり k が整数であれば $i^i = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$ となります.

第 5 章

関数の定義

記号から数式オブジェクトを作成したり, 複数の数式を組合せて関数を作成する場合は**関数定義**コマンドを利用します. 関数定義機能は非常に強力なツールです. 実際に定義を行う前に, 関数, 定数, 式の名称について解説します.

5.1 関数名と数式名

数学的に正しい計算式を記述したもの数式と呼びます. また, カッコで囲った引数を使って計算式を宣言したものを関数と呼びます. ただし, 関数の中には引数をカッコで囲わないものもあります. 詳細は 129 ページのカッコの不要な関数を参照してください. 一方, 引数を下付き文字として記述する場合もあります. 詳細は 104 ページを参照してください.

- 数式の例: x, $a^3b^{-2}c$, $x\sin y + 3\cos z$, $a_1a_2 - 3b_1b_2$
- 関数の例: $a\left(x\right)$, $G\left(x,y,z\right)$, $f_5\left(a,b\right)$.

5.1.1 関数や数式の命名方法

変数名や関数名は次のどちらかの条件を満たす必要があります.

1. 1 文字 (標準的な定数は例外とする). 下付き文字を付けてもよい.
   または
2. カスタム数式名. 下付き文字を付けてもよい. (参照 98 ページ) .

数式名には任意の数のダッシュ記号を付けることができます. しかし, 関数の場合は微分式を示すためにシステムに確保されていますので, ダッシュ記号を使うことはできません. 変数名にダッシュ記号を付ける場合は, それが数式で他の意味に解釈される恐れがない場合にのみ利用します.

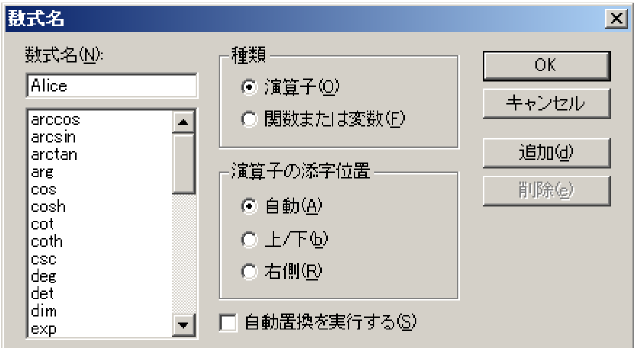
- 正しい数式名の利用方法: a, α_X, f_{123}, g_θ, Ω_∞, e_2, r'', Waldo (カスタム名), John$_3$ (下付き文字を付けたカスタム名).
- 正しい関数名の利用方法: a, α_X, f_{123}, g_θ, Ω_∞, e_2, sin, Alice (カスタム名), Lana$_2$ (下付き文字を付けたカスタム名).

- 誤った関数名の利用方法: ΔF (2 文字と理解される), π, e (標準定数として既に利用されている), f_{ab} (下付き文字が 2 文字ある), r' (ダッシュ記号は微分記号用に確保されている).

関数名として f_{123} を利用することができます．この下付き文字は 3 桁の数値として解釈されます．

5.1.2　カスタム名

一般的に, 関数名や数式名は 1 文字で命名します．もちろん, 下付き文字を付けてもかまいません．しかし, プログラムには予め定義された関数—たとえば gcd, inf, lcm—があります．これらは複数の文字で構成されていますが, 1 文字定義の関数や数式と同じように動作します．したがって, この複数文字による関数名は BACKSPACE キーを一回押すと, すべての文字が削除されます．これと同じスタイルの関数名や数式名を独自に作成することができます．
カスタム名には演算子と, 関数または変数の 2 種類があります．ダイアログでカスタム名の種類に演算子を選択すると, 例えば $\sum$ や $\int$ の場合のように添え字の位置を選択します．一方, 関数または変数の項目を選択した場合は, 通常の文字に下付き文字や上付き文字を付ける要領で操作します.



この 2 種類の例をインラインとディスプレイの場合に分けて以下に示します.

- インラインでの演算子: $\sum_{k=1}^{n}$, $\int_0^1$, $\operatorname{operator}_a^b$
- インラインでの関数または変数: $\mathrm{function}_k^j$, $\mathrm{variable}_c^d$

ディスプレイにおける演算子と, 関数または変数:

$$\sum_{k=1}^{n} \qquad \int_0^1 \qquad \operatorname*{operator}_a^b \qquad \mathrm{function}_k^j \qquad \mathrm{variable}_c^d$$

▶ カスタム名を作成する

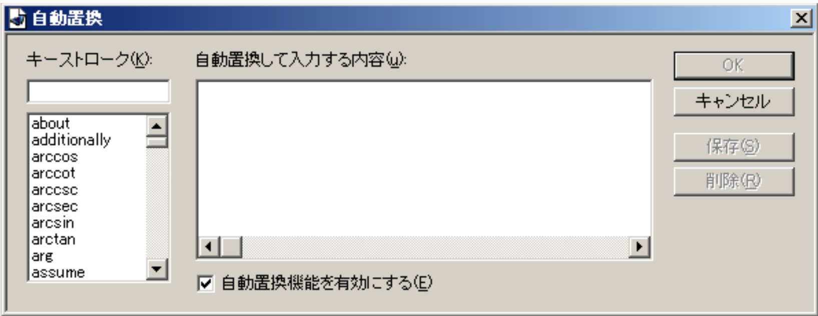
1. 数式名アイコン  をクリックするか, または**挿入** + **数式名**とします.
2. 数式名の下にあるテキストボックスにカスタム名を入力します.
3. 種類の項目で演算子, 関数または変数を選択します.

4. 演算子の場合は添字の位置を指定します.
5. 数式モードでカスタム名を入力した時に, 自動的に灰色で表示する場合は自動置換の項目をチェック,.OK ボタンをクリックします.

ダイアログを閉じると登録したカスタム名が画面に灰色で表示されます. 関数や数式を定義する際に, このカスタム名を利用することもできます. 入力した灰色のカスタム名は通常のテキストと同じようにコピー, 貼り付け, ドラッグできます. これを編集する場合は数式名ダイアログで行ないます.

5.1.3　自動置換

関数名 sin, arcsin, gcd などを数式モードで入力すると自動的に灰色で表示されます. **ツール** + **自動置換**と操作すると, このような機能をもった関数の一覧が表示されます.
自分で名前を付けて登録するカスタム関数や変数についても, 自動置換ダイアログを使って同じように灰色表示させることができます.



▶ **カスタム名を自動的に灰色表示させる**

1. **ツール**メニューから**自動置換**を選択します.
2. 目的のキーストロークを入力します. キーストロークはカスタム名などの短縮形を使うと便利です.
3. 自動置換のテキストエリアにカーソルを移動します. このダイアログが表示されている状態のまま, 数式名ボタン  をクリックします.
4. 数式名ダイアログを使って, キーストロークに反応して自動的に入力される実際の式を作成します.
5. OK ボタンをクリックします. 自動置換のテキストエリアにカスタム名が灰色で表示されます.
6. 保存ボタンをクリックし, さらに, OK ボタンをクリックしてダイアログを閉じます.

自動置換に関する解説はオンラインヘルプにも用意されています.

5.2　変数と関数の定義

数式処理メニューには**関数定義**のコマンドが用意されており，そこにはサブメニューとして，**新しい定義**，**定義の削除**，**定義の一覧**，**全定義の削除**，**定義の保存**，**定義の読込み**，**MuPAD 関数の定義**というコマンドが用意されています．**新しい定義**というコマンドは関数の定義と数式の命名の両方に利用できます．

5.2.1　変数への数値の代入と数式の命名

変数に数値を代入する場合は，**関数定義**メニューの**新しい定義**コマンドを利用します．

▶ z **に** 25 **を代入する**

1. 数式モードで $z = 25$ と入力します．
2. カーソルを数式に配置した状態にします．
3. 数式処理ツールバーの新しい定義ボタン  をクリックするか，**関数定義**サブメニューで**新しい定義**を選択します．または，CTRL + = とします．

▶ **計算**

$z = 25$　　　　$z^2 = 625$　　　　$6z^2 - 3z + 4 = 3679$

数値の代入には 2 つの記号"="と":="を使い分けることによって，それぞれ違った機能を持たせることができます．普通の等号は，変数を定義した時の値で代入および計算を行ないます．一方，コロンのついた等号は，変数の値を代数を利用して定義し，後から代数の値を変化させることによって変数自体をも変化させることのできる機能を持っています．前者の代入方法を**デファード計算**，後者を**フル計算**と呼んで区別することにします．フル計算に関する詳細は 101 ページを参照してください．

デファード計算

▶ z **に** 25 **を代入する**

1. 数式モードで $z = 25$ と入力します．
2. カーソルを数式に配置した状態にします．

数式処理ツールバーの新しい定義ボタン  をクリックするか，**関数定義**サブメニューで**新しい定義**を選択します．または，CTRL + = とします．

文書を閉じたり，変数の定義を削除するまでシステムは z の値を 25 とします．例えば，式"$3 + z$"に**計算**コマンドを実行すると"$= 28$"となります．

他の例 $x^2 + \sin x$ を用いて，この機能についてもう少し説明します．数式モードで，式 $y = x^2 + \sin x$ と入力してカーソルを式に配置します．**関数定義**サブメニューから**新しい定義**を選択します．定義した後で，y を使った計算を行なうと，すべての y は $x^2 + \sin x$ で置換されます．たとえば

$y^2 + x^3$ に計算コマンドを実行すると計算結果は次のようになります.

$$y^2 + x^3 = (x^2 + \sin x)^2 + x^3$$

ここでは変数名を 1 文字で指定しましたが, これを複数文字で指定する場合は 98 ページを参照してください.
変数への代入は数値だけなく, 数式を代入することも可能です. 次にその例を示します.

- 数値: $a = 245$
- 多項式: $p = x^3 - 5x + 1$
- 多項式の商: $b = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
- 行列: $z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- 積分: $d = \int x^2 \sin x dx$

この機能を活用すると色々な計算を効率的に行なえます.

Note　記号 p は多項式 $x^3 - 5x + 1$ を表すための記号として定義された訳で, 関数として定義された訳ではありません. 実際, $p(2)$ は多項式に 2 を代入した値にはならず, 多項式を 2 倍した　$p(2) = 2p = 2x^3 - 10x + 2$ となります.

デファード計算を使った関数を他の定義で利用する

既に定義した関数を他の関数で利用してもなんら問題はありません. 例えば式 $r = 3p - cq$ を定義し, 次に $s = nr + q$ を定義します. そして s に計算コマンドを実行すると $s = n(3p - cq) + q$ という計算結果が得られます. 式 r の定義を変更して, 再び式 s に計算コマンドを実行すると, 異なる結果が出力されることになります.

フル計算と代入

等号の前にコロンを付けて変数を定義するフル計算機能では, その時の値を保持します. つまり, 定義を行った時間的な順番にしたがって, 自分よりも前に定義されている値を利用します.

- フル計算させるためには等号の前にコロンを付けます.

▶ z に $25a$ を代入する

1. 数式モードで $z := 25a$ を入力します.
2. カーソルを式に配置します.
3. 数式処理ツールバーの新しい定義ボタン  をクリック, または, **関数定義**サブメニューから**新しい定義**コマンドを選択します. または, CTRL + = とします.

文書を閉じたり, 変数の定義を削除しない限り, z には $25a$ が代入されます. ただし, a が事前に $x + y$ などで定義されていたとすると, z の値は $25(x + y)$ になります. 次に関数定義の両者の

用法の違いについて例を用いて説明します．変数の定義を確認する場合は, **関数定義** ＋ **定義の一覧**コマンドを利用します.

Example 7 変数 $a = 1$, $x := a$, $y = a$, $a = 2$ を順番に定義します．そして x と y に**計算**コマンドを実行します.

$$x = 1 \qquad y = 2$$

変数 $a = b$, $x := a^2$, $y = a^2$, $a = 6$ を順番に定義します．そして x と y に**計算**コマンドを実行します.

$$x = b^2 \qquad y = 36$$

Example 8 式 $r = 3p - cq$, $s = nr + q$, $t := nr + q$ を順番に定義します．そして s と t に**計算**コマンドを実行します．計算結果として

$$s = n\,(3p - cq) + q \qquad t = n\,(3p - cq) + q$$

が出力されます．ここで新たに $r = x + y$ を定義します．s に**計算**コマンドを実行すると

$$s = n\,(x + y) + q \qquad t = n\,(3p - cq) + q$$

となり, 計算結果は変わりません.

5.2.2　1 変数の関数

関数を作成する場合は, 先程解説した変数の定義と同じ方法で行ないます.

▶ **変数 x に対して$ax^2 + bx + c$ で表すことのできる関数f を定義する**

1. 数式 $f\,(x) = ax^2 + bx + c$ を入力します.
2. 式にカーソルを配置します.
3. 数式処理ツールバーの新しい定義ボタン  をクリック, または, **関数定義**サブメニューの**新しい定義**を選択します.

▶ **関数定義 ＋ 新しい定義**

$f\,(x) = ax^2 + bx + c$

▶ **計算**

$f(t) = at^2 + bt + c \qquad f\,'(t) = 2at + b \qquad f\,(x + h) = a\,(x + h)^2 + b\,(x + h) + c$

関数を組合せて使う

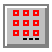
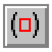
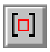
最初に関数 g と h を定義しておけば（ただし区間定義関数を除く）, つぎに示すような関数を作成することができます.

$$\begin{array}{lll} f(x) = 2g(x) & f(x) = g(x) + h(x) & f(x) = g(x)h(x) \\ f(x) = g(h(x)) & f(x) = (g \circ h)(x) & f(x) = g(x)/h(x) \end{array}$$

関数 $g(x)$ と $f(x) = 2g(x)$ を定義した場合, 仮に $g(x)$ の定義を変更すれば, $f(x)$ もその変更を反映します.

Note　関数同士の演算, 例えば $f+g$, $f-g$, $f \circ g$, fg, f^{-1} なども実行できます. 値 x における $f+g$ を求める場合は $f(x)+g(x)$ とします. 2 つの定義関数 f と g の合成関数は $f(g(x))$ または $(f \circ g)(x)$ と記述します. さらに 2 つの関数の積は $f(x)g(x)$ です. ある関数 $f(x)$ については, その逆関数を $f(y) = x$, 変数を y とすることによって求めることができます.

Example 9 $n \times 1$ の行列に関数計算を実行して, 計算結果の表を作成する.

1. **挿入**メニューから**行列**を選択, または  をクリックします.
2. 行数を 6, 列数を 1 とします.
3. 行列にカッコを付けます. 行列を選択して  または  をクリックします.
4. 行列に 5 つの x の値を入力します $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
5. 関数 $f(x) = x^2 + 3x + 5$ を定義します. 行列の前に f を付けて計算コマンドを実行します.

$$f\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+3x+5 \\ 5 \\ 9 \\ 15 \\ 23 \\ 33 \end{pmatrix}$$

2 つの行列にある x と y の値を計算するには, 各行列を隣り合わせにコピーします. マウスカーソルを行列の適当な場所に置き, **行列**サブメニューから**連結**を選びます.

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2+3x+5 \\ 5 \\ 9 \\ 15 \\ 23 \\ 33 \end{pmatrix}, \text{連結:} \begin{pmatrix} x & 3x+x^2+5 \\ 0 & 5 \\ 1 & 9 \\ 2 & 15 \\ 3 & 23 \\ 4 & 33 \end{pmatrix}$$

Tip　表に罫線をつけて表示する場合, **挿入** + **表**または  をクリックして表を作成します. そして, 各セルに値をコピーします. データの複製が完了したら, **編集** + **プロパティ**として線のタブを表示して罫線の設定を行ないます. 表を行列と同じように数式演算に利用することはできません.

関数名を使って直接計算できる場合もあります.

▶ **計算**

$$\arctan \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan x \\ 0 \\ \frac{1}{4}\pi \\ \arctan 2 \\ \arctan 3 \\ \arctan 4 \end{pmatrix}$$

何も計算が実行されない場合は, **関数定義** + **新しい定義**コマンドで関数を定義しなおして, 試してみましょう.

▶ **関数定義** + **新しい定義**

$\sigma(x) = \sin x$

▶ **計算**

$$\sigma \begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & 0 & \sin 1 & \sin 2 & \sin 3 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

5.2.3　関数の引数としての下付き文字

下付き文字は関数の引数として利用する他にも, 関数や変数の一部として利用することもできます. 次に用法の違いに関する例を示します.

1. 式 $a_i = 3i$ を関数として定義します. 下付き文字の定義ダイアログで**関数の引数**を選択します.
2. 式 $b_i = 3i$ を関数として定義します. 下付き文字の定義ダイアログで**変数の一部**を選択します.

このようにして定義した式に**計算**コマンドを実行した結果を次に示します.

$$a_i = 3i \qquad b_i = 3i \qquad a_2 = 6 \qquad b_2 = b_2$$

定義の一覧コマンドを選択すると, 次に示すような定義内容が表示されます.

$$a_i = 3i \text{ (変数としての下付き文字)}$$
$$b_i = 3i$$

a_i は引数 i を持つ関数であり, b_i の下付き文字は単なる添え字です.

Note　関数名は同時に下付き文字変数とインライン変数を取ることはできません．例えば $f_a(y) = 3ay$ を定義した場合，自動的に a は関数名の一部となり，y が引数となります．つまり，$f_a(5) = 15a$　　$f_2(5) = 5f_2$ となります．

5.2.4　区間定義関数

区間ごとに異なる式で表記される関数を定義することができます．この種の関数は区間定義関数，条件関数，または，多条件関数などと呼ばれます．　この区間定義関数に対しては，微積分学で利用される殆どの演算を適用することができます．例えば，**計算**，**プロット**，**微分**，**積分**などのコマンドを実行できます．

Note　ただし，区間定義関数の記述方法には厳密な決りがあります．

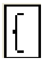
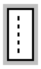
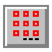
- 少なくとも 2 行 2 列，または 3 列の行列のなかに記述する必要があります．1 列目には各区間の関数を記述します．2 列目には文字モードで“if” または数式モードで“if” と書きます．ただし，行列が 2 列しかないときは，これを記述する必要はありません．そして右端の列には区間を入力します．
- このように記述した行列の左にはカッコを付け，右側には次の例に示すような空カッコを付けます．

区間を示す列の一番下のセルは，常に “それ以外の範囲” を示すものとして解釈されますので，必ずしも記入する必要はありません．

▶　区間定義関数の入力

1. 数式モードで次のように入力します．

$$f(x) =$$

2. ペアカッコのボタン  をクリックし，左カッコに  を選択します．そして右カッコには空カッコ (縦の破線)  を選びます．(縦の破線は，通常印刷されません．**表示** + **ヘルパーライン**が選択されているときのみ，赤い破線と同様，画面に表示されます．)
3. アイコン  をクリック，または**挿入** + **行列**とします．
4. 行数を区間の数だけ設定し，列数は 3 か 2 にします．
5. 左側のセルに関数を入力します．
6. 3 つの列を作成した時:
   (a) 中央ののセルに“if” と文字モードか，または，数式モードで入力します．
   (b) 範囲を 3 番目の列に入力します．

   または

   2 つの列を作成した時:
   (a) 2 列目の先頭に文字モードで“if” と書いてもかまいませんし，何も書かなくても問題はありません．
   (b) その後ろに範囲を記述します．

3 列の行列の記述例を次に示します．この行列を記述する場合はなるべく，**表示**メニューから**ヘルパーライン**を選択して画面に表示します．

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{if} \quad x<0 \\ 2 & \text{if} \quad 0\le x\le 1 \\ 2/x & \text{if} \quad 1<x \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x+2 & if & x<-2 \\ x & if & -2\le x<0 \\ 2 & if & 0\le x \end{cases}$$

2 列の行列の記述例を次に示します．

$$h(t)=\begin{cases} t & \text{if } t>0 \\ 0 & \text{if } t\le 0 \end{cases} \qquad k\left(x\right)=\begin{cases} x+2 & x<1 \\ 3/x & 1\le x \end{cases}$$

区間定義関数のプロット方法に関する詳細は 156 ページを参照してください．

▶ **区間定義関数を定義する**

1. 既に説明したカッコ付きの行列に関数を記述します．
2. 関数の任意の位置にカーソルを配置します．
3. アイコン  をクリック，または**関数定義**サブメニューの**新しい定義**を選択します．

目的の値を求める場合は**計算**コマンドを実行します．次に計算例を示します $f(-1)=1$, $f(\frac{1}{2})=2$, $f(2)=1$, $h(-1)=0$ または

$$g\left(t+1\right)=\begin{cases} t+3 & \text{if} & t+1<-2 \\ t+1 & \text{if} & -3-t\le 0\,(\text{and})\,t+1<0 \\ 2 & \text{if} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Note　区間定義関数の計算，プロット，微分，積分を行なう場合は最初に関数の定義を行ないます．そして，定義した関数名 f や $f(x)$ を使って計算を行ないます．演算を行なう場合は，必ずカーソルを関数の中に配置する必要があります．

5.2.5　汎用関数として定義する

汎用的な関数 $f(x)$ だけを定義する場合は，**関数定義** + **新しい定義**コマンドを利用します．この時，関数の具体的な数式を右辺に表記しません．他の関数名を同時に定義して演算などにも利用できます．次にその例を紹介します．

▶ **関数定義 ＋ 新しい定義**

$f(x)$ 　　　　　$g(x)=x^2-3x$

▶ **計算**

$f(g(x))=f\left(x^2-3x\right)$ 　　　　　$g(f(x))=f^2\left(x\right)-3f\left(x\right)$

5.2.6　汎用定数として定義する

汎用定数を定義する場合も, **関数定義** + **新しい定義**コマンドを使います. 汎用定数として定義しないものは, 変数として処理されてしまいます. a を汎用定数として定義し, b を普通の変数として利用する場合の例を次に示します.

▶　**関数定義** + **新しい定義**

a

▶　**微積分** + **陰関数**

$axy = \sin y$ (**微分変数** x) 解: $ay + axy' = (\cos(y))\, y'$

$bxy = \sin y$ (**微分変数** x) 解: $b'xy + by + bxy' = (\cos(y))\, y'$

5.2.7　複数の変数を持つ関数

複数の変数を持つ関数の場合は, 例えば $f(x, y, z) = ax + y^2 + 2z$ や $g(x, y) = 2x + \sin 3xy$ のように記述して**関数定義**サブメニューから**新しい定義**を選択するか, または, 数式処理ツールバーの新しい定義ボタンをクリックします. 1 変数の場合と同様, 代入した各変数の値から関数値を求めます.

5.3　定義した関数の管理

関数定義サブメニューには**新しい定義**コマンド以外にも, **定義の削除**, **定義の一覧**, **全定義の削除**, **定義の保存**, **定義の読込み**, **MuPAD 関数の定義**というコマンドがあります. 新しい定義, および, 定義を表示するためのボタンは数式処理ツールバーにそれぞれ,  と  として用意されています.

5.3.1　定義の表示

定義した関数や変数を一覧形式で表示することができます. **関数定義**サブメニューの**定義の一覧**, または数式処理ツールバーの  をクリックします. このコマンドを実行すると, 文書での関数および変数定義が一覧表示されます. 定義した関数や変数は, それらが定義された時間的な順番にしたがって一覧表示されます.

5.3.2　定義の削除

関数定義 + **新しい定義**コマンドで作成した定義を文書から削除する場合は次のようにします.

- 定義済みの数式全体, 数式名, 関数名を操作画面上で選択し, **関数定義**メニューから**定義の削除**を選択します.
- **関数定義**サブメニューから**全定義の削除**を選択します. これにより**関数定義**+ **新しい定義**で作成したすべての定義は削除されます.

- 同じ関数名で異なる定義を作成します.
- **数式処理の設定**, または, **設定**メニューの関数定義オプションタブで, **保存しない**というオプションを選択します. そして文書を閉じます. 定義情報の保存や読込みに関する詳細は次のセクションで解説します.

最初の方法で定義を削除する場合は, 画面上に目的の関数式, または, 関数名, 変数名を入力する必要があります. それから, その関数名や数式全体を画面上で選択し, 定義の削除コマンドを実行します. もちろん, 画面上に入力しなくても, 定義の一覧コマンドで表示したダイアログから画面にコピーしてもかまいません. ただし, 一覧表示したダイアログで定義を削除しても, 定義は文書から削除されません.

5.3.3　定義の保存と読込み

数式処理の設定ダイアログで関数定義の保存および読込みのデフォルト設定を変更できます. ローカル設定に関しては**数式処理**+ **設定**ダイアログで行ないます.
設定可能なオプションを次に示します.

1. 保存および読込みを自動実行しない. 必要に応じて自分で操作します.
2. 文書を開いたり, 閉じたりする場合に, 保存や読込みの確認メッセージを画面に表示します.
3. 定義を自動的に保存, および読込みます.

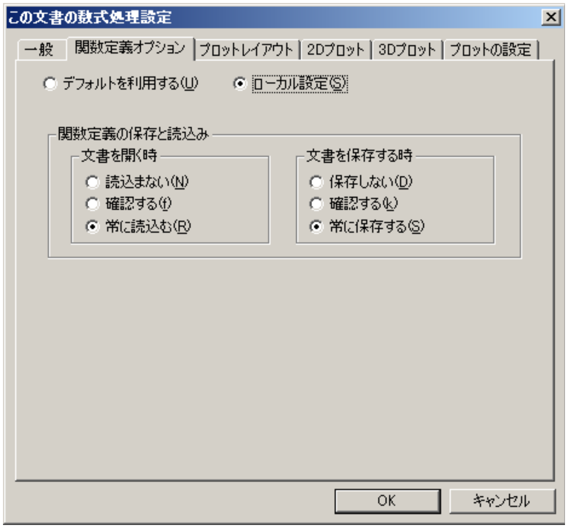
▶ グローバル設定の方法

- **ツール**+**数式処理の設定**とし, **関数定義オプション**タブを選び, 目的の設定を行ないます. そして OK ボタンをクリックしてダイアログを閉じます.

▶ ローカル設定の方法

- **数式処理** + **設定**とし, **関数定義オプション**タブで, **ローカル設定**を選択します. 目的の設定を行なって, OK ボタンをクリックしてダイアログを閉じます.

関数定義サブメニューの**定義の保存**と**定義の読込み**コマンドを使ってローカル設定を変更することもできます. **関数定義**サブメニューから**定義の保存**を選択すると, 現在読込まれているすべての定義を文書のバックアップファイルにコピーします. これにより, 文書を保存した時, その情報がすべて文書に保存されます. 逆に, 定義の読込みを選択すると, この時の情報をすべてアクティブにします.
先のオプションで定義を読込まない, というオプションを選択し, 次に定義を持った文書を開いて, 保存すると元の定義情報を全て失うことになります. 一度失われた情報を回復する手段はありませんので注意してください.



5.4　変数の仮定

変数の範囲を制限すると便利な場合があります．例えば，変数を正の値や実数に仮定する場合などです．このような制限は assume 関数を使って行うことができます．　変数の仮定を行うために次の 4 つの関数が用意されています．

assume　　additionally　　about　　unassume

これらの関数は目的の変数に特別な条件を設定したり，条件の情報を取得するためのものです．関数 “*assume*” は変数の条件を設定します．関数 “*additionally*” は条件を追加し，“*about*” は条件情報を取得するための関数です．関数 “*unassume*” は変数の条件を消去します．仮定に関する関数の引数としては次のようなものが用意されています．

real　complex　integer　positive　negative　nonzero

これらの関数や引数の入力は数式モードで行います．入力した関数と引数は灰色で表示されます．以下は変数 x と y を実数，変数 z を複素数と仮定しています．

$$x < y \qquad x < 3 \qquad x \neq 0 \qquad x \leq y \qquad x \geq 5$$
$$\operatorname{Im}(z) > 0 \qquad \operatorname{Re}(z) < 0 \qquad \operatorname{Re}(z) \neq 0$$

仮定 (条件) のデフォルトは複素平面です．変数は複素変数として仮定され，数式の解は複素解を含みます．

▶　変数に仮定 (条件) を設定する

1. 数式モードで assume と入力します．(自動的に灰色になります．)

2. カッコのボタンをクリックするか, または, キーボードからカッコを入力します.
3. 変数, カッコ, 条件の順で入力し, **計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

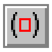
assume(real) $= \mathbb{R}$

この仮定を実行後は, 実数のみが計算されます.

▶ **求解 + 解**

$x^2 = -1$, 解なし.　　$x^2 = 1$, 解: $-1, 1$

▶ **仮定 (条件) を取り消して元に戻す.**

1. 数式モードで unassume と入力します.
2. カッコのボタン  をクリックするか, または, キーボードからカッコを入力します.
3. **計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

unassume()

▶ **求解 + 解**

$x^2 = -1$, 解: $-i, i$　　$x^4 = 1$, 解: $-i, -1, i, 1$

他の例を示します.

▶ **計算**

assume (positive) $= (0, \infty)$

▶ **求解 + 解**

$x^2 = 1$, 解: 1　　$x^4 = 1$, 解: 1

Scientific WorkPlace または *Scientific Notebook* を閉じ, 再度開いても, 仮定を取り消して元に戻ります.

▶ **現在の仮定 (条件) をチェックする.**

1. 数式モードで about と入力します. (自動的に灰色になります.)
2. カッコのボタンをクリックするか, または, キーボードからカッコを入力します.
3. **計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

about() = Global

この結果は, 特別な仮定 (条件) は設定されていないことを示しています.

▶ **変数に制約条件を設定する**

1. 数式モードで assume と入力します.
2. カッコのボタンをクリックするか, または, キーボードからカッコを入力します.

3. 変数名, カンマ, 条件の順で入力します.
4. **計算**コマンドを実行します.

▶ **変数 n を正の整数と仮定する**

- 式 assume $(n, \text{positive})$ にカーソルを置き, **計算**コマンドを実行します.

式 assume$(n, \text{positive})$, additionally$(n, \text{integer})$, そして about(n) の順番で**計算**コマンドを実行した結果を次に示します.

▶ **計算**

$\text{assume}(n, \text{positive}) = \text{positive}$

$\text{additionally}(n, \text{integer}) = \text{Type PosInt}$

$\text{about}(n) = \text{Type PosInt}$

▶ **変数の仮定条件をクリアする**

- 目的の変数を選択し, **関数定義** + **定義の削除**と操作します.

または

- unassume (変数名) と入力し, **計算**コマンドを実行します.

▶ **関数定義 + 定義の削除**

n

または

▶ **計算**

$\text{unassume}\,(n)$

どちらかの操作の後, about 関数を使って, 変数 n の状態をチェックします.

▶ **計算**

$\text{about}(n)$

仮定されていません. n を整数に仮定した場合, n^2 は正の整数と認識されます.

▶ **計算**

$\text{assume}(n, \text{integer}) = \mathbb{Z}$

$\text{about}\left(n^2\right) = \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$

$\left|n^2 + 1\right| = n^2 + 1$

▶ **複素変数 z の範囲を制限する**

- z の実数部と虚数部を仮定する

▶ **計算**

$\text{assume}\,(\operatorname{Re}(z) > 0) = (0, \infty) + i\mathbb{R}$

$\text{additionally}\,(\operatorname{Im}(z) < 0) = (0, \infty) + i\,(-\infty, 0)$

▶ **実変数x の範囲を制限する**

1. x を実数に仮定します.
2. additionally 関数を使って, x に追加の制限を行います.

▶ **計算**

$\text{assume}\,(x, \text{real}) = \mathbb{R}$

$\text{additionally}\,(x < 10) = (-\infty, 10)$

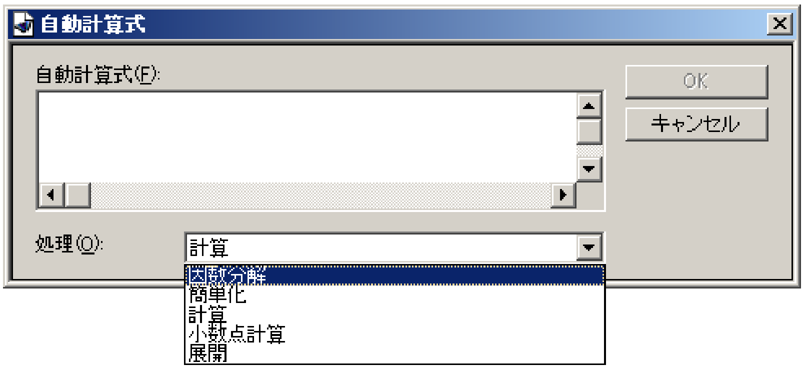
$\text{additionally}\,(x \geq -10) = [-10, 10)$

▶ **求解 + 解**

$\sin x = 0$, 解: $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

5.5 自動計算式

自動計算式のダイアログで登録した数式は, 自動的に数式処理されます. 画面には自動計算された値だけが出力されます. 自動計算式における変数の値を変更すると, 計算結果も常に更新されます.



▶ **自動計算式の入力**

1. フィールドツールバーの  をクリックします.
   または
   挿入メニューから**自動計算式**を選択します.
2. 自動計算式の入力エリアに目的の式を入力します.
3. 処理項目では自動計算式に対して実行する数式処理の計算機能を選択します. リストの右端にある矢印をクリックするとメニューが表示されます.
4. OK ボタンをクリックします.

自動計算を実行した結果が画面に表示されます.

ヘルパーラインをオンにしておくと, 自動計算式の値には背景色が表示されます.

▶ **自動計算式の背景色を変更する**

1. **タグ** + **タグのデザイン**を選択し, タグスタイルの編集を選択します.
2. タグプロパティの項目で特殊オブジェクトを選択します.

3. 特殊オブジェクトの項目で自動計算式を選び, 編集ボタンをクリックします.
4. 目的の背景色を選び, OK ボタンをクリックします.
5. **背景色の変更内容を有効にする場合は保存ボタンをクリックします**. そして OK ボタンをクリックします.

Example 10 **挿入**メニューから**自動計算式**を選択します. 自動計算式のエリアに a を入力し, **計算**コマンドを選択します. そして OK ボタンをクリックします.
自動計算式 a が画面上のカーソル位置に表示されます. 次に関数 $a = \sin x$ を定義します. これにより, すべての自動計算式 a は式 $a = \sin x$ により置換されます. さらに, a の定義を変更します. すると, 自動計算式 a を含む, 文章中の数式はすべて更新されます.

Example 11 2×2 行列を作成します. 先頭の入力ボックスにカーソルを置き  をクリックします. 自動計算式の入力エリアに a と入力します. 処理には計算コマンドを選択します. 各セルに対して b, $a+2b$, $(a-b)^2$ と, 自動計算式を使って入力します.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a+2b & (a-b)^2 \end{bmatrix}$$

次に $a = \sin x$ および $b = \cos x$ と定義します. 行列は次のようになります.

$$\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \sin x + 2\cos x & (\sin x - \cos x)^2 \end{bmatrix}$$

さらに $a = \ln x$ および $b = e^x$ と変更してみます. 行列は次のようになります.

$$\begin{bmatrix} \ln x & e^x \\ \ln x + 2e^x & (\ln x - e^x)^2 \end{bmatrix}$$

Example 12 5 行 2 列の表を作成します. 自動計算式 x, y, z, $x+y+z$ を次のように入力します.

日付	収入
01/31/2002	x
02/28/2002	y
03/31/2002	z
合計	$x+y+z$

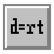
変数 $x = 20.56$, $y = 18.92$, $z = 23.45$ を定義すると, 表は次のようになります.

Date	Income
01/31/2002	20.56
02/28/2002	18.92
03/31/2002	23.45
Total	62.93

自動計算式の機能を使えば, 選択問題の作成も簡単です. 選択問題を作成する場合, 文書中で利用する変数を定義する必要があります. ここでは変数名を設問ごとに代えるのは面倒なので, 数式名 (参照 98 ページ) を上手に利用することにします.

ここでは手作業で選択問題を作成する方法を紹介します. 選択問題を自動的に作成する機能に関してはオンラインヘルプにあるオンラインクイズの項目を参照してください.

Example 13 サンプル問題にあるように変数 a1 と b1 を数式名として, 自動計算式を使って入力します.

-  をクリックし, 次に  をクリックします. **または**, **挿入**メニューから**自動計算式**とし, さらに, 同じ**挿入**メニューから**数式名**とします.
- ヘルパーラインをオンにして, 変数 a1 , b1 , b1 / a1 が自動計算式に入力されていることを確認するため, 背景色を付けます.

この例では, 変数 a1 や b1 の定義を変更することによって選択問題を作成します.
次式を満たす x の範囲を求めてください $\mathrm{a1}\,x - \mathrm{b1} < 0$?

a. $x < \mathrm{b1}\,/\,\mathrm{a1}$
b. $x > \mathrm{b1}\,/\,\mathrm{a1}$
c. $x > \mathrm{b1}$
d. $x < \mathrm{b1}$
e. その他

ここで次のように定義します. 数式モードで $\mathrm{a1} = 2$ および $\mathrm{b1} = 5$ と入力し, それぞれ, **関数定義** + **新しい定義**コマンドを実行します.
次式を満たす x の範囲を求めてください $2x - 5 < 0$?

a. $x < 5/2$
b. $x > 5/2$
c. $x > 5$
d. $x < 5$
e. その他

選択問題を作成したら, それを印刷し, さらに a1 と b1 の定義を変更し, 色々な問題を作成してみましょう.

5.6 外部関数

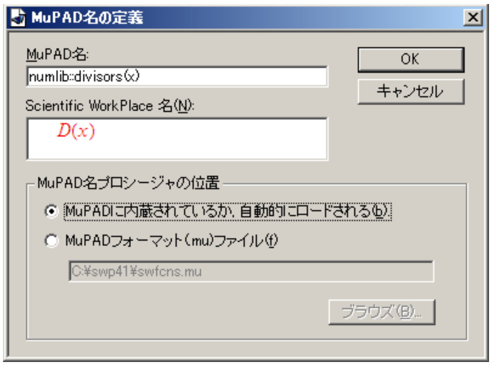
数式処理メニューに表示されている関数以外の, 計算エンジン内蔵の関数やユーザ定義の関数へアクセスする方法について解説します. これらは, 計算エンジンのライブラリに用意されている関数またはユーザ定義の関数を使います.
関数定義 + **MuPAD 関数の定義**のダイアログボックスで定義した関数は, 保存したり, 読み込むことができます. 詳細は, 定義の保存と読み込み (参照 108 ページ) をご覧下さい. MuPAD 名に一致している関数は, 定義とマッピングウィンドウに表示されますが, **全定義の削除**コマンドで削除されません. MuPAD 関数を削除するには, 関数名を選択し, **数式処理** + **関数定義** + **定義の削除**コマンドを選択します.

5.6.1　MuPAD **ライブラリ関数へのアクセス**

正の整数の除算を行う関数”divisors” へアクセスする方法について解説します.

▶ **MuPAD 関数 divisors に関数名 D を設定し, アクセスする.**

1. **関数定義**サブメニューの MuPAD **関数の定義**を選択します.
2. ダイアログの各項目へ次のように入力します.
   - MuPAD 名: numlib::divisors(x)
   - Scientific Notebook (WorkPlace) 名: $D(x) = x$
   - MuPAD に内蔵されているか, 自動的にロードされるを選択
3. OK ボタンをクリックします.



▶ **計算**

$D\,(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Scientific WorkPlace と *Scientific Notebook* では列ベクトル, 行ベクトルから n 次元ベクトルまで, カッコやカギカッコを使った色々なベクトルの記述が可能です. しかし, MuPAD ライブラリの関数を利用する場合, 引数の記述方法は, MuPAD の文法に従う必要があります. MuPAD の文法に関する詳細は, マニュアルをご参照ください.

プログラムには MuPAD の豊富なライブラリが内蔵されています. MuPAD 関数ダイアログを使ってアクセスできる関数の一覧を次に示します.

MuPAD 関数	サンプル *SNB* 関数
nextprime(x)	$p(n)$
ithprime(x)	$I(n)$
isprime(n)	$q(n)$
numlib::phi(x)	$\varphi(n)$
numlib::legendre(a,b)	$L(a,b)$
numlib::divisors(x)	$d(x)$
polylib::resultant(a,b,x)	$r(a,b,x)$
lllint(a)	$L\,(a)$

次のサンプルでは, MuPAD 関数名を “ithprime” にしています．この関数は, 素数の i 番目の数を返します.

▶ **MuPAD 関数 ithprime を I という名前にして, アクセスします.**

1. **関数定義**メニューから **MuPAD 関数の定義**を選択します.
2. MuPAD 名に ithprime(x) と入力します.
3. Scientific WorkPlace (Notebook) 名に $I\,(x)$ と入力します.
4. MuPAD に内蔵されているか, 自動的にロードされるを選択し, OK をクリックします.

この式に**計算**コマンドを実行すると, 次の結果が得られます.

$$I\,(100) = 541$$
$$I\,(1000000000) = 22\,801\,763\,489$$

438 ページには MuPAD 関数“nextprime”のサンプルが用意されています.
この方法によって定義した MuPAD 関数は, 先に紹介した方法で保存および読込みを行なえます. 詳細は 97 ページを参照してください．次の例で示すように複数文字からなる関数名を MuPAD 関数ダイアログボックスで入力することもできます．MuPAD 関数名ダイアログの Scientific WorkPlace (Notebook) 関数名テキストボックスにカーソルを配置し, 数式名アイコン  をクリックします．そして, 目的の数式名を入力し, OK ボタンをクリックします.

5.6.2　ユーザ定義の MuPAD 関数を追加する

MuPAD の言語で記述した関数をユーザ定義関数として利用することができます．MuPAD 言語で記述したファイルは, filename.mu の形式で保存します．この定義ファイルを**関数定義**サブメニューの **MuPAD 関数の定義**コマンドで登録します.

▶ **関数 “myfunc” に“M” という名前を付けてアクセスする**

1. **関数定義**メニューから **MuPAD 関数の定義**を選択します.
2. ダイアログボックスに次のように入力します.

- MuPAD 名: myfunc(x)
- Scientific Notebook (WorkPlace) 名: $M(x)$
- MuPAD 名プロシージャの位置
  a. MuPAD フォーマットファイル (.mu file) をチェック
  b. ファイルのパス: /dirname/subdirname/myfunc.mu を入力します

3. OK ボタンをクリックします.

このようにして MuPAD ライブラリとリンクした関数 $M(x)$ を定義します. MuPAD 関数の定義の際に利用する関数の命名法は, 通常の関数定義の時のルール (97 ページ) と同じです.
MuPAD 関数の定義ダイアログで作成した関数は, 定義の保存や定義の読込みコマンドを使って, 文書の保存や読込みを行なう時に, 同時にメモリー上にロードできます. 定義の一覧ダイアログに MuPAD 関数は表示されますが, **全定義の削除**コマンドで削除することはできません. 削除する場合は, 目的の関数を表示し, 関数名を選択して**数式処理**+ **関数定義** + **関数の削除**を選択します.

5.7　コマンド表

定数と関数は**数式処理**メニューから選択したり, 数式に直接入力して利用します.

5.7.1　定数

標準的な定数は, いわゆる普通の記述方法で表現できます. しかし, 例えば, gamma 定数を数式モードで入力しても, 自動的に灰色で表示されません. この定数を正しく認識させる場合は**挿入**+ **数式名**ダイアログから入力します. この方法で入力した場合のみガンマ定数として認識されます.

SNB/SW	*MuPAD*	内容
e	exp(1) または E	自然対数の底
i または j (参照 35 ページ)	I	虚数単位: $\sqrt{-1}$
π	PI	円周率
gamma	EULER	$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n\right)$
∞	infinity	正の無限大
true	True	ブール演算の真
false	False	ブール演算の偽
FAIL, undecidable	FAIL	決定できません
		または存在しない関数

5.7.2　数式処理メニューのコマンド

次の表は**数式処理**メニューに用意されているコマンドの MuPAD におけるオリジナル関数名です. アイコンが表示されているものは, それが MuPAD の関数名でプログラミングされたものであることを示します.

ここに表示されていない MuPAD の関数名にアクセスする場合は**関数定義+ MuPAD 関数の定義**コマンドを利用してください (参照 114 ページ).

代数

数式処理メニュー	*MuPAD*
計算	eval
数値計算	float
簡単化	simplify
因数分解	factor
因数分解	ifactor
展開	expand
相等チェック	is

数式処理 + 結合メニュー	*MuPAD*
指数	combine
対数	combine
累乗	simplify
初等関数	simplify

数式処理 + 書換えメニュー	*MuPAD*
有理数	numeric::rationalize
小数点	float
指数	rewrite
階乗	rewrite
ガンマ	rewrite
対数	rewrite
Sin と Cos	rewrite
Sinh と Cosh	rewrite
Tan	rewrite
極座標	
直交座標	rectform
方程式から行列	
行列から方程式	

数式処理 + 求解メニュー	*MuPAD*
解	solve
数値解	numeric::fsolve
整数解	Dom::Integer + solve
漸化式	rec + solve

数式処理 + 多項式メニュー	*MuPAD*
項の整理	collect
除算	div
部分分数	parfrac
複素数解	solve
並べ替え	polylib::sortMonomials
コンパニオン行列	linalg::companion

微積分

数式処理 + 微積分メニュー	*MuPAD*
部分積分	intlib::by parts
置換積分	intlib::changevar
部分分数	parfrac
近似積分	student::trapezoid
近似積分	student::simpson
近似積分	student::riemann
近似積分のプロット	
近似積分のプロット	
近似積分のプロット	
極値を求める	
繰返し計算	
陰関数の微分	diff

数式処理メニュー	*MuPAD*
べき級数	series
べき級数	taylor

微分方程式

数式処理メニュー	*MuPAD*
常微分方程式 + 解	ode + solve
常微分方程式 + ラプラス	ode::laplace
常微分方程式 + 数値解	numeric::odesolve2
常微分方程式 + 級数	
変換 + フーリエ	transform::fourier
変換 + 逆フーリエ	transform::invfourier
変換 + ラプラス	transform::laplace
変換 + 逆ラプラス	transform::invlaplace

ベクトル解析

数式処理 + ベクトル解析メニュー	*MuPAD*
ヤコビアン	linalg::jacobian
ヘッセ	linalg::hessian
スカラーポテンシャル	scalarpot
ベクトルポテンシャル	linalg::vectorPotential
基底変数の設定	

行列

数式処理 + 行列メニュー	*MuPAD*
随伴行列	linalg::adjoint
特性多項式	linalg::charPolynomial
コレスキ分解	linalg::cholesky
列の基底	linalg::basis
連結	linalg::concatMatrix
コンディションナンバー	norm
正負値の判定	linalg::isPosDef
行列式	linalg::det
固有値	linalg::eigenvalues
固有ベクトル	linalg::eigenvectors
要素の作成	
ガウス消去法 (整数値)	linalg::gaussElim
ガウス消去法	linalg::gaussElim
エルミート形式	linalg::hermiteForm
エルミート転置行列	conjugate + linalg::transpose

数式処理 + 行列メニュー	*MuPAD*
逆行列	numeric::inverse
ジョルダンブロック	linalg::jordanForm
最小多項式	linalg::minpoly
ノルム	norm
解空間の基底	linalg::nullspace
直交行列テスト	linalg::isUnitary
パーマネント	linalg::permanent
PLU 分解	numeric::factorLU
QR 分解	numeric::factorQR
ランダム行列の作成	linalg::randomMatrix
階数	linalg::rank

数式処理 + 行列メニュー	*MuPAD*
有理標準形	linalg::rationalForm
階段行列	linalg::GaussJordan
変形	π
行の基底	linalg::basis
特異値	numeric::singularvalues
スミス標準形	linalg::HermiteForm
スペクトル半径	π
重ね	linalg::stackMatrix
特異値分解	numeric::singularvectors
トレース	linalg::tr
転置	linalg::transpose

単体

数式処理 + 単体メニュー	*MuPAD*
双対	π
可能判定	π
最大化	linopt::maximize
最小化	linopt::minimize
標準化	π

統計

数式処理 + 統計メニュー	*MuPAD*
カーブフィット + 多重回帰	stats::reg
カーブフィット + 多重回帰	stats::reg
カーブフィット + 多重回帰	stats::linReg
カーブフィット + 多項式回帰	stats::reg

数式処理 + 統計メニュー	*MuPAD*
乱数 + ベータ	π
乱数 + 二項分布	π
乱数 + コーシー	π
乱数 + カイ二乗	π
乱数 + 指数	π
乱数 + F	π
乱数 + ガンマ	π
乱数 + 正規	π
乱数 + ポアソン	π
乱数 + スチューデント t	π
乱数 + 一様分布	π
乱数 + ワイブル	π

数式処理 + 統計メニュー	*MuPAD*
平均値	stats::mean
中央値	stats::median
最頻値	stats::modal
相関	π
共分散	π
幾何平均	stats::geometric
調和平均	stats::harmonic
平均偏差	π
モーメント	π
分位数	stats::a_quantil
標準偏差	stats::stdev
分散	stats::variance

2D プロット

数式処理 + 2D プロットメニュー	*MuPAD*
直交座標	plotfunc
直交座標	plot::Polygon
極座標	plot::polar
陰関数	plot::contour
パラメトリック	π
等角写像	π
勾配	π
ベクトルフィールド	plot::vectorfield
常微分方程式	plot::ode
位相平面	π
直交座標, 編集 + プロパティ, 軸スケール	plot2d
直交座標, 編集 + プロパティ, 軸スケール	plot2d

3D プロット

数式処理 + 3D プロットメニュー	*MuPAD*
直交座標	plot3d
直交座標	plot3d
直交座標	plot3d
円柱座標	plotlib::cylindrical plot
球面座標	plotlib::sphericalplot
環	plot3d
勾配	plot3d
ベクトルフィールド	plot3d

5.7.3　関数と数式

記述した関数を実行する場合は, **数式処理** + **計算**コマンドまたは CTRL + E とします. ただし, 関数によっては直接数式モードで入力するものと, 数式名の機能を使って入力するものがあります. 入力した関数名が画面上で自動的に灰色に変わらない場合, **挿入** + **数式名**としてテキストボックスに数式名を入力します. MuPAD 関数で計算コマンドを実行した時に利用されているものを次の表に示します.

代数

SN/SWP	*MuPAD*
$\sqrt{x}$　または　$x^{1/2}$	sqrt(x)
$\sqrt[n]{x}$	x^(1/n)
$\lvert x\rvert$　または　$\operatorname{abs}(x)$	abs(x)
$\max(a,b,c)$ または $a \vee b \vee c$	max(a,b,c)
$\min(a,b,c)$ または $a \wedge b \wedge c$	min(a,b,c)
$\gcd(x^2+1, x+1)$	gcd(x^2+1,x+1)
$\operatorname{lcm}(x^2+1, x+1)$	lcm(x^2+1,x+1)
$\left\lfloor \frac{123}{34} \right\rfloor$	floor(123/34)
$\left\lceil \frac{123}{34} \right\rceil$	ceil(123/34)

SN/SWP	*MuPAD*
$\binom{6}{2}$	binomial(6,2)
$x!$	x!
$123 \bmod 17$	123 mod 17
$a^n \bmod m$	powermod(a,n,m)
$3x^3 + 2x \bmod x^2 + 1$	divide + Rem
$\{a,b\} \cup \{b,c\}$	{a,b}union{b,c}
$\{a,b\} \cap \{b,c\}$	{a,b}intersect{b,c}
$\operatorname{signum}(x)$	sign(x)

三角関数 *

SN/SWP	*MuPAD*
$\sin x$ または $\sin(x)$	sin(x)
$\cos x$	cos(x)
$\tan x$	tan(x)
$\cot x$	cot(x)
$\sec x$	sec(x)
$\csc x$	csc(x)
$\arcsin x$ または $\sin^{-1} x$	arcsin(x)
$\arccos x$ または $\cos^{-1} x$	arccos(x)
$\arctan x$ または $\tan^{-1} x$	arctan(x)
$\operatorname{arccot} x$ または $\cot^{-1} x$	arccot(x)
$\operatorname{arcsec} x$ または $\sec^{-1} x$	arcsec(x)
$\operatorname{arccsc} x$ または $\csc^{-1} x$	arccsc(x)

* 三角関数の引数に普通, カッコは付けません. 引数とカッコに関する詳細は 129 ページを参照してください.

指数, 対数, ハイパボリック関数 *

SN/SWP	*MuPAD*
e^x または $\exp(x)$	exp(x)
$\log x$ または $\ln x$ (参照 80 ページ)	ln(x)
$\log_{10} x$　(参照 71 ページ)	ln(x)/ln(10)
$\sinh x$	sinh(x)
$\cosh x$	cosh(x)
$\tanh x$	tanh(x)
$\coth x$	coth(x)
$\cosh^{-1} x$ または $\operatorname{arccosh}(x)$	arccosh(x)
$\sinh^{-1} x$ または $\operatorname{arcsinh}(x)$	arcsinh(x)
$\tanh^{-1} x$ または $\operatorname{arctanh}(x)$	arctanh(x)

* 三角関数の引数に普通, カッコは付けません. 引数とカッコに関する詳細は 129 ページを参照してください.

微積分

SN/SWP	*MuPAD*
$\frac{d}{dx}(x\sin x)$	diff(x*sin(x),x)
f', Df, D	D(f)
$f'(3)$	D(f)(3)
$\int x\sin x\,dx$	int(x*sin(x),x)
$\int_0^1 x\sin x\,dx$	int(x*sin(x),x = 0..1)
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$	limit(sin(x)/x,x=0)
$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2}{2^i}$	sum(i^2/2^i, i = 1..infinity)

複素数

SN/SWP	*MuPAD*
$\mathrm{Re}\,(z)$	Re(z)
$\mathrm{Im}\,(z)$	Im(z)
$\lvert z\rvert$	abs(z)
$\mathrm{csgn}(z)$	
$\mathrm{signum}\,(z)$	sign(z)
z^*	conjugate(z)
$\arg(z)$	arctan(Im(z)/Re(z))

複素符号関数 $\mathrm{csgn}(z)$ と 符号関数 $\mathrm{signum}\,(z)$ の定義を次に示します.

$$\mathrm{csgn}(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{Re}\,(z) > 0; \text{ or } \mathrm{Re}\,(z) = 0 \text{ and } \mathrm{Im}\,(z) \geq 0 \\ -1 & \text{if } \mathrm{Re}\,(z) < 0; \text{ or } \mathrm{Re}\,(z) = 0 \text{ and } \mathrm{Im}\,(z) < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{signum}\,(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} \text{ if } z \neq 0 \\ 0 \text{ if } z = 0 \end{cases}$$

線形代数

SN/SWP	*MuPAD*
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	SWPmatrix(2,3,[[1,2,3],[4,5,6]])
AB	A*B
A^{-1}	A^(-1)
A^T	linalg::transpose(A)
$A \bmod 17$	map(A, x -> x mod 17)
A^H	conjugate + linalg::transpose
AB^{-1}	A*B^(-1)
$A^{-1} \bmod 17$	map(A^(-1), x -> x mod 17)
$\|x\|_n$	norm(x,n)
$\|x\|_F$	norm(x,Frobenius)
$\|x\|_\infty$	norm(x,Infinity)

ベクトル解析

SN/SWP	*MuPAD*
∇xyz	linalg::grad(x*y*z,[x,y,z])
$\|(1,-3,4)\|_p$	norm(SWPmatrix(1,3,[[1,-3,4]]),p)
$S \times T$	linalg::crossProduct(S,T)
$S \cdot T$	linalg::scalarProduct(S,T)
$\nabla \cdot S$	linalg::divergence(S,v)
$\nabla \times S$	linalg::curl(S,v)
$\nabla^2 \left(x^2yz^3\right)$	linalg::divergence(linalg::grad(x^2*y*z^3,[x,y,z]),[x,y,z])

微分方程式

SN/SWP	*MuPAD*
$\mathcal{F}(f(t), t, w)$	transform::fourier(expr,t,w)
$\mathcal{F}^{-1}(f(t), t, w)$	transform::ifourier(expr,t,w)
$\mathcal{L}(f(t), t, s)$	transform::laplace(expr,t,s)
$\mathcal{L}^{-1}(f(s), s, t)$	transform::ilaplace(expr,s,t)
$\mathrm{Dirac}(x)$	dirac(x)
$\mathrm{Dirac}(x, n)$	
$\mathrm{Heaviside}(x)$	heaviside(x)

統計

次の表に示す分布関数および密度関数は数式モードで入力すると自動的に灰色で表示されます．灰色で表示されない場合は，**挿入** ＋ **数式名**として関数名を入力します．このようにして入力しないと灰色で表示されません．

SN/SWP	内容
NormalDist, NormalDen	正規分布
TDist, TDen, TInv	スチューデント t 分布
ChiSquareDist, ChiSquareDen, ChiSquareInv	カイ 2 乗分布
FDist, FDen, FInv	F 分布
ExponentialDist, ExponentialDen, ExponentialInv	指数分布
WeibullDist, WeibullDen, WeibullInv	ワイブル分布
GammaDist, GammaDen	ガンマ分布
BetaDist, BetaDen	ベータ分布
CauchyDist, CauchyDen	コーシー分布
UniformDist, UniformDen	一様分布
BinomialDist, BinomialDen	二項分布
PoissonDist, PoissonDen	ポアソン分布
HypergeomDist, HypergeomDen	超幾何分布

特別な関数

次の関数の中には，数式モードで入力しても自動的に灰色に変更されないものがあります．その場合は**挿入** ＋ **数式名**コマンドを使って関数名を入力してください．

SN/SWP	*MuPAD*	内容
$\mathrm{bernoulli}\,(n)$	bernoulli(n)	n 次のベルヌイ数: $\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bernoulli}\,(n)\,\frac{t^n}{n!}$
$\mathrm{bernoulli}\,(n,x)$	bernoulli(n,x)	n 次のベルヌイ多項式: $\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bernoulli}\,(n,x)\,\frac{t^n}{n!}$
$\mathrm{BesselI}_v\,(z)$ または $I_v(z)$	besselI(v,z)	ベッセル関数
$\mathrm{BesselK}_v\,(z)$ または $K_v(z)$	besselK(v,z)	ベッセル関数
$\mathrm{BesselJ}_v\,(z)$ または $J_v(z)$	besselJ(v,z)	ベッセル関数
$\mathrm{BesselY}_v\,(z)$ または $Y_v(z)$	besselY(v,z)	ベッセル関数
$\mathrm{Beta}\,(x,y)$	beta(x,y)	ベータ関数: $\dfrac{\Gamma\,(x)+\Gamma\,(y)}{\Gamma\,(x+y)}$
$\mathrm{Chi}\,(z)$		ハイパボリックコサイン積分: $\mathrm{gamma}+\ln z-\int_0^z\frac{1-\cosh t}{t}dt \quad (\arg(z)<\pi)$
$\mathrm{Ci}(x)$	Ci(x)	コサイン積分: $\mathrm{gamma}+\ln x-\int_0^x\frac{1-\cos t}{t}dt$
$\mathrm{dilog}\,(x)$	dilog(x)	ダイロガリズム関数: $\int_1^x\dfrac{\ln t}{1-t}dt$
$\mathrm{Ei}(x)$	eint(x)	指数積分: $\int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}dt$
$\mathrm{erf}(x)$	erf(x)	エラー関数: $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$
$1-\mathrm{erf}(x)$	erfc(x)	誤差関数
$\Gamma\,(z)$	igamma(z,0)	ガンマ関数: $\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$
$\Gamma\,(a,z)$	igamma(a,z)	不完全ガンマ関数: $\int_z^{\infty}e^{-t}t^{a-1}dt$
$\mathrm{LambertW}(x)$	lambertW(x)	$\mathrm{LambertW}\,(x)\,e^{\mathrm{LambertW}(x)}=x$
$\mathrm{polylog}\,(k,x)$		多重対数関数: $\mathrm{polylog}\,(k,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^k}$
$\mathrm{Psi}(x)$	psi(x)	Psi 関数: $\psi\,(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma\,(x)$
$\mathrm{Psi}(n,x)$	psi(x,n)	Psi 関数の n 次導関数
$\mathrm{Shi}\,(x)$		ハイパボリックサイン積分: $\int_0^x\frac{\sinh t}{t}dt$
$\mathrm{Si}(x)$	Si(x)	サイン積分: $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$
$\zeta(s)$	zeta(x)	ゼータ関数: $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ for $s>1$

5.8　引数カッコの不要な関数

関数は引数をカッコで囲むものと, カッコを付けない関数の 2 種類に分けることができます. ガンマ関数 $\Gamma(x)$ や指数関数 $\exp(x)$ は, 引数をカッコで囲む一般的な関数で, $\sin x$ や $\ln x$ 引数にカッコを付けない種類の関数です. 両者の違いは, 関数の引数を常にカッコで囲むか, 否かの違いだけです.

カッコを付けない関数には 26 種類のものがあります. 6 個の三角関数, それに対応するハイパボリック関数, それに $\arctan(x)$ のように先頭に "arc" をつけて表現する逆関数が三角関数とハイパボリック関数に対して存在します. さらに関数 log と ln を数えることができます. これらの関数は書籍やジャーナルでは, 一般的な関数とは別に, カッコを付けずに記述されます.

それ以外の関数の引数には必ずカッコを付けます. ここでカッコを必ず付ける関数 $\Gamma(a+b)x$ について考えてみます. この場合, 関数 Γ の点 $a+b$ における値と x の積と解釈されてしまいます. 一方, カッコの不要な $\sin(a+b)x$ は, 点 $(a+b)x$ におけるサインの値を求めるものと考えられます. もし, 他の意図があるなら, $x\sin(a+b)$ とか $(\sin(a+b))x$ などと, ハッキリと記述しなければなりません.

入力した関数式が, どのように解釈されているか確認する場合は数式にカーソルを配置して CTRL + ? とします

▶ CTRL + ?

$\sin x/2 = \sin\frac{x}{2}$

すべての引数に必ずカッコを付けて記述するように設定する方法を次に示します.

▶ **すべての文書で, 必ずカッコ付けないと, 計算できないようにする**

1. **ツール** + **数式処理設定**ダイアログの一般タブを表示します.
2. **引数を必ずカッコで囲む**オプションを選択します.
3. OK ボタンをクリックします.

▶ **ある文書内で, 必ずカッコ付けないと, 計算できないようにする**

1. **数式処理** + **設定**ダイアログの一般タブを表示します.
2. ローカル設定にチェックして, **引数を必ずカッコで囲む**オプションを選択します.
3. OK ボタンをクリックします.

こうすると $\sin x$ を引数 x の関数とは認識しません. 必ず $\sin(x)$ とする必要があります.

5.8.1　カッコ不要な関数の引数

一般的にカッコ不要な関数の引数は"+" または"−" 記号の前までの文字列を一つの引数と見なします. また, 積を示す文字列は, 基本的に一つの引数と判断して読込みます. 引数の認識パターンを次の例に示します.

▶ CTRL ＋？

- $\sin x+5=\sin x+5$　これは $\sin(x+5)$ とは異なります. x が sin の引数です.
- $\sin(a+b)x=\sin(a+b)\,x$　これは $(\sin(a+b))\,x$ とは異なります. $(a+b)\,x$ が引数です.
- $\sin x(a+b)=\sin x\,(a+b)$　これは $(\sin x)\,(a+b)$ とは異なります. $x\,(a+b)$ が引数です.
- $\sin x\cos x=\sin x\cos x$　これは $\sin(x\cos x)$ とは異なります. x が sin の引数です.
- $\sin x(\cos x+\tan x)=\sin x\,(\cos x+\tan x)$　これは $(\sin x)\,(\cos x+\tan x)$ とは異なります. $x\,(\cos x+\tan x)$ が sin の引数です.
- $(\sin x)\,(\cos x+\tan x)=(\sin x)\,(\cos x+\tan x)$　ここでは x が sin の引数です.
- $\sin(x)\,(a+\cos b)=(\sin x)\,(a+\cos b)$　ここでは x が sin の引数です.

引数の認識中に別のカッコ不要な関数が出現した時点で, 引数認識のアルゴリズムは停止します.

$$\sin x\cos(ax+b)=(\sin x)\,(\cos(ax+b))$$

もちろん, 新たに出現した関数が次のようにカッコで囲まれている場合は, 引数の認識作業は継続されます.

$$\sin x\,(\cos(ax+b))=\sin(x\,(\cos(ax+b)))$$

カッコを利用する一般的な関数 $\exp(x)=e^x$ に関する引数の認識パターンを次に示します.

- $\sin x\cos(ax+b)=\sin x\cos(ax+b)$　ここで, $\cos(ax+b)$ は引数の一部ではありません.
- $\sin xe^x=(\sin x)\,e^x$　ここで, e^x は引数の一部ではありません.
- $\sin x\,(\cos(ax+b))=\sin x\,(\cos(ax+b))$　ここで, $\cos(ax+b)$ は引数の一部ではありません.
- $(\sin x)\,(\cos(ax+b))=(\sin x)\,(\cos(ax+b))$　ここで, $\cos(ax+b)$ は引数の一部ではありません.
- $\sin(x)\,(\cos(ax+b))=(\sin x)\,(\cos(ax+b))$　ここで, $\cos(ax+b)$ は引数の一部ではありません.
- $\sin x\left(a+e^b\right)=\sin x\left(a+e^b\right)$　ここで, $a+e^b$ は引数の一部です.
- $(\sin x)\left(a+e^b\right)=(\sin x)\left(a+e^b\right)$　ここで, $a+e^b$ は引数の一部ではありません.
- $\sin(x)\left(a+e^b\right)=(\sin x)\left(a+e^b\right)$　ここで, $a+e^b$ は引数の一部ではありません.

除算の記号 ‘/’ は掛算記号と同じように認識されます.

- $\sin x/2=\sin\frac{x}{2}$　しかし　$\sin(x)/2=\frac{\sin x}{2}$　であり, また　$(\sin x)/2=\frac{\sin x}{2}$
- $\sin x/\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$　であり　$(\sin x)/\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$　しかし　$\sin(x/\cos x)=\sin\frac{x}{\cos x}$
- $\sin xy/2=\sin x\frac{y}{2}$　であり　$\sin(xy)/2=\sin\frac{xy}{2}$　しかし　$(\sin xy)/2=\frac{\sin xy}{2}$

この例からも明かなように, それぞれの関数にカッコを付けると関数の形が明瞭に把握できます. もし $(\sin xy)\,z$ とあれば, 積 xy が sin の引数であることが良く分かります.

5.9　練習問題

1. 変数 $a=5$ と関数 $b=a^2$ を定義します．そこで b に**計算**コマンドを実行してください．次に $a=\sqrt{2}$ を定義して b の値を予測し, 実際の計算結果と比べてください.
2. 関数 $f(x)=x^2+3x+2$ を定義してください．$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ に**計算**コマンドを実行し, 結果を簡単化してください．簡単化の過程を部分計算で記述してください.
3. 関数 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=3x+2$, $h(x)=x^2+3x$ を定義し, $f+g$, と $(f+g)h$ および．$(f+g)\circ h$, と $f\circ h+g\circ h$ に**計算**コマンドを実行してくてください.
4. 関数 $f(x)=\max\left(x^2-1, 7-x^2\right)$ を区間定義関数として書き換えてください.
5. オイラーのファイ関数 $\varphi(n)$ は正の整数で $k\le n$ と $\gcd(k,n)=1$ を満たす値の数を数えます．**関数定義** + **MuPAD 関数の定義**として関数の設定ダイアログを開きます．MuPAD 名に numlib::phi(x) を, そして *Scientific WorkPlace/Notebook* 名を $\varphi(n)$ とします．そこで, “If $\gcd(n,m)=1$ then $\varphi(nm)=\varphi(n)\varphi(m)$” を満たすいくつかの n と m を探してください.
6. 関数 $d(n)$ を次のように定義します．MuPAD 関数名を numlib::divisors(n) , *Scientific WorkPlace/Notebook* 関数名 $d(n)$．関数 $d(n)$ の特徴について説明してください．実際に整数を入力して, その計算結果から特徴を見つけてください.

5.10　練習問題の答え

1. 今 $a=5$ として, さらに $b=a^2$ を定義します．すると $b=25$ になります．次に $a=\sqrt{2}$ とすると b は $b=2$.
2. **計算**コマンドと**簡単化**コマンドを実行すると

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(3h-x^2+(h+x)^2\right)=h+2x+3$$

ここで $=\frac{1}{h}\left(3h-x^2+(h+x)^2\right)$ をマウスで選択し, CTRL キーを押した状態でドラックコピーして式を複製します．$(x+h)^2$ だけを選択し, CTRL キーを押した状態で展開コマンドを選択します．同じような操作で式の計算を行ない, 最後に $2xh+h^2+3h$ を因数分解します.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(3h-x^2+(h+x)^2\right)=\frac{1}{h}\left(3h-x^2+2hx+h^2+x^2\right)$$
$$=\frac{1}{h}\left(h\left(h+2x+3\right)+x^2-x^2\right)=\frac{1}{h}\left(h\left(h+2x+3\right)\right)=h+2x+3$$

3. 和は $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ で与えられているので,

$$(f+g)(x)=\left(x^2-1\right)+(3x+2)=x^2+3x+1$$

となります. 積は $((f+g)h)(x)=((f+g)(x))(h(x))$ で与えられているので,

$$((f+g)\,h)\,(x)=\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x\right)=x^4+6x^3+10x^2+3x$$

となります. 積の和は $(fh+gh)\,(x)=f\,(x)\,h\,(x)+g\,(x)\,h\,(x)$ なので

$$\begin{aligned}(fh+gh)\,(x)&=\left(x^2-1\right)\left(x^2+3x\right)+(3x+2)\left(x^2+3x\right)\\&=x^4+6x^3+10x^2+3x\end{aligned}$$

となります. $k\,(x)=f\,(x)+g\,(x)$ および $(f+g)\circ h=k\circ h$ と定義しているので,

$$\begin{aligned}((f+g)\circ h)\,(x)=(k\circ h)\,(x)&=\left(x^2+3x\right)^2+1+3x^2+9x\\&=x^4+6x^3+12x^2+9x+1\end{aligned}$$

となり, 最後に $(f\circ h+g\circ h)\,(x)=(f\circ h)\,(x)+(g\circ h)\,(x)$ なので,

$$\begin{aligned}(f\circ h)\,(x)+(g\circ h)\,(x)&=\left(\left(x^2+3x\right)^2-1\right)+\left(3x^2+9x+2\right)\\&=x^4+6x^3+12x^2+9x+1\end{aligned}$$

4. 式 $f(x)=\max\left(x^2-1,7-x^2\right)$ を区間定義関数に変更するために, 2 つの関数の接点を探します. $x^2-1=7-x^2$ として解を求めると $x=-2$ および $x=2$ となります. したがって区間定義関数 f は次のようになります.

$$g(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{if} \quad x<-2\\ 7-x^2 & \text{if} \quad -2\le x\le 2\\ x^2-1 & \text{if} \quad x>2\end{cases}$$

確認までに $f(-5)=24$, $g(-5)=24$, $f(1)=6$, $g(1)=6$, $f(3)=8$, $g(3)=8$ となります.

5. $((f+g)\,h)\,(x)=((f+g)\,(x))\,(h\,(x))$ 次の表を作成します:

n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$
1	1	11	10	21	12
2	1	12	4	22	10
3	2	13	12	23	22
4	2	14	6	24	8
5	4	15	8	25	20
6	2	16	8	26	12
7	6	17	16	27	18
8	4	18	6	28	12
9	6	19	18	29	28
10	4	20	8	30	8

条件を満たす整数は

$$\begin{aligned}\varphi(4\cdot 5)&=8=\varphi(4)\varphi(5)\\ \varphi(4\cdot 7)&=12=\varphi(4)\varphi(7)\\ \varphi(3\cdot 8)&=8=\varphi(3)\varphi(8)\end{aligned}$$

6. 整数 $1 \le n \le 30$ に対する $d\,(n)$ の出力は次のようになります.

n	$d(n)$	n	$d(n)$	n	$d(n)$
1	1	11	$[1, 11]$	21	$[1, 3, 7, 21]$
2	$[1, 2]$	12	$[1, 2, 3, 4, 6, 12]$	22	$[1, 2, 11, 22]$
3	$[1, 3]$	13	$[1, 13]$	23	$[1, 23]$
4	$[1, 2, 4]$	14	$[1, 2, 7, 14]$	24	$[1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24]$
5	$[1, 5]$	15	$[1, 3, 5, 15]$	25	$[1, 5, 25]$
6	$[1, 2, 3, 6]$	16	$[1, 2, 4, 8, 16]$	26	$[1, 2, 13, 26]$
7	$[1, 7]$	17	$[1, 17]$	27	$[1, 3, 9, 27]$
8	$[1, 2, 4, 8]$	18	$[1, 2, 3, 6, 9, 18]$	28	$[1, 2, 4, 7, 14, 28]$
9	$[1, 3, 9]$	19	$[1, 19]$	29	$[1, 29]$
10	$[1, 2, 5, 10]$	20	$[1, 2, 4, 5, 10, 20]$	30	$[1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30]$

$d(n)$ には除数 n が含まれることが分かります.

第 6 章

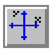
曲線と曲面のプロット

数式処理システムの優れた機能の一つが数式のプロット機能です．実際, 数式からプロット画像を簡単に作成できます．関数, 数式などをプロットして具体的なイメージとして数式を理解することができます．必要に応じて数式を編集し, その結果をすぐにプロットできますから, 数式の変化に応じてプロットの変化する様子を細かく確認することができます．また, 複数の曲線をプロットに順次追加することもできます．つまり, 数式を単に描くという作業に加えて, 実験的に数式を編集するという試みが容易に行なえるのです．これまでにもいくつか, 特徴的な関数を紹介してきましたが, この章では実際に自分でプロットを作成する方法を学びます．
ユークリッド平面における直線と曲線の作成方法, また, 3D ユークリッド空間における直線, 曲線, 曲面の作成方法について解説します．**2D プロット**サブメニューには座標として直交座標, 極座標, 陰関数が用意されています．一方, **3D プロット**サブメニューには直交座標, 円柱座標, 球面座標, 環が用意されています．2D プロット, 3D プロット, **微積分**サブメニューにはこれら以外にも, 微積分, ベクトル, 微分方程式のプロットに関するコマンドが特別に用意されています．これらの特別なプロットコマンドに関する詳細は, 後の章で, 関連する数式機能と一緒に解説します．

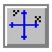
6.1　プロットの基本

プロットの作成にはいくつか基本となる方法があります．ここでは基本的な操作方法について解説しますので, 実際に操作してください．

► **1 変数の数式をプロットする**

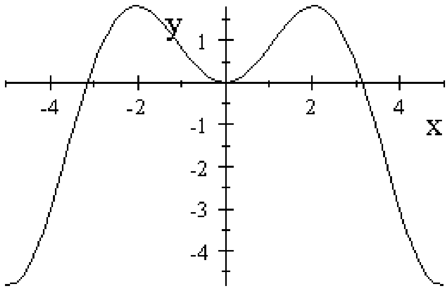
1. 数式にカーソルを配置します．
2. アイコン  をクリック, または, **2D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します．

コマンドを実行すると数式の後ろに, フレームの付いたグラフが表れます．カーソルはプロットの右隣に移動します．136 ページのプロットのレイアウトセクションには, フレームの配置や大きさを変更する操作方法があります．
最初に描画されるプロットの様子は数式処理設定にある 2D プロットタブの内容によって決ります．この設定を変更して, プロットスタイルを自分の好みに応じて変更することができます．詳細は 209 ページを参照してください．

関数 $y = x\sin x$ をデフォルト範囲 $-5 < x < 5$ でプロットした例を次に示します. x 軸と y 軸の範囲はデフォルトのままとします. このプロットを作成する場合, 式 $x\sin x$ にカーソルを配置して  をクリックするか, または, **2D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

$x\sin x$



数式情報の入力, プロットの概観と位置の変更, 複数のプロットを一つのグラフ中で作成するには他にもいくつかの方法があります. それぞれの方法については後述します.
次のセクションではフレーム, 表示範囲, プロットのプロパティダイアログについて解説します. プロットの移動やサイズの変更, プロットの編集方法など, プロットに関する基本的な事柄を理解しましょう. 最初に, プロットの作成に関する用語と一般的なプロパティの内容について説明します.

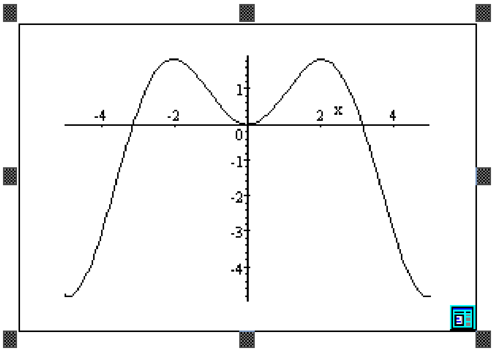
6.2　フレーム, ビュー, プロットのプロパティダイアログ

2D プロットや **3D プロット**サブメニューからプロットコマンドを実行すると, プロットが作成されます. この時, プロットを囲む四角い枠をフレームと呼びます. そして, フレームの中に表示されるプロットの画像をビューと呼びます.

- マウスでプロットサイズを変更したり, 位置を変更する場合はフレームを選択します.
- マウスでプロットの曲線範囲などのグラフ中の属性を変更する場合はビューを選択します.
- プロットのプロパティダイアログを利用して上記のようなプロットの編集を行う場合は, フレームやビューを選択します.

▶ **フレームを選択する**

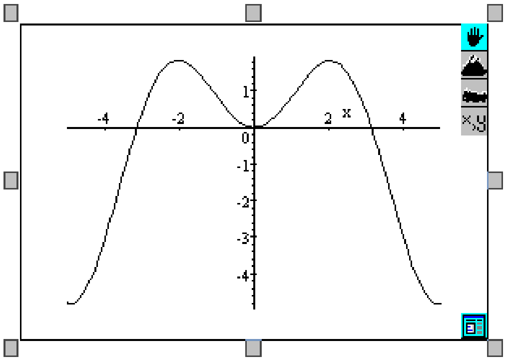
- フレームをクリックします.
- 四角い枠線内の任意の箇所をクリックします. フレーム中のプロットをクリックしてもかまいません.
  フレーム上の 8 つのハンドルと, 右下角に 1 つのツールが表示されます. フレームのサイズ, 形, 位置を変更する場合は, まず, フレームを選択します.



▶ ビューを選択する

- フレームをダブルクリックします.

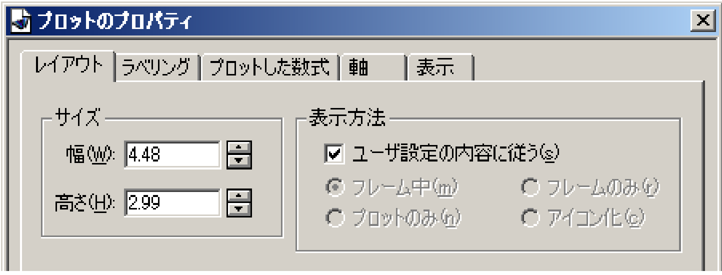
枠線内に示されているプロットの任意の箇所をダブルクリックしてもかまいません



フレーム上に 8 つのハンドルが表れます. 2D プロットでは, フレームの右端に 4 つのツールが現れ, 3D プロットでは, 1 つのツールが現れます. 数式のプロットでなく画像ファイルの場合は, 3 つのツールが現れます. マウスをフレーム上に移動すると, マウスアイコンは手のアイコンに変わります. これはビューが選択されていることを示しています. プロットした元の関数や, 表示範囲などフレーム中にプロットされた画像の属性を編集する場合はビューを選択します.
プロットのプロパティダイアログボックスから, レイアウト, ラベリング, プロットした数式, 軸, 表示の属性を変更します.

▶ プロットのプロパティのタブダイアログを表示する

1. フレームを選択するか, または, ビューをダブルクリックします.
2. フレームやビューの右下にあるダイアログツールをクリックします.
   または
   マウスの右ボタンをクリックしてメニューから**プロパティ**を選択します.
   または



編集メニューから**プロパティ**を選択します.
または
標準ツールバーの  をクリックします.

プロットを作成する時にプロパティダイアログを表示するキーボードショートカットがありますので, プロットを作成する前に設定をカスタマイズできます.

▶ **プロットを作成する時にプロパティダイアログを表示する**

1. マウスカーソルを数式または関数名の右側に置きます.
2. CTRL キーを押しながらプロットコマンドを選択します.

レイアウト, ラベリング, プロットした数式, 軸, 表示というタブがあるプロットのプロパティダイアログボックスが開きます. 作成するすべてのプロットに対してこのように設定する場合は**ツール**+ **数式処理設定**(ローカル設定は**数式処理**+ **設定**) を選択します (参照 209 ページ).

6.3 プロットレイアウト

プロットサイズ, 文書中の位置, 印刷, 画面表示などの編集はプロットレイアウトタブで行います. プロットレイアウトのデフォルト設定は**ツール**+ **数式処理設定**, または, **数式処理** + **設定**のプロットレイアウトタブで行ないます.(参照 209 ページ).

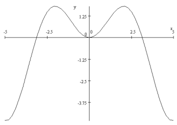
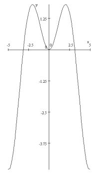
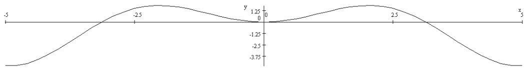
6.3.1 フレームのリサイズ

フレームサイズの変更はマウスか, または, プロットのプロパティダイアログを使って行ないます.

▶ **マウスでフレームサイズを変更する**

1. プロットをクリックしてフレームを選択します.
2. 適当なハンドルをドラッグしてフレームの大きさを変更します.

フレームを選択すると 8 つのハンドルが表示されます. そこで適当なハンドルをドラッグしてフレームの大きさを変更します. 四隅のハンドルを動かしても, 対角のハンドルが移動することはありません. この場合, プロットは縦横比を維持しながら縮小, または拡大されるだけでプロットの

形が変形することはありません  . 左右や上下に付いているハンドルを動かすと, 移動方向の大きさが変わります. もちろん, 軸スケーリングが変化することはありません. 左右のハンドルを適当に動かすと, 図のように細くなったプロット  ができ, 上下に動かせば, 図のように押しつぶしたような形になります  .
ここで利用したプロットの表示方法をインラインプロットと呼びます. インラインプロットのオプションついては次のセクションで説明します.
フレームの長さを厳密に決める場合はプロットのプロパティのダイアログを利用します.

▶ **プロットのプロパティダイアログを使ってフレームサイズを変更する**

1. プロットを選択してプロットのプロパティダイアログを表示します.
2. レイアウトタブをクリックします.
3. サイズの項目で幅と高さを設定します.
4. OK ボタンをクリックします.

6.3.2　フレームの位置

Scientific Notebook では, フレームの位置に関するオプションが 2 つ (インラインとディスプレイ) あります. *Scientific WorkPlace* では, さらにフローティングというオプションがあります. これらのオプションについては, 以下で説明します.
文書におけるフレームの位置を決める場合はプロットのプロパティダイアログを利用します.

▶ **プロットレイアウトの位置設定**

1. プロットを選択してプロットのプロパティのダイアログを表示します.
2. レイアウトタブをクリックします.

インラインフレーム
フレームのオプションがインラインの場合, 行に対するフレームの位置を設定できます.

▶ **マウスを使ってインラインフレームを上下に移動する.**

1. フレームを選択します.
2. フレームを上下にドラッグします.

フレームは文字列ベースラインの上端, 下端, 中央, または任意の位置にドラックできます. フレー

ムは基本的に文字列と同じように取り扱えますから, 文字列をその右側に連続的に入力できます.
オフセットの設定は**プロットのプロパティ**+ **レイアウト**ダイアログで行ないます. インラインを選択し, 下側オフセットの値を入力します.
この場合のスケールは単位の項目（ポイント, センチメートル, パイカなど）で選択したものが適用されます.

ディスプレイフレーム
ディスプレイフレームは, 文字列とは別の行の中央に自動的に配置されます.

▶ **プロットや画像をディスプレイで表示する**

1. フレームを選択します.
2. 標準ツールバーにあるアイコン  をクリックします.
   または
   マウスの右ボタンをクリックしてメニューから**プロパティ**を選択します.
   または
   フレームの右下にあるダイアログツール  をクリックします.
   または
   編集メニューから**プロパティ**を選択します.
3. プロットのプロパティダイアログのプロットレイアウトタブをクリックします.
4. 配置の項目で, **ディスプレイ**を選択します.

Important　プロットを中央に表示するには, プロットのプロパティダイアログのプロットレイアウトタブで, ディスプレイを選択します. または, インラインを選び, ボディテキストのポップアップリストから**中央揃え**を選択します. プロットの上下の余白部分を最小にするには, ディスプレイを選択し, プロットの直前または直後にある新しいパラグラフの記号¶ を削除します. (これらのシンボルを表示するには, 標準ツールバーの  ボタンをクリックするか, **表示**メニューの**制御記号**にチェックを付けます.)

数式モードのディスプレイを先に作成し, そこにプロットフレームを挿入する方法は誤った用法です. 数式モードのディスプレイにフレームを挿入すると, プレビューや印刷の時に, 予期できないトラブルが発生する場合があります. 数式モードではないのに, フレームの枠線が赤色で表示される場合はフレームを選択して, それを文字モードに変換してください.

フローティングフレーム
フローティングは, タイプセッティングのオプションで, *Scientific WorkPlace* や *Scientific Word* で利用できます. フローティングフレームとは挿入した文章中の位置に固定されないという意味です. このオプションはタイプセッティングを実行した時に効果が表れるものです. つまり, フレームを画面上と同じ位置, 別ページに単独, ページの上, ページの下に自動配置します.
もちろん, 図の番号, 注釈, キーなどは, そのオブジェクトと一緒に移動します. 図の番号は LaTeX が文章構造を解析して常に正しい番号を付けます. タイプセッティングの時だけフローティングは実行されますので, **ファイル** + **プレビュー**では操作画面のまま出力されます.

6.3.3 画面表示と印刷時の設定

画像には画面表示と印刷用のオプションが用意されています．オプションは以下の通りです.

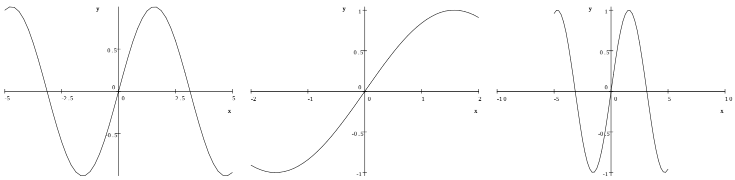
- フレーム中: プロットとフレームを両方表示します.
- プロットのみ: プロットだけを表示します.
- フレームのみ: フレームだけを表示します.
- アイコン化: プロットをアイコンで表示します.
- モデルを使う: **ツール** + **数式処理設定**, または**数式処理** + **設定**ダイアログのプロットレイアウトの設定条件をモデルとして, これと同じ設定で表示します．数式をプロットする時間を節約する場合は, 表示方法の項目で**アイコン化**を選択します.

6.4 2D プロットのビュー

プロットの表示領域はプロットした数式タブのプロット範囲と表示タブの表示範囲で決ります.

- プロット範囲により, 曲線の描画範囲が決まります.
- 表示範囲により, プロット全体の軸範囲を決めます.

ここで式 $y = \sin x$ の x 軸のプロット範囲と表示範囲を変更した時の様子を示します.



プロット:	$-5 < x < 5$	プロット:	$-5 < x < 5$	プロット:	$-5 < x < 5$
表示範囲:	$-5 < x < 5$	表示範囲:	$-2 < x < 2$	表示範囲:	$-10 < x < 10$
	$-1 < y < 1$		$-1 < y < 1$		$-1 < y < 1$

Note 表示範囲がプロット範囲よりも狭い場合, 表示範囲の外側にもサンプリングした点をプロットしてしまいます．両者の値が大きく離れていると, グラフを正常に描くことができません．その場合は, プロット範囲の値を変更してください.

プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブで, プロット範囲を変更できます (参照 148 ページ). さらに, プロットのプロパティダイアログのプロットした表示タブで, 表示範囲を変更できます (以下参照).
2D プロットサブメニューのコマンドに対するプロット範囲のデフォルト値について解説します．デフォルト値はあくまで, 参考程度の意味で設定されている値ですから目的に応じて変更してください．デフォルト設定の変更方法は 209 ページを参照してください．直交座標に対するデフォルト値は $-5 \le x \le 5$ です．極座標および陰関数に対しては $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$ となってい

ます．デフォルトの表示範囲はプロット範囲とグラフの種類によって決ります．つまり，プロットした数式タブのプロット範囲ボタンで設定された範囲内で，目的のプロットの情報を最大限，画面表示するように残りの自動範囲を決定します．x 軸と y 軸のスケーリングが異なる場合，範囲内の曲線をすべて表示するように調整してスケールを設定します．プロット範囲を変更する場合はプロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブのプロット範囲ボタンをクリックします．軸範囲を変更する場合は，同じプロットのプロパティダイアログの表示タブにある表示範囲の項目を編集します．
プロットのプロパティの表示タブでは，表示範囲の設定と同時にプロットの画像ファイルを作成したり，削除することができます．プロットのスナップショットを作成する方法は 207 ページを参照してください．

▶ **2D プロットの軸範囲を変更する**

1. プロットを選択してプロットのプロパティダイアログを表示します．
2. 表示タブをクリックします．
3. デフォルトのチェックを外し，表示範囲の値を入力します．
4. OK ボタンをクリックしてダイアログを閉じます．グラフが更新されます．編集内容を無効にする場合はキャンセルボタンをクリックします．

▶ **スナップショットを作成する**

1. プロットを選択し，編集 + プロパティを選びます．
2. 表示タブを選び，スナップショットの作成ボタンをクリックします．

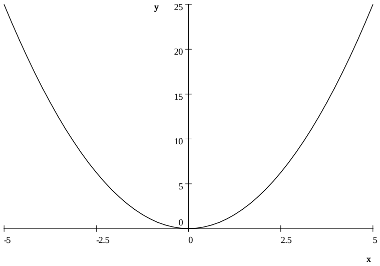
▶ **スナップショットを削除する**

1. プロットを選択し，**編集** + **プロパティ**を選びます．
2. 表示タブを選び，スナップショットの削除ボタンをクリックします．

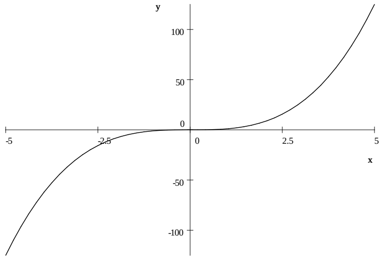
次のセクションではいくつかの種類のグラフのプロット及びビューのデフォルトについて説明します．

6.4.1 直交座標

2D プロットサブメニューの**直交座標**コマンドは $a \leq x \leq b$ および $c \leq y \leq d$ の範囲で軸を設定します．デフォルトのプロット範囲は $-5 \leq x \leq 5$ であり，この範囲に対応して $c \leq y \leq d$ が決ります．ここで c と d は区間内で数式計算した結果の最大値と最小値を示しています．



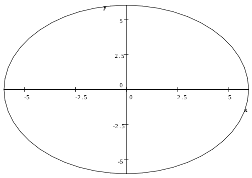
$y = x^2$



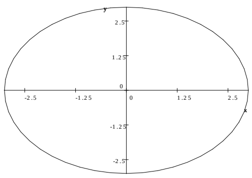
$y = x^3$

6.4.2 極座標

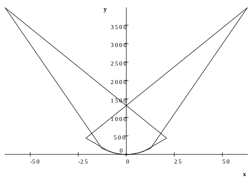
2D プロットサブメニューの**極座標**コマンドは, 角度 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ におけるプロットを作成します. 表示タブの表示範囲は関数式によって異なります. 次にいくつかのサンプルプロットを示します. 表示範囲はデフォルトのままで, 変更していません.



$r = 6$

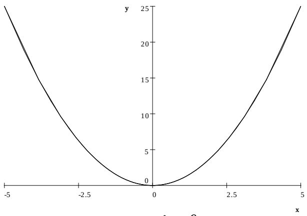


$r = 3$

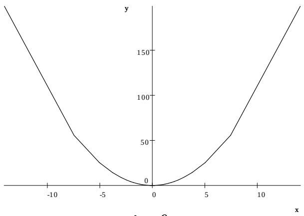


$r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

3 番目のプロット $r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ の表示範囲を $-5 < x < 5$ および $0 < y < 25$ に変更したものと, プロット範囲を $-1.5 < \theta < 1.5$ に変更したものを次に示します.



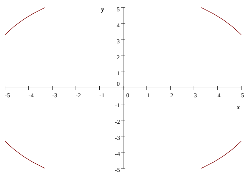
$r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$
View intervals:
$-5 < x < 5$ and $0 < y < 25$



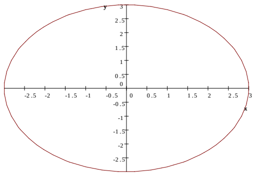
$r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$
Plot interval:
$-1.5 < \theta < 1.5$

6.4.3　陰関数プロット

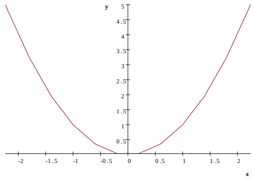
2D プロットサブメニューの**陰関数**コマンドは, $a \leq x \leq b$ および $c \leq y \leq d$ の範囲で軸を設定します. デフォルトのプロット範囲は $-5 \leq x \leq 5$ および $-5 \leq y \leq 5$ です. 表示タブの表示範囲は数式によって異なります. 陰関数のプロットには直交座標が用いられます. 次にいくつかのデフォルトのビューを示します



$x^2 + y^2 = 36$



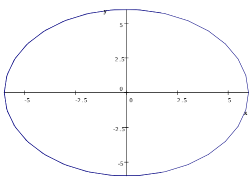
$x^2 + y^2 = 9$



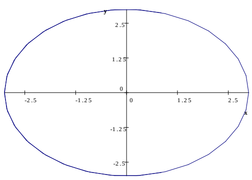
$y = x^2$

6.4.4　パラメトリックプロット

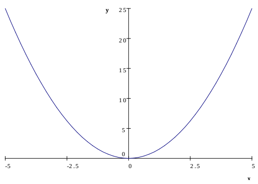
2D プロットサブメニューの**パラメトリック**コマンドは, プロット範囲 $-5 \leq t \leq 5$ で, 表示タブの表示範囲は $a \leq x \leq b$ および $c \leq y \leq d$ です. 表示タブの表示範囲は数式によって異なります. 次にいくつかのデフォルトのビューを示します.



$(6\cos t, 6\sin t)$



$(3\cos t, 3\sin t)$



$\left(x, x^2\right)$

6.5　2D プロットツール

作成したプロットの座標値を調べたり, 表示タブの表示範囲を変更したり, 拡大表示を行なうためのツールが用意されています.

▶　**プロットツールの表示**

- ビューをダブルクリックします.

プロットの右上に 4 つのプロットツールが表示されます. ビューの変更, 拡大, 縮小, 座標の検出などを行なえます.

フレームの回りに 8 つの灰色のハンドルが表示され, この状態でマウスをプロットへ移動すると, 手のアイコンに変わります.

6.5.1 拡大と縮小

拡大と縮小ツールが山の形をしたアイコンとして用意されています. 大きな山のアイコン  を利用すると目的の範囲を拡大表示でき, 小さな山のアイコン  を利用すると縮小表示できます.

▶ 拡大と縮小の操作

1. 拡大または縮小アイコンをクリックします.
2. ビューにマウスポインタを移動します.
3. 目的の箇所をそのままドラッグして囲みます.

拡大表示の場合は, ドラックした箇所がフレーム内に拡大表示されます. ドラックした範囲外の画像はフレームの範囲外にあり, 表示されません. 縮小表示を選択すると, 元のプロットが作成した枠の中に縮小表示されます. そして, 縮小された画像とフレームの間の分だけ軸範囲が広がります. プロットのプロパティダイアログの表示タブと軸タブの設定内容に応じて, 拡大縮小の機能が異なります.

- 拡大, 縮小は x 軸の設定に依存します. この機能を利用する場合は念のために, プロットのプロパティダイアログのビューと軸タブのデフォルト値を確認しておきましょう.
- 拡大, 縮小後の x 軸と y 軸の範囲を編集する場合はデフォルトのチェックボックスをクリアします.

拡大または縮小の操作を行なった後で, 元の表示状態に戻す場合は, 反対の機能を持つのアイコンをクリックします. ほぼ, 元の状態に戻ります.

6.5.2 ビューを変更する

▶ フレームの中にあるビューを変更する

1. ダブルクリックしてビューを選択します. ビューが既に選択されている場合は右上の手のアイコン  が選択されていることを確認します.

2. ビューにマウスポインタを移動すると手の形に変わります.
3. ビューをドラックして移動します.

フレームを元の位置に表示したままビューだけがドラックされます. マウスを離すとビューを移動した範囲のプロットに更新されます. ドラッグは左右, どちらへでも可能です. この機能を利用するとフレーム内に表示されるプロットの表示範囲を簡単に変更することができます

Note　拡大したり, ビューを変更してもフレームのサイズは変更されません. しかし, フレームサイズを変更したり, 移動を行うとフレームサイズや位置などは変わりますが, 逆にビューは変更されません.

6.5.3　プロットの座標ダイアログ

プロットをダブルクリックしたら座標位置を検出するツール  を選択します. プロットの座標位置を示すダイアログが表示されます. プロット上に移動したマウスの直交座標上の位置を表示します. 極座標のチェックボックスを利用すると, 直交座標に代って極座標が表示されます.

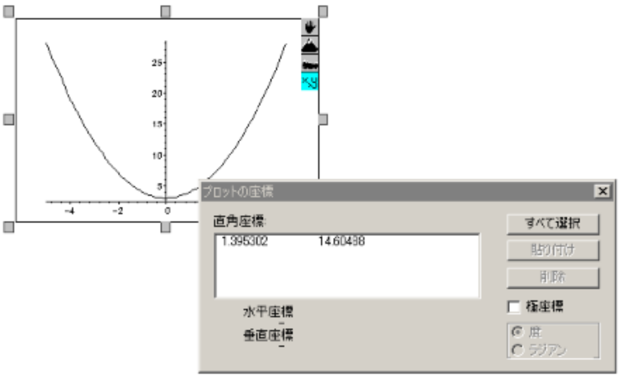
▶ **座標位置を記録する**

- アイコン  を選択します.

クリックしたプロット上の直交座標をダイアログに表示します.

▶ **座標の行列を作成する**

1. ダイアログにリストアップされた座標位置を選択します.
2. 画面上の任意の位置にカーソルを移動します.
3. 座標位置のダイアログにある貼り付けボタンをクリックします.



▶ **選択した座標から折れ線グラフを作成する**

- 作成した行列を 2D プロットにドラッグします.

  または

- 選択したプロットの行列を作成し, マウスカーソルを行列の右側に置きます (上記のステップ 2).

折れ線グラフではなく, 散布図で表現したいときは次のようにします. 最初に上の要領で折れ線グラフを作成します. 次にグラフを選択し, プロットのプロパティダイアログからプロットした数式のタブを表示します. そして, プロットスタイルを変更します.

▶ プロットの座標位置ダイアログから座標情報を削除する

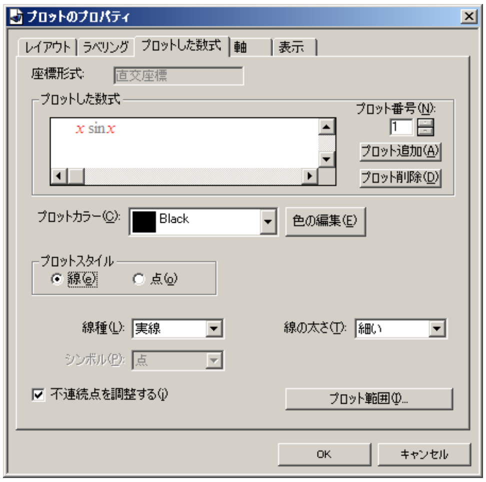
1. 削除する座標情報をクリックします.
2. 削除ボタンをクリックします.

6.6 数式情報

プロットした数式の編集や, プロットの追加, 削除, プロットスタイルやプロット範囲, サンプリング数の変更などを行なう場合はプロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブを利用します.

6.6.1 プロットした数式

ダイアログの上部にあるプロットした数式のテキストボックスには, 画面にプロットされた曲線の数式が表示されます.



プロットした数式や関数にはプロット番号という独自の番号が付きます. プロット番号を示す項目の上下矢印をクリックすると, プロットされた関数や数式が表示されます. この機能を使って, 数式の変更, 新しい式の追加, 式の削除などを行なえます.

- 数式の編集は数式を示すダイアログで直接行ないます.
- 数式を追加する場合は追加ボタンをクリックし, 数式を直接入力するか, または貼り付けます.
- 数式を削除する場合は目的の数式を, **プロットした数式**ボックスに表示して削除ボタンをクリックします.

6.6.2　軸範囲とサンプルサイズ

プロットしたグラフのプロット範囲とサンプルポント数の調整は自由に行なえます.

▶　プロット範囲を変更する

- プロット範囲ボタンをクリックして, プロット範囲を編集します.

プロット範囲ダイアログボックスでは, プロットを生成しているポイント数や範囲を設定できます. 直交座標のプロット範囲のデフォルト設定は $-5 \leq x \leq 5$ となっています.

▶　正確なグラフを作成する

- プロット範囲ボタンをクリックして, ポイント数を増やします.

描画するポイント数を増やすと, プロットの処理速度が遅くなります. したがって画面上での表示や, 印刷の処理速度を向上させたい場合は少ないポイント数の方が有利です. 逆に曲線や直線に滑らかさが足りない場合は, ポイント数が少なすぎますので少し増やしたほうがいいでしょう.

6.6.3　プロットの色とスタイル

プロットする曲線毎に色を変更することができます.

▶　プロットの色を変更する

- 次の 20 色のカラーリストから選びます. Black, Blue, Blue Green, Brown, Cyan, Dark Gray, Green, Light Blue, Light Gray, Light Green, Light Red, LtBlueGreen, Magenta, Maroon, Navy, Purple, Red, Sienna, White, Yellow.

または

- 色編集ボタンをクリックして色ダイアログから自由に色を作成します.

プロットした数式毎に色を編集することが可能です. また, プロットスタイルを線と点の 2 種類から選ぶことができます. プロットスタイルのデフォルトは線です. 線はサンプリングされた点を繋いでプロットされます. 線と点によるプロットの詳細は 160 ページを参照してください.
プロットスタイルを線と した場合, 線種と線の太さを変更できます.

▶　線種と線の太さを決める

- 線種には実線, ダッシュ, 点線, 1 点ダッシュ, 2 点ダッシュがあります.

- 線の太さには細い, 標準, 太いがあります.

複数の式を一つの座標空間上にプロットした場合, 相互の区別をつけるために, それぞれのプロットスタイル, 線種, 太さ, プロット色を変更すると便利です. オンライン用の文書を作成する場合はプロットに様々な色を付ければ画面上での判別が容易ですし, 逆に印刷用の資料の場合は黒を利用します.
プロットスタイルで点を選ぶとサンプリングした点だけを表示します. この場合はポイントの形状（点, 円, 十字, 矩形, 菱形）を自由に選ぶことができます.

6.6.4 不連続な曲線のプロット

不連続点を結合して曲線をプロットすることができます. 詳細は 155 ページを参照してください.

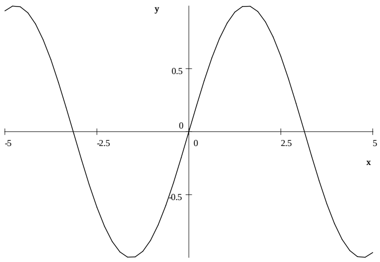
6.7 軸と軸スケーリング

軸の種類, スケーリング, 軸の表示スタイル, ラベルなどの編集はプロットのプロパティダイアログの軸タブで行ないます.

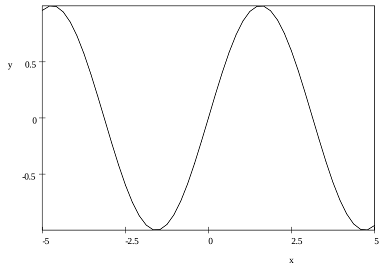
► 軸のプロパティを編集する

- x 軸と y 軸で同じスケーリングを採用する場合は, 両軸で同じスケーリングを採用するオプションをチェックします.
- 軸スケーリングに線形, 片対数, 両対数のオプションがあります.
- x 軸と y 軸の目盛数を目的の数に設定できます.
- x 軸と y 軸にカスタムラベルを付けられます.
- 数値ラベルを表示する場合は目盛にラベルは付けないというオプションのチェックを外します.
- プルダウンメニューの軸の種類には標準, ボックス, フレーム, 無し, というオプションが用意されています. 標準と無しのオプションはその言葉通り, 普通のグラフを表示します. ボックスは四角い枠の中にグラフを表示し, フレームは左と下にだけ枠線を付けてグラフを表示するものです. 数値ラベルを表示しますが, 無しのオプションでは, 当然, 数値ラベルも表示されません.

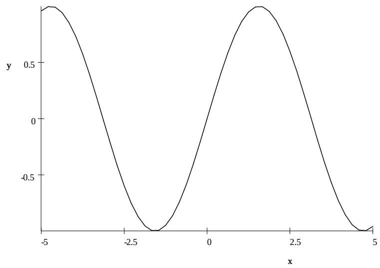
次にこのオプションの具体例を示します.



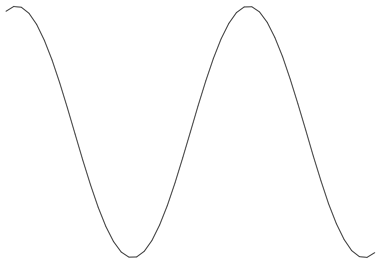
標準



ボックス



フレーム



無し

オプションの選択は矢印キーを使って行ないます. 目的のスタイルを変更してダイアログを閉じるとプロットが再描画されます. 編集作業を中断する場合はキャンセルボタンをクリックします.
数式で利用した独立変数名は軸ラベルとして表示されます. 陰関数の場合, 式で利用した変数名に応じて両軸のラベルが付きます.

6.8　プロットの注釈

プロットには注釈をつけることができます. インラインやディスプレイ表示のどちらの場合でも注釈を付けることができます. 特に *Scientific WorkPlace* の場合はフローティングフレームであれば, フレームの上下に注釈を付けられます.

- タイプセッティングしない場合, 画面上に表示される注釈の長さはプロットの幅とほぼ同じで, しかも 1 行だけです. これを印刷しても画面と同じく 1 行しか出力されません. 必要に応じてフレームの幅を広げてください.
- *Scientific WorkPlace* でタイプセットを実行すると脚注はすべて表示されます.

画像リストを必要とするタイプセッティングを行なうと, フローティング画像の注釈や, 注釈の特別な短縮形を使ってリストが作成されます.

▶　プロットに注釈を付ける

1. プロットを選択し, プロットのプロパティダイアログのラベリングタブを表示します.

2. 注釈文テキストボックスに注釈を入力します.
   - *Scientific WorkPlace* でフローティング画像に短縮形の注釈を付ける場合は, 短縮形のオプションをチェックします. 2 つ目の注釈テキストボックスが表示されますので, そこに短縮形の注釈を入力します.
   - *Scientific WorkPlace* ではフローティングフレームの上下に注釈を配置できます. インラインやディスプレイのフレームの場合は下だけです.
3. OK ボタンをクリックします.

ハイパーテキストリンクを作成するためのキーの作成も行うことができます. *Scientific WorkPlace* の場合はクロスリファンレスにこのキーを利用します.

▶ **プロットキーを作成する**

1. プロットを選択し, プロットのプロパティダイアログを表示します.
2. ラベリングタブを表示し, キーのテキストボックスに目的の名前を入力し, OK ボタンをクリックします.

プロットをアイコン化したときに画面に表示する名前を付けることができます.

▶ **アイコン化したプロットの名前を入力する**

1. プロットを選択し, プロットのプロパティダイアログのラベリングタブを表示します.
2. アイコン化した時に表示されるプロットの名前をテキストボックスに入力し, OK ボタンをクリックします.

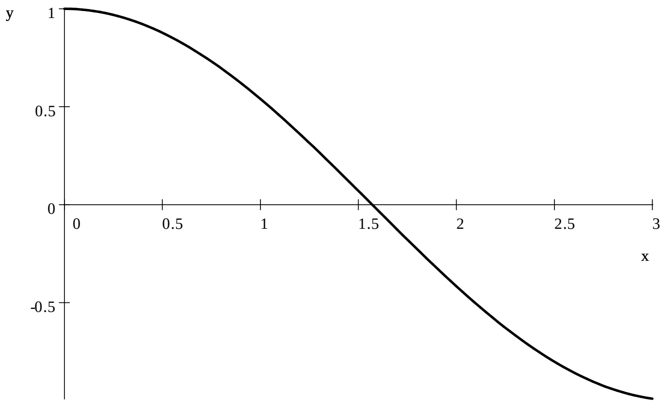
6.9 プロットラベル

プロット内の指定した位置にテキストラベルを配置することができます.

▶ **プロットにテキストラベルを追加する**

1. プロットのプロパティダイアログを開き, 表示タブのプロットラベルをクリックします.
2. プロット追加ボタンを選択して, ラベルの文字テキストボックスに文字を入力します.
3. フォントボタンをクリックしてフォントを指定します.
4. 水平配置 (左, 中央, 右) を設定します.
5. 垂直配置 (ベースライン, 下, 中央, 上) を設定します.
6. テキストの位置を設定します. ここでは, ヘッダー, フッターおよび x と y の座標値で設定可能です.
7. テキストの向きを設定します. デフォルトでは水平方向です. また, 直交座標上の角度 (x と y の座標値) または極座標上の角度 (-360 度から 360 度) で指定することもできます. OK をクリックします.

▶ **2D プロット + 直交座標 (ラベルテキスト: y = cos x, 位置: x: 1.2, y: 0.5, テキストの向き直交座標: x: 1, y: −1)**

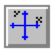


6.10　関数と数式の 2D プロット

方程式 $f(x) = x \sin x$ で $f(x)$ と $x \sin x$ のことを数式と呼び, f を関数と呼びます．ここで関数 f はある値と, その値のサインを取ったものの積と定義されています．したがって, 方程式 $f(x) = x \sin x$ で表現される関数 f は $g(t) = t \sin t$ で定義される関数 g と同じものと言えます．ただし, 数式 $x \sin x$ (または $f(x)$) と数式 $t \sin t$ (または $f(t)$) は異なっています．なぜなら, $x \sin x$ は変数 x に従属しており, $t \sin t$ は変数 t に従属しています.

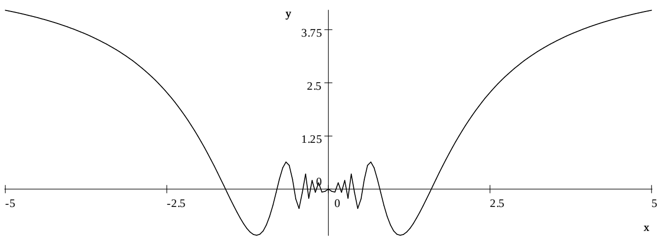
6.10.1　数式

▶　**1 変数の数式をまとめてプロットする**

1. 文章に複数の数式を入力します．複数の数式を同時にプロットする場合は赤い色のコンマで区切ります.
2. 数式を記述した行, または数式リストの任意の場所にカーソルを配置して  をクリックするか, または **2D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

▶　**2D プロット ＋ 直交座標**

$x \sin \dfrac{5}{x}$



$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

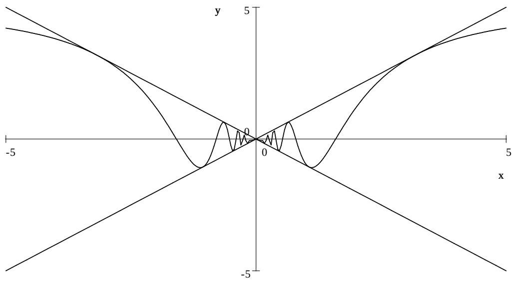
プロットのプロパティのラベリングタブの注釈ボックスに，ラベルとして $y = x \sin \frac{1}{x}$ を入力します．

▶ 2D プロットに数式を追加する

- 新しい数式をマウスで選択し，プロット上にドラッグします．
  または
- プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブでプロットの追加ボタンをクリックします．そしてテキストボックスに新しい数式を入力します．

Example 14 $x \sin \frac{1}{x}$ と一緒に x と $-x$ をプロットする

1. 式 $x \sin \frac{1}{x}$ にカーソルを配置して，**2D プロット** + **直交座標**とします．
2. x をフレームにドラッグします．
3. $-x$ をフレームにドラッグします．



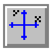
$y = x \sin \frac{1}{x}$, $y = x$, $y = -x$

Note　リファンレンスライブラリをコンピュータにインストールしていれば，より多くの曲線を作成する数式を見つけて，プロットすることができます．リファンレンスライブラリの *Tables, reference: Curves in the Plane* をご覧下さい．(“標準” インストールでは，リファレンスライブラリはインストールされません．これらのファイルを CD-ROM からコピーするか，“カスタム” インストールして，ファイルを追加します．)

三角関数

三角関数も同じようにプロットできます．ここではラジアンの単位ではなく，度の単位の例を示します．

▶ 度の単位を用いた三角関数のプロット

1. 数式を文書に入力します．度の記号を上付き文字として利用します．**挿入** + **単位名**ダイアログから入力する度の記号を使うこともできます．
2. カーソルを式に配置して  をクリックするか，または **2D プロット**サブメニューから**直**

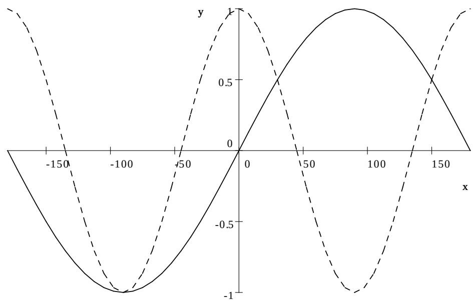
交座標を選択します.

3. プロットを選択し,  をクリック, または**編集** + **プロパティ**とします.
4. プロットした数式タブのプロット範囲ボタンをクリックします.
5. プロット範囲を $-180 < x < 180$ にします. これ以外の値でもかまいません.
6. OK ボタンをクリックします.
7. 必要に応じて, 追加の数式をクリックし, プロット上にドラッグします.

▶ **2D プロット** + **直交座標**

$\sin x°$

- **編集** + **プロパティ**とします. プロットした数式のタブで両式のプロット範囲を $-180 < x < 180$ とします.
- 式 $\cos 2x°$ を選択し, サインのプロットにドラッグします.

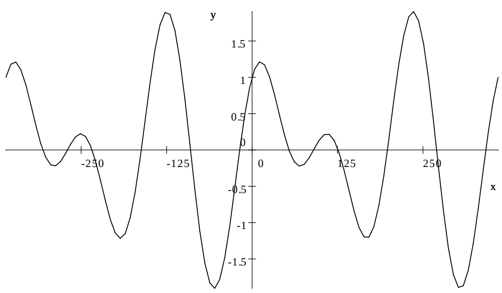


$y = \sin x°$, $y = \cos 2x°$

▶ **2D プロット** + **直交座標**

$\sin 2x° + \cos 3x°$

- **編集** + **プロパティ**とします. プロットした数式のタブで両式のプロット範囲を $-360 < x < 360$ とします.



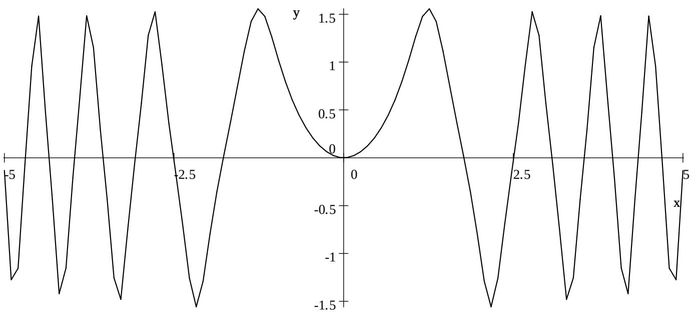
6.10.2 定義した関数

定義した関数のプロットには 2 通りの方法があります．関数の定義は, 例えば, 式 $f(x) = x \sin x$ にカーソルを配置して**関数定義**サブメニューから**新しい定義**コマンドを選択して行ないます.

► **定義した 1 変数の関数f をプロットする**

1. 関数名 f または数式 $f(x)$ を選択します.
2. **2D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

Example 15 **関数定義**サブメニューの**新しい定義**コマンドで関数 $g(x) = \tan \sin \left(x^2\right)$ を定義して, その関数名 g を使ってプロットすると次のようになります.



g

6.10.3 連続および不連続な関数のプロット

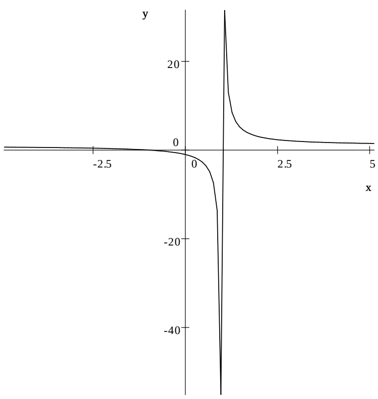
数式を単純にプロットすると不連続曲線のみがプロットされ, 関数名でそれをプロットすると漸近線もプロットされます.

► **垂直漸近線を表示する**

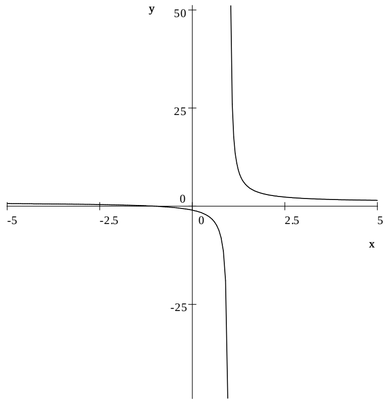
- プロットした数式タブから不連続点を調整するのチェックを外します.

► **2D プロット + 直交座標**

$$\frac{x+1}{x-1}$$



不連続点を調整するチェック無し



不連続点を調整するにチェック

このチェックは個々の関数に対して適用されますので, 異なる設定の関数を同一プロット上に描画することも可能です.
不連続点を調整するというオプションがチェックされていると, 画面上にプロットできない関数が存在します. 例えば

$$10^5\left(x^{10^{-5}}-1\right)/\ln(x)$$

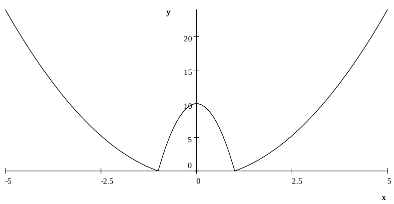
がその一例です. プロットする際に設定を変更する必要がある場合には, CTRL キーを押しながら, プロットコマンドを実行します. プロットのプロパティダイアログボックスが開き, プロットを作成する前に, 設定を編集できます.
連続および不連続な区間定義関数の描画方法を次のセクションで紹介します.

6.10.4 区間定義関数のプロット

区間定義関数は 2 列または 3 列の行列の左に大カッコを付けて表示する必要があります. 区間定義関数の記述方法に関する詳細は 105 ページを参照してください.

► **2D プロット ＋ 直交座標**

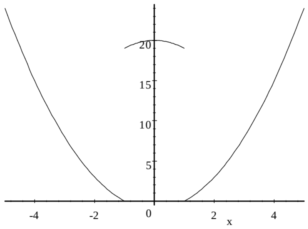
$$\begin{cases} x^2-1 & \text{if} \quad x<-1 \\ 10-10x^2 & \text{if} \quad -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & \text{if} \quad 1<x \end{cases}$$



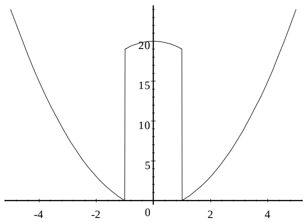
前述のように, プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブにある不連続点を調整するチェックを外すことによって, 数式 $g(x)$ の連続したグラフを描くことができます.

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

$$\begin{cases} x^2-1 & \text{if} \quad x<-1 \\ 20-x^2 & \text{if} \quad -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & \text{if} \quad 1<x \end{cases}$$

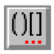


チェック



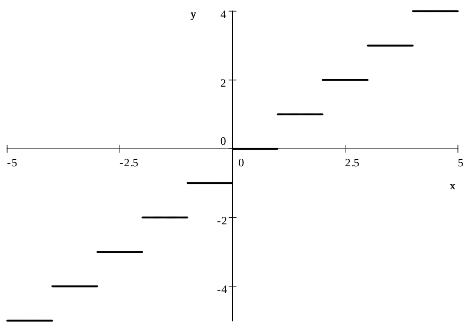
チェック無し

6.10.5　特別な関数

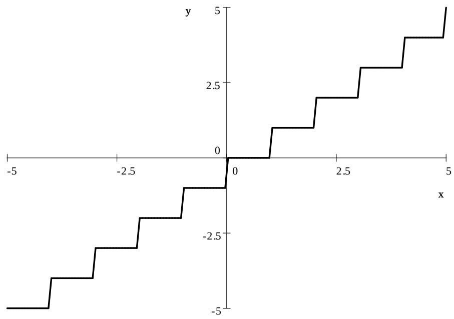
最大整数関数 またはフロア関数 $f(x)=\lfloor x\rfloor$ を入力します. カッコは  をクリックして表示される  を利用します. フロア関数の詳細は 32 ページをご覧ください.

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

$\lfloor x\rfloor$



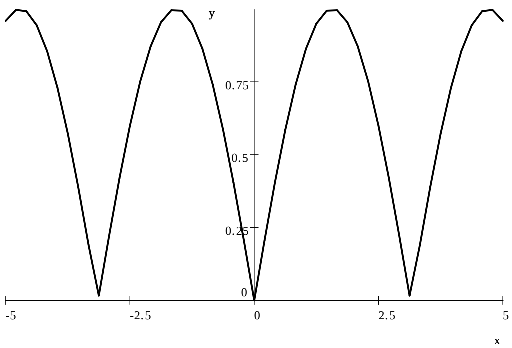
プロットのプロパティダイアロのプロットした数式タブの不連続点を調整するのチェックを外すと, この関数を連続したプロットで表示できます.



同じ方法で絶対値関数 $f(x) = |x|$ を定義します．絶対値の記号は  ボタンを使います．次に関数 $f(x) = |\sin x|$ の例を示します．

► **2D プロット ＋ 直交座標**

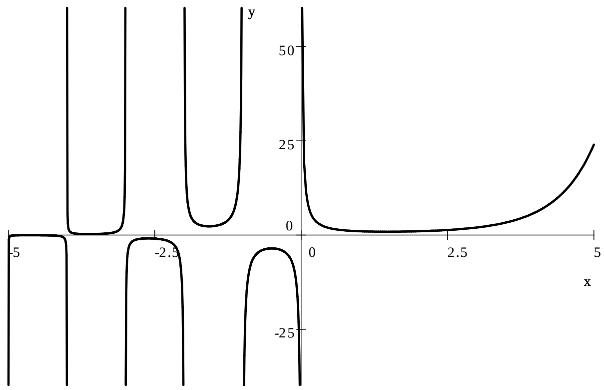
$|\sin x|$



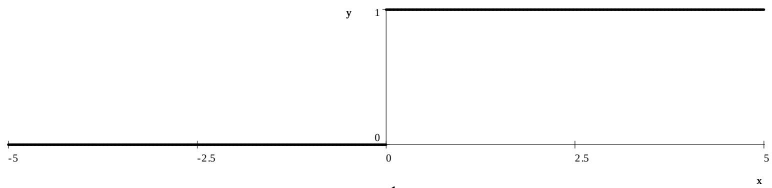
ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は正の整数 n で定義される密度 $\Gamma(n+1) = n!$ を表す関数です．ガンマ関数のプロットには垂直な漸近線が表示されます．

► **2D プロット ＋ 直交座標**

$\Gamma(x)$



ヘビサイド関数は次のように定義されます.



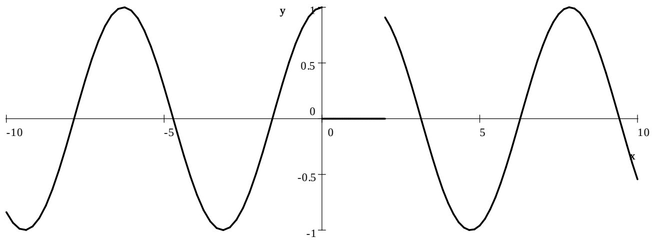
$$\mathrm{Heaviside}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < 0 \\ 1 & \text{if} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

これは, 組込み関数です. ヘビサイド関数を利用する場合は, **挿入** + **数式名**として Heaviside と入力します.
ヘビサイド関数には, 区間定義関数を作成する別の方法があります.

$$\mathrm{Heaviside}(x-2)\sin(x) + \mathrm{Heaviside}(-x)\cos x = \begin{cases} \sin x & \text{if} & x \geq 2 \\ 0 & \text{if} & 0 \leq x \leq 2 \\ \cos x & \text{if} & x \leq 0 \end{cases}$$

► **2D プロット + 直交座標**

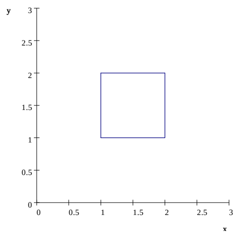
$\mathrm{Heaviside}(x-2)\sin x + \mathrm{Heaviside}(-x)\cos x$



6.10.6　多角形と点のプロット

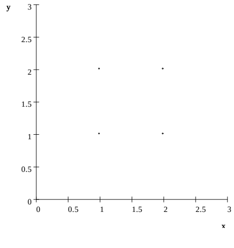
散在する点 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)\}$ や多角形の頂点のベクトル形式 $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots, x_n, y_n)$, または, 行列 $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \vdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \vdots & y_n \end{bmatrix}$ をプロットする時は **2D プロット**+ **直交座標**コマンドを利用します.

► **2D プロット + 直交座標**
$(1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1)$, 表示範囲 $0 < x < 3$, $0 < y < 3$



デフォルトで点は直線によって結ばれます. 結線しない場合は, プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブでプロットスタイルに**点**を選択します.

► **2D プロット + 直交座標, 編集 + プロパティ, 数式情報, 点, 円**
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 表示範囲 $0 < x < 3$, $0 < y < 3$



Example 16 5 角形を作成する時は 5 つの頂点 $\left(\cos\frac{2\pi k}{5}, \sin\frac{2\pi k}{5}\right)$ を持つ星の形を囲むことによって作成します. ここで k の範囲は 0 から 5 とします.

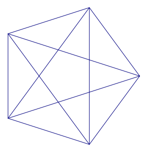
1. 次のベクトル式にカーソルを配置します.

$$\left[1, 0, \cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{6\pi}{5}, \sin\frac{6\pi}{5}, \cos\frac{8\pi}{5}, \sin\frac{8\pi}{5}, 1, 0\right]$$

2. **2D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.
3. **編集**メニューから**プロパティ**を選択するか, またはフレームをダブルクリックしてダイアログボックスツールをクリックします.
4. **両軸で同じスケーリングを採用する**オプションをチェックします.
5. ベクトルを選択します.

$$\left[1, 0, \cos\frac{4\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{8\pi}{5}, \sin\frac{8\pi}{5}, \cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{6\pi}{5}, \sin\frac{6\pi}{5}, 1, 0\right]$$

これをフレーム上へドラッグします.

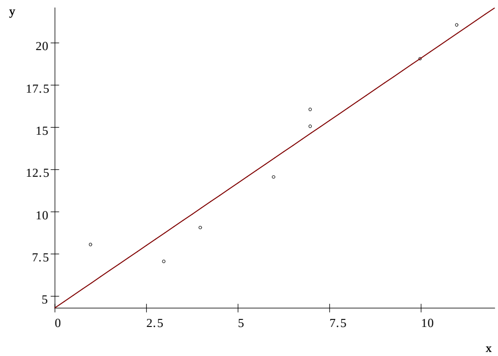


直線と点によるプロットを組合せる方法を次に紹介します. 図の直線はフィット直線です. フィット直線に関する詳細は 421 ページを参照してください.

▶ **2D プロット** + **直交座標**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 7 & 10 & 11 \\ 8 & 7 & 9 & 12 & 15 & 16 & 19 & 21 \end{bmatrix}$$

- **編集** + **プロパティ**, 点, 円そして式 $\frac{2792}{647} + \frac{957}{647}x$ を選択しビューにドラッグします.



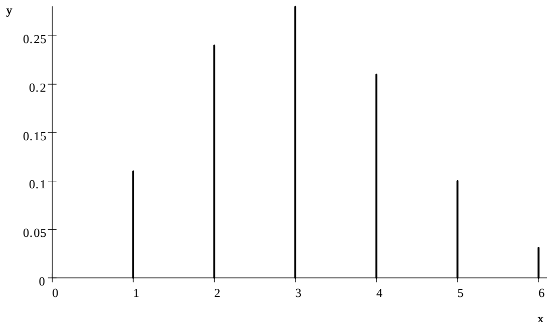
次の例のように, 多角形のプロットで折れ線と棒グラフを作成することができます. 最初の例は, 折れ線グラフを作成します.

1	2	3	4	5	6
0.11	0.24	0.28	0.21	0.1	0.031

▶ **2D プロット** + **直交座標**

$(1, 0, 1, 0.11)$

- 次のベクトルをビューにドラッグします. $(2, 0, 2, 0.24)$, $(3, 0, 3, 0.28)$, $(4, 0, 4, 0.21)$, $(5, 0, 5, 0.1)$, $(6, 0, 6, 0.031)$



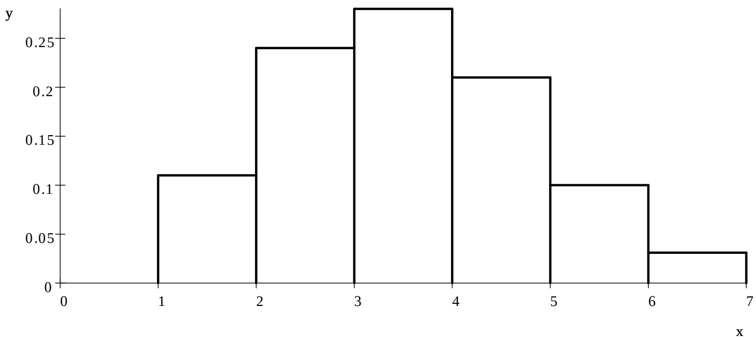
次の例は, 棒グラフまたはヒストグラムです.

1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
0.11	0.24	0.28	0.21	0.1	0.031

► **2D プロット** ＋ **直交座標**

$(1, 0, 1, 0.11, 2, 0.11)$

- 次のベクトルをそれぞれビューにドラッグします. $(2, 0, 2, 0.24, 3, 0.24)$, $(3, 0, 3, 0.28, 4, 0.28, 4, 0)$, $(4, 0.21, 5, 0.21, 5, 0)$, $(5, 0.1, 6, 0.1, 6, 0)$, $(6, 0.031, 7, 0.031, 7, 0)$



外部データファイルのインポート方法に関する詳細は 396 ページを参照してください.

グリッド線のプロット

ポイントをプロットする方法でグリッド線を描画します.

Example 17 次の範囲でグリッド線を描画します. $-5 < x < 5$, $-5 < y < 5$

1. 次のリストにカーソルを配置します.

$$[-5, 0, 5, 0]$$

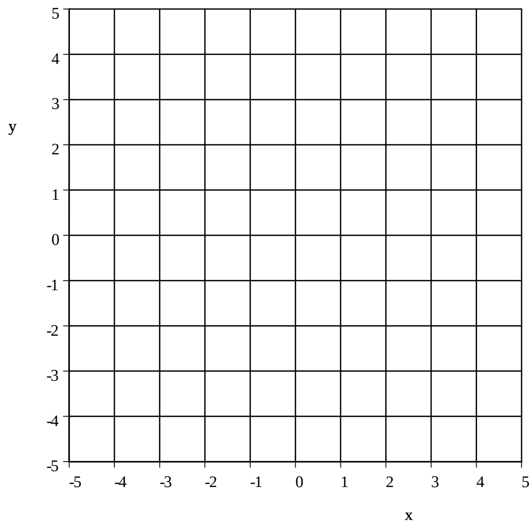
2. **2D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

3. **編集**メニューから**プロパティ**を選択するかまたは, フレームをダブルクリックしてダイアログボックスツールをクリックします.
4. 両軸で同じスケーリングを採用するオプションをチェックし, 軸の種類をボックスか, またはフレームにします.
5. 各ベクトルを選択します.

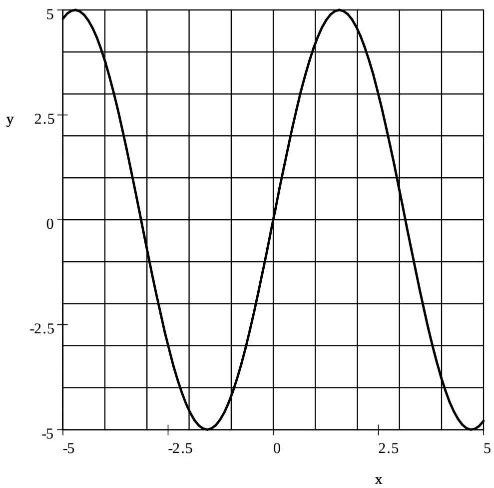
$$\begin{array}{lll}
[-5,5,-5,-5] & [-4,5,-4,-5] & [-3,5,-3,-5] \\
[-2,5,-2,-5] & [-1,5,-1,-5] & [0,5,0,-5] \\
[1,5,1,-5] & [2,5,2,-5] & [3,5,3,-5] \\
[4,5,4,-5] & [5,5,5,-5] & [-5,-5,5,-5] \\
[-5,-4,5,-4] & [-5,-3,5,-3] & [-5,-2,5,-2] \\
[-5,-1,5,-1] & [-5,1,5,1] & [-5,2,5,2] \\
[-5,3,5,3] & [-5,4,5,4] & [-5,5,5,5]
\end{array}$$

個別にフレーム上へドラッグします.

6. プロットのプロパティダイアログの軸タブで, 軸の表示方法をフレームにします.



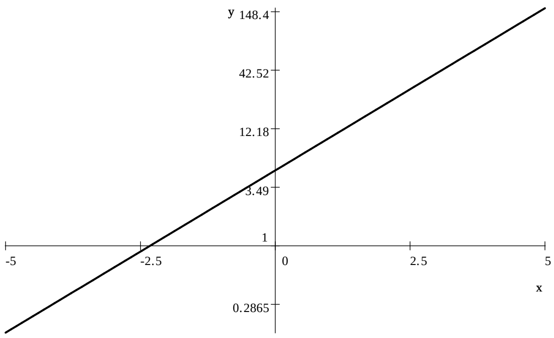
数式をこのグリッドにドラッグすれば, グリッド上にプロットを作成できます.



6.10.7　片対数と両対数グラフのプロット

片対数と両対数 への軸の変更はプロットのプロパティのダイアログの軸タブで行ないます.
片対数プロットは y 軸を対数スケールとする 2D プロットです. 指数関数 $f(x) = cb^x$ を片対数プロットすると, これは直線で表示されます.

► **2D プロット ＋ 直交座標, 軸スケールは片対数**
$5\left(2^x\right)$

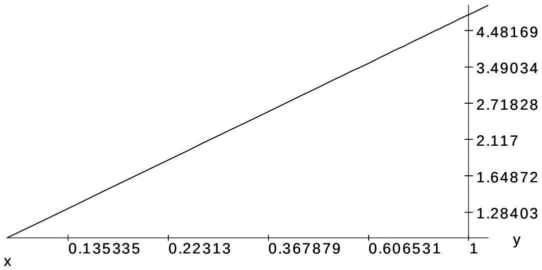


$5\left(2^x\right)$ の片対数グラフ

両対数グラフは xy の両軸を対数スケールにした 2D プロットです. 累乗関数 $f(x) = ax^n$ を両対数プロットすると直線で表示されます.

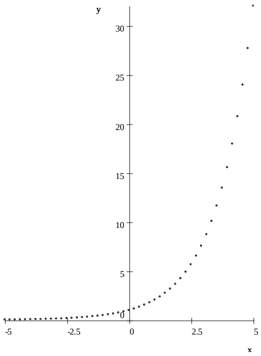
► **2D プロット ＋ 直交座標, 軸スケールは両対数**
$5x^{2/3}$

- プロット範囲 $0.1 < x < 1.1$

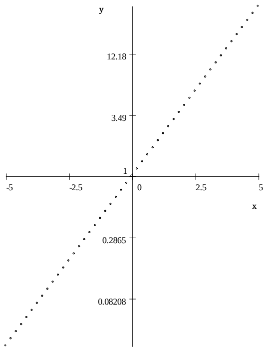


$5x^{2/3}$ の両対数グラフ

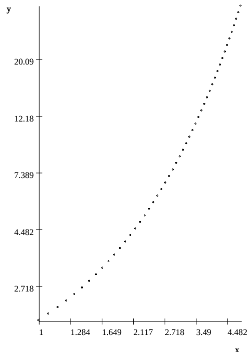
式 2^x を線形, 片対数, 両対数でプロットしたものを次に示します.



2^x 線形



2^x 片対数



2^x 両対数

6.10.8　パラメトリックプロット

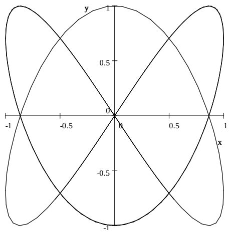
2D パラメトリック曲線は 2 つの方程式のペア $x = f(t)$, $y = g(t)$ によって定義されます. この曲線は点 $(f(t), g(t))$ で定義され, t の範囲に従った曲線を作成します.

► **2D パラメトリック曲線をプロットする**

1. 曲線を構成する 2 つの式を定義します. 次に示すようなベクトル形式で式を記述します. $[\sin 2t, \cos 3t]$, $(\sin 2t, \cos 3t)$, $\begin{bmatrix} \sin 2t & \cos 3t \end{bmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sin 2t & \cos 3t \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 3t \end{bmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$.
(後ろの 4 つは 1×2 および 2×1 の行列です.)
2. カーソルを式に配置してます.
3. **2D プロット**サブメニューから**パラメトリック**を選択します.

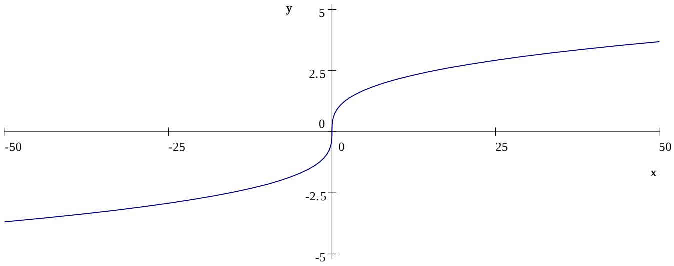
次の図はベクトル $[\sin 2t, \cos 3t]$, 範囲 $0 \leq t \leq 2\pi$ で作成した $x = \sin 2t$, $y = \cos 3t$ のパラメトリックプロットです．**両軸に同じスケーリング**を選択します.

▶ **2D プロット ＋ パラメトリック**
$(\sin 2t, \cos 3t)$



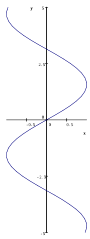
逆関数や関数 $y = f(x)$ の逆関係を描画するときは $(f(x), x)$ を要素とするパラメトリック曲線を作成します．ここでは, 関数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ をプロットする場合, その逆関数 $y = x^3$ をパラメトリックプロットで描画する方法を紹介します.

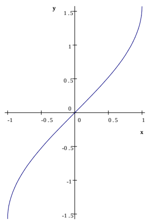
▶ **2D プロット ＋ パラメトリック**
$\left(x^3, x\right)$



関数 $\sin x$ の逆関数は次のようになります．表示タブの表示範囲を調整すれば, 逆関数 $\sin^{-1} x$ の様子をより明確に把握できます.

▶ **2D プロット ＋ パラメトリック**
$(\sin x, x)$

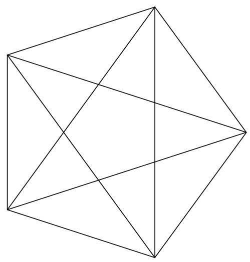




$\arcsin x$

Example 18 5 角形を作成する場合は星型を 2 つのパラメトリックプロット $(\cos t, \sin t)$ で囲みます. この時, プロット範囲とポイント数を適切に変更してください.

1. 式 $(\cos t, \sin t)$ にカーソルを配置し, **2D プロット**サブメニューから**陰関数**を選択します.
2. **編集**メニューから**プロパティを選択**するか, または, フレームをダブルクリックしてダイアログボックスツールをクリックします.
3. 軸タブで, 両軸で同じスケーリングを採用するオプションを選び, 軸の種類は無しにします.
4. プロット範囲を $0 \leq t \leq 6.283\,2$ $(\approx 2\pi)$ とし, ポイント数を 6 にします.
5. OK ボタンをクリックします.
6. プロット追加ボタンをクリックし, プロットした数式のボックスに $(\cos t, \sin t)$ を入力します.
7. プロット範囲を $0 \leq t \leq 12.566$ $(\approx 4\pi)$ とし, ポイント数を 6 にします.
8. OK ボタンをクリックします (2 回).



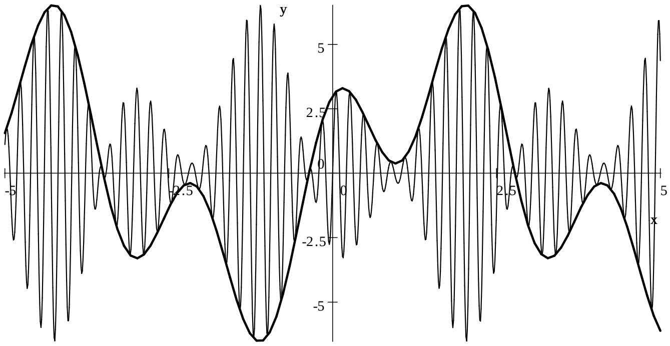
6.10.9　包絡線

複雑な関数の曲線上に単純な曲線が包絡線 として出現する場合があります. ラジオの放送電波に重畳している低周波の音声電波などが, その例です.
次に低周波の曲線 $y = 4\sin x + 3\cos 3x$ とその搬送波 $y = \sin 30x$ の例を示します.　正確なプロットを作成するには, ポイント数を増やします. プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブで, プロット番号を 2 にし, ポイント数を 150 以上にします.

► **2D プロット ＋ 直交座標**

$4\sin x + 3\cos 3x$

- 次の式をフレームにドラッグします．$(4\sin x + 3\cos 3x)\sin 30x$



6.10.10　陰関数のプロット

円を示す方程式を 1 変数の関数に書き換えることはできません．この場合は 2D の陰関数をプロットする機能を使います．

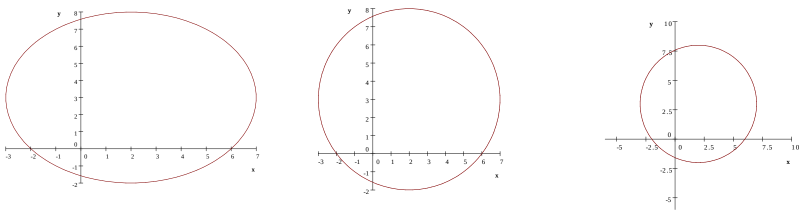
► **方程式をプロットする**

1. 方程式を入力します．
2. カーソルを配置して **2D プロット**サブメニューから**陰関数**を選択します．

次のグラフのプロット範囲は $-3 \le x \le 7$ および $-2 \le y \le 8$ に設定します．

► **2D プロット ＋ 陰関数**

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

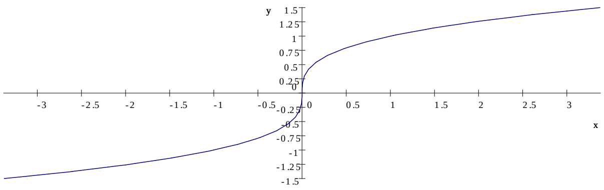


- x 軸と y 軸のスケーリングが異なると図が歪んでしまいます．左のような図が描画されたら，両軸に同じスケーリングを採用するオプションをチェックします．中央のような図に再描画されます．
- プロット範囲が変化しない場合は，表示タブの表示範囲でデフォルトのチェックを外します．そして $-6 \le x \le 10$ および $-6 \le y \le 10$ と変更します．図は右上のようになります．これはプロット範囲を $-3 \le x \le 7$ および $-2 \le y \le 8$ にし，表示タブの表示範囲を $-6 \le x \le 10$ および $-6 \le y \le 10$ にした状態です．

関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f(y)$ が陰関数の場合も，このコマンドを使ってプロットを作成できます．今，関数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ をプロットする場合，関数 $y = x^3$ の逆関数のプロットを考えます．つまり，$x = y^3$ の陰関数プロットを作成します．デフォルトでは y の範囲が大きすぎますので，プロット範囲を $-5 < x < 5$ および $-1.5 < y < 1.5$ に変更したプロットの例を次に示します．

▶ **2D プロット ＋ 陰関数**

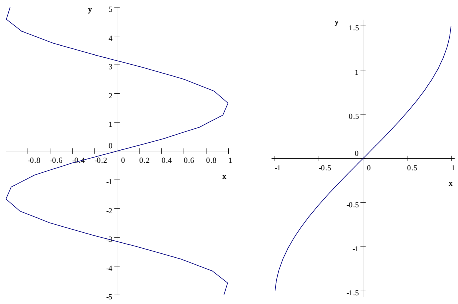
$y^3 = x$



サインの逆関数を陰関数 $x = \sin y$ のプロットとして考えます．表示タブの表示範囲を適当に変更します．プロット範囲を変更すれば，曲線を滑らかに表示することもできます．

▶ **2D プロット ＋ 陰関数**

$x = \sin y$



6.10.11　極座標

極座標の場合，点 P は原点からの角度 θ と原点から点 P までの距離 r で表示することができます．極座標における位置座標は次の式で表せます．

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

次の式も同じように利用できます．

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

▶ **極座標のプロットを作成する**

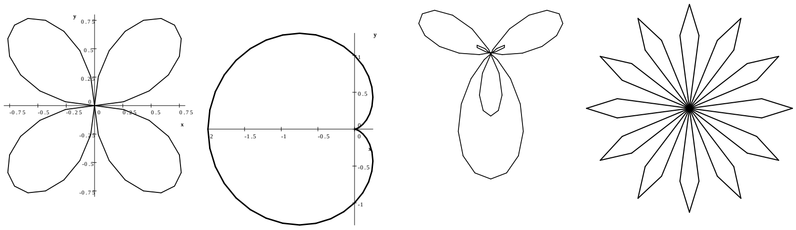
1. 角度 θ と，距離を使った式を入力します．

2. 数式にカーソルを配置して **2D プロット**サブメニューから**極座標**を選択します.

次に示すプロットを表示する場合は, **編集** + **プロパティ**とし, 軸タブを表示します. そこで, **両軸で同じスケーリングを採用する**オプションをチェックします.

▶ **2D プロット** + **極座標**

$\sin 2\theta$　　$1-\cos\theta$　　$1-\sin\theta+2\sin 3\theta$　　$\cos 6\theta$

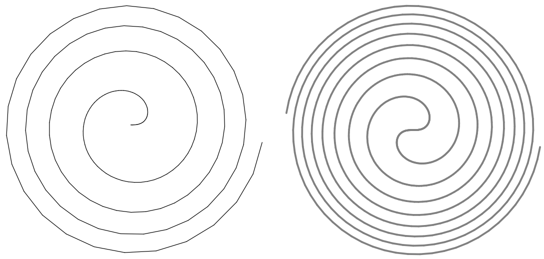


6.10.12 パラメトリック極座標プロット

式 $\theta = r^2$ の極座標プロットを作成する時は, ベクトル $\left(r, r^2\right)$ を 2D の極座標コマンドでプロットします. 最初に左側のプロットを作成したら, パラメータの範囲をそれぞれ 0 から 5 , および -5 から 5 と変更します. 次に線の太さを標準にして, 線の色を灰色にします. 右側のプロットは, 線の太さを太くに設定し, 色を灰色にしています. プロット範囲ボタンをクリックして, ポイント数を 200 以上にしています.

▶ **2D プロット** + **パラメトリック, 編集** + **プロパティ, 極座標**

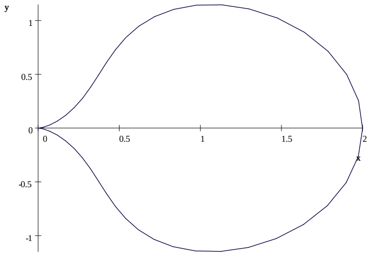
$\left(r, r^2\right)$



半径 r と角度 θ は普通, 第 3 の変数 t によって定義されます. 方程式 $r = 1-\sin t$, $\theta = \cos t$ を使って, パラメトリック曲線の極座標プロットを作成します. つまり, **2D プロット**サブメニューから**パラメトリック**を使って, ベクトル $(1-\sin t, \cos t)$ を描画します. 左の図を編集します. 極座標のパラメータ範囲を $0 \leq t \leq 2\pi$ とします.

▶ **2D プロット** + **パラメトリック, 編集** + **プロパティ, 極座標**

$(1 - \sin t, \cos t)$

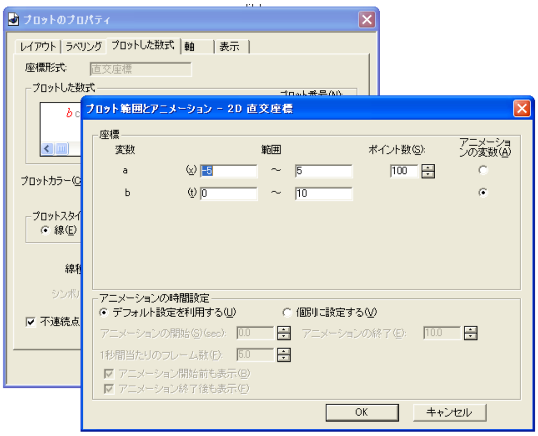


6.11　2D プロットのアニメーション表示と VCAM ウィンドウ

2D プロットのアニメーションを MuPAD の VCAM ウィンドウで表示させることができます. 2D プロットをアニメーション表示させるには, 2 つの変数の内の 1 つをアニメーション変数として指定します. 標準の変数名は水平軸の x とアニメーション変数の t です. 他の変数名を使用している場合, プログラムはその変数名を利用します. これを表示するには, プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブからプロット範囲とアニメーションを選択します. 次ページのダイアログボックスの画像では, a が水平軸, b がアニメーション変数として設定されています. 同じダイアログで, アニメーション表示の時間設定を行うこともできます.

▶ デフォルトのアニメーションの時間設定を変更する

1. プロットのプロパティダイアログを開きます.
2. プロットした数式タブからプロット範囲とアニメーションを選択します.
3. 個別に設定するチェックボックスをチェックします.
4. アニメーションの開始とアニメーションの終了の秒数を設定し, 1 秒間あたりのフレーム数を設定します.



アニメーションの開始時と終了時にプロットを表示するかを選択することも可能です.

▶ **プロット形式全体のアニメーションの時間設定を変更する**

1. **ツール** + **数式処理設定** + **2D プロット**を選択します.
2. プロット形式を選び, アニメーションの開始, アニメーションの終了, 1 秒間あたりのフレーム数を設定します.

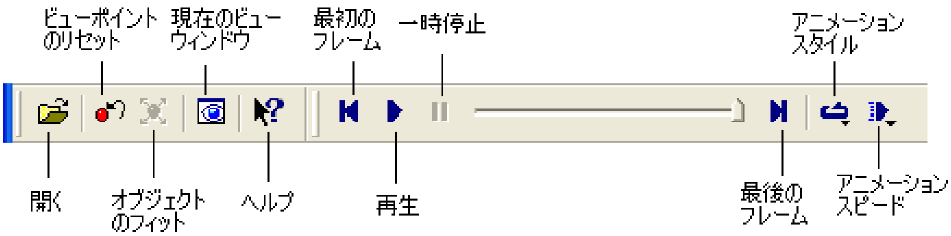
▶ **プロットのアニメーションを表示する**

1. 読み込み専用文書で VCAM ウィンドウを開くには, プロットフレームをクリックします.

書き込み可能な文書で VCAM ウィンドウを開くには, プロットフレームを選択し, 右下隅に表示される VCAM ツールボタン  をクリックします.

2. 再生矢印をクリックするか, アニメーションメニューから再生を選択します.

VCAM ツールバーのアニメーションスタイルドロップダウンリストには, 一回だけ, ループ, 往復のオプションが用意されています. アニメーションスピードドロップダウンリストには 1/8 **倍速**から 8 **倍速までの範囲のオプションが用意されています**. **これらのオプションと再生**, **一時停止**, **最初のフレーム**, **最後のフレームオプションがアニメーションメニューにも用意されています**.



▶ **VCAM ウィンドウを閉じる**

- VCAM ウィンドウの右上隅の × 印をクリックします. または, 閉じるを選択するか, VCAM ファイルメニューから終了して (ファイル名) に戻るを選択します.

6.11.1 直交座標のアニメーション表示

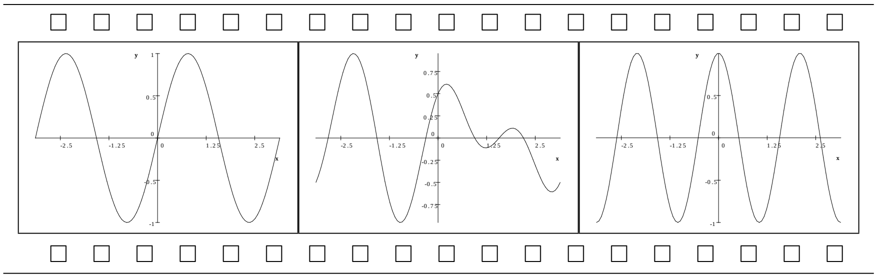
▶ **直交座標のアニメーションを作成する**

- 2 つの変数を持つ数式を入力します. 数式内にカーソルを配置して, **2D アニメーションのプロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

以下のアニメーションは $y = \sin 2x$ のグラフが $y = \cos 3x$ に滑らかに移行していく様子を表しています.

▶ **2D アニメーションのプロット + 直交座標**

$t\cos 3x + (1-t)\sin 2x$



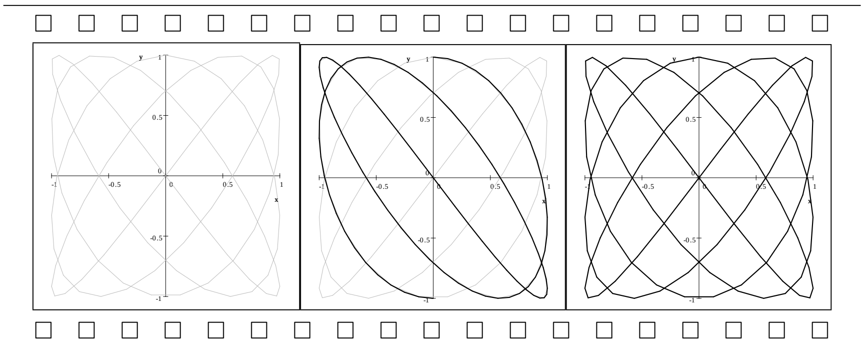
▶ **直交座標のパラメトリックアニメーションを作成する**

1. $(x(s,t), y(s,t))$ 形式の数式を入力します.
2. カーソルを数式内に配置し, **2D アニメーションのプロット**サブメニューから**直交座標**またはパラメトリックを選択します.

次のリサジューの図形をアニメーション表示するには, フレームを選択し, **編集** + **プロパティ**を選択します. プロットした数式タブを表示し, プロットの範囲とアニメーションを選択します. 変数 x と t の範囲を $0 \leq x \leq 1$ と $0 \leq t \leq 1$ に設定します. 2 番目の式では, 図形の先端に小さな円を描きます. 3 番目の数式は薄い灰色で静止図形を描きます.

▶ **2D アニメーションのプロット + 直交座標**

$(\sin 8\pi xt, \cos 10\pi xt)$
$(\sin 8\pi t + 0.02\cos 2\pi x, \cos 10\pi t + 0.02\sin 2\pi x)$
$(\sin 8\pi x, \cos 10\pi x)$



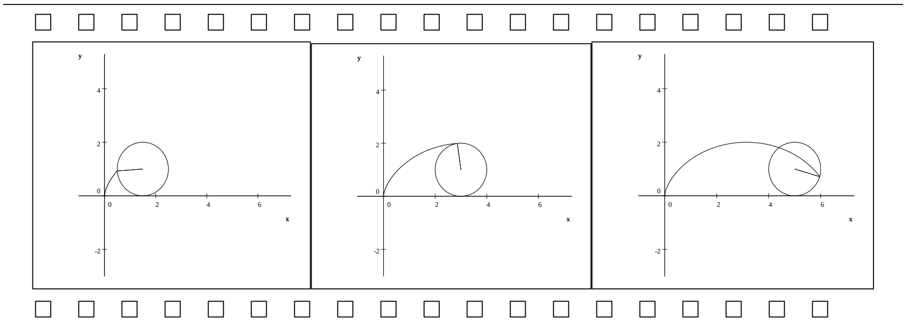
サイクロイド曲線とは円が直線上を転がるとき、その円周上の定点が描く軌跡です. サイクロイド曲線は 3 つのパラメトリック曲線を使って, アニメーション表示することができます. 1 番目の式は x-軸の $(2\pi t, 0)$ 点上に静止している円を描きます. 2 番目の式は半径を, 3 番目の式は $0 \leq x \leq 2\pi t$ の範囲のサイクロイド曲線の一部を描きます.

フレームをクリックし, **編集** + **プロパティ**を選択します. プロットした数式タブを表示し, プロット範囲とアニメーションを選択します. 各変数の範囲は $0 \leq x \leq 1$ と $0 \leq t \leq 1$ にします. 軸タブに移動し, 両軸で同じスケーリングを採用をチェックします.

▶ **2D アニメーションの作成 + 直交座標**

$(2\pi t + \cos 2\pi x, 1 + \sin 2\pi x)$

$(2\pi t - x\sin 2\pi t, 1 - x\cos 2\pi t)$　　$(2\pi xt - \sin 2\pi xt, 1 - \cos 2\pi xt)$



6.11.2　極座標のアニメーション表示

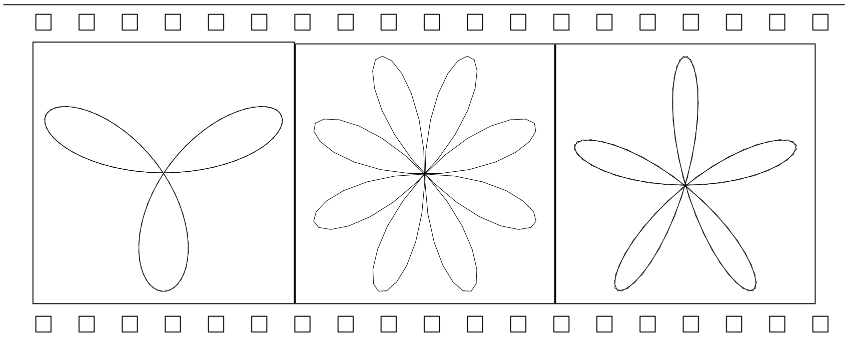
▶　**極座標の 2D アニメーションを作成する**

1. 2 変数を持つ式を入力します.
2. 数式内にカーソルを配置します. **2D アニメーションのプロット**サブメニューから**極座標**を選択します.

次のアニメーションは極方程式 $r = \sin\theta t$ に変数 t が与える影響を表しています. 3 枚の花びらが 8 枚になり, 最後に 5 枚になるように変化します.
このアニメーションをプロットするには, フレームをクリックし, **編集** + **プロパティ**を選択します. プロットした数式タブからプロット範囲とアニメーションを選択します. 変数の範囲は, $-3.14159 \leq \theta \leq 3.14159$ と $3 \leq t \leq 5$ に設定します. 表示タブに移動し, 両軸で同じスケーリングを採用をチェックします.

▶　**2D アニメーションのプロット** + **極座標**

$\sin\theta t$



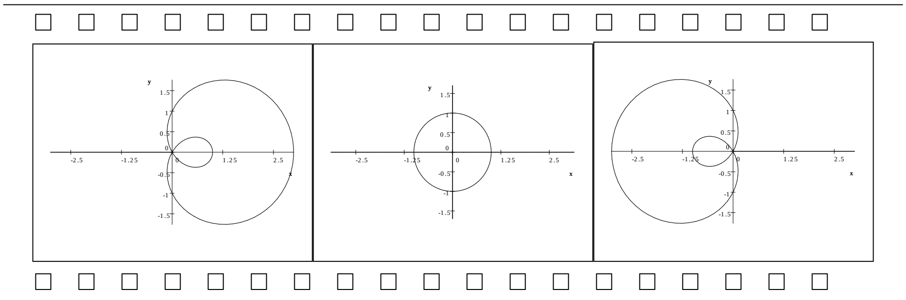
▶　**極座標のパラメトリックアニメーションを作成する**

1. $(r(s,t), \theta(s,t))$ 形式の数式を入力します.
2. 数式にカーソルを配置して, **2D アニメーション**サブメニューから極座標を選択します.

リマソン (またはパスカルの蝸牛線と呼ばれる) は $r = b + a\cos\theta$ の極形式の曲線です．次のアニメーションをプロットするには，フレームをクリックし，**編集** + **プロパティ**を選択します．プロットした数式タブのプロット範囲とアニメーションを選択します．変数の範囲を $-3.14159 \leq \theta \leq 3.14159$ と $3 \leq t \leq 5$ と設定します．表示タブに移動し，両軸で同じスケーリングを採用をチェックします．アニメーションは極形式の方程式 $r = 1 - t\cos\theta$ における -2 から 2 へと変化する変数 t の影響を表します．

▶ **2D アニメーションのプロット + 極座標**

$(1 - t\cos\theta, \theta)$



6.11.3　陰関数のアニメーション表示

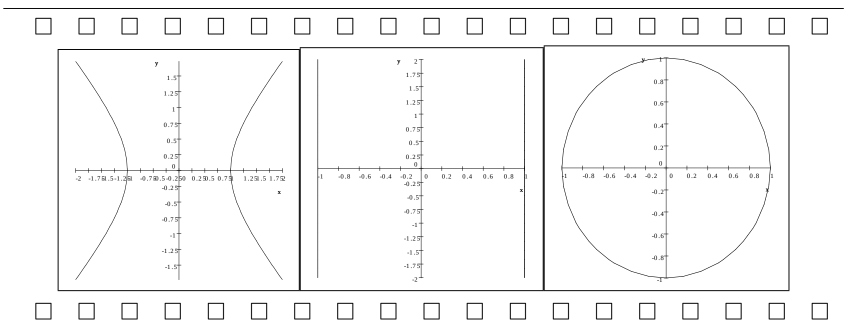
▶ **陰関数のアニメーションを作成する**

1. 3 変数の数式を入力します．
2. 数式にカーソルを配置し，**2D アニメーションのプロット**サブメニューから陰関数を選択します．

次のアニメーションは，直交形式の方程式 $x^2 + ty^2 = 1$ における -1 (双曲線を生成) から $+1$ (円を生成) へ変化する変数 t が及ぼす影響を表しています．このアニメーションをプロットするには，フレームをクリックし，**編集** + **プロパティ**を選択します．プロットした数式タブのプロット範囲とアニメーションを選択し，変数の範囲を $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ と設定します．表示タブに移動し，両軸で同じスケーリングを採用を選択します．

▶ **2D アニメーションのプロット + 陰関数**

$x^2 + ty^2 = 1$



6.12　3D プロットのビュー

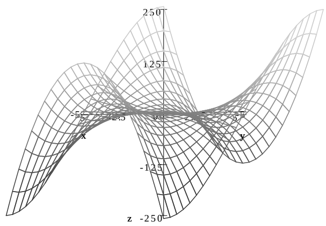
3D 空間で曲線や曲面をプロットする方法は 2D 平面でのプロットの場合とほぼ同じです．ビューはひとつの箱であり，この大きさは各軸の範囲 $x_0 \le x \le x_1$, $y_0 \le y \le y_1$, $z_0 \le z \le z_1$ によって決ります．
プロット範囲のデフォルトは $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$ であり，z 軸の設定はプロットする数式によって決ります．変数名はアルファベット順に決りますので他のアルファベットを使っても構いません．

▶　**2 変数の数式をプロットする**

1. 数式にカーソルを配置します．
2. 数式処理ツールバーから 3D プロット直交座標ボタン，または **3D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します．

次に曲面 $z = x^3 - 3xy^2$ を示す 3D プロットを示します．変数 x と y および z のビューのデフォルト，また，式 $x^3 - 3xy^2$ のプロット範囲はデフォルトのまま変更しません．式 $x^3 - 3xy^2$ にカーソルを配置し，数式処理ツールバーの 3D プロット直交座標ボタンをクリックするか，または，**3D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します．

▶　**3D プロット ＋ 直交座標**
$x^3 - 3xy^2$



6.13　3D プロットのツールとダイアログ

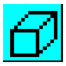
作成したプロットを編集する場合に，プロットのプロパティダイアログを利用します．3D プロットのビューを変更する場合はプロットオリエンテーションツールを利用します．

6.13.1　プロットオリエンテーションツール

プロットオリエンテーションツールとは 3D 空間の表示角度を設定するための機能です．その際，プロットのプロパティダイアログの表示タブを使って表示角度を変更します．

▶ 3D オリエンテーションツールを表示する

- プロットをダブルクリックしてビューを選択した状態にします.

3D プロットのオリエンテーションツール  がフレームの右上に表示されます. この時に, フレームには 8 つのハンドルが表示されます.

▶ プロットオリエンテーションツールで表示角度を変更する

1. ビューをダブルクリックします.
2. マウスポインタをプロットに移動します. ポインタが手の形に変わります.
3. マウスの左ボタンをビュー上でドラッグします.
4. 適当な場所でマウスボタンを離します.

マウスボタンを押しながら, 移動させると 3D のボックスがビューに表示されます. マウスボタンを離すと, プロットが再描画されます.
プロットのプロパティダイアログの表示タブを使って, プロットの表示方向を変更することもできます. 次のセクションでその方法を説明します.

6.13.2　3D プロットのプロパティダイアログ

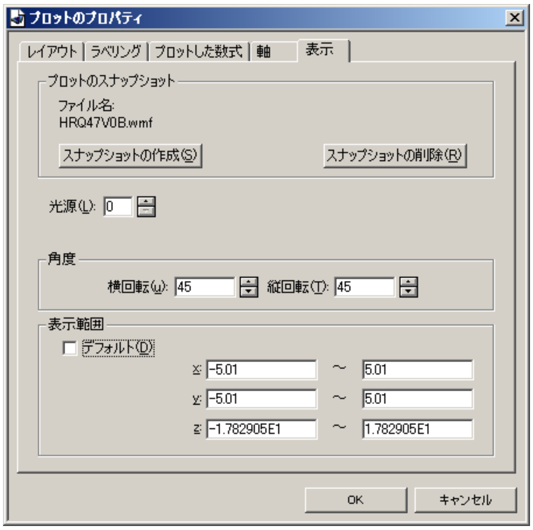
▶ 3D プロットの編集に利用するプロットのプロパティダイアログを表示する

1. 目的のフレームをクリックします.
   または
   目的のフレームをダブルクリックしてビューを選択します.
2. 右下にあるプロットのプロパティのアイコンをクリックします.
   または
   編集メニューから**プロパティ**を選択します.
   または
   マウスの右ボタンをクリックして表示されるメニューから**プロパティ**を選択します.
   または
   標準ツールバーの  をクリックします.

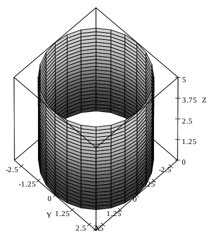
編集作業が終了したら, OK ボタンをクリックします. 編集内容が保存され, プロットが再描画されます. 編集作業を無効にする場合はキャンセルボタンをクリックします.

表示タブ
スナップショット　　プロットのスナップに関する詳細は 207 ページを参照してください.
光源　　表示タブでは光源の設定も編集できます. 選択肢は—0, 1, 2, 3, 4—です.
表示角度　　プロットの表示角度はプロットのプロパティの表示タブにある表示項目で設定します. つまり, ここでプロットの横回転, 縦回転を制御します. 縦方向の回転角度は, すなわち, z 軸

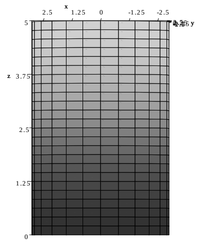
を角度 φ だけ前後に回転させることを意味しています．横方向への回転とは z 軸を中心に xy 平面を角度 θ だけ回転させることを意味しています．



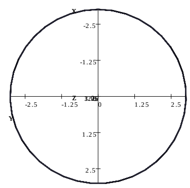
縦方向の回転は -180 から 180 までの値を設定でき，横方向の回転は -360 から 360 の値を設定できます．ティルトを 0，または ± 180 に設定すると z 軸は水平になります．縦回転を ± 90 に設定すると z 軸は垂直になります．シリンダ $r = 3$ を縦または横に回転させた例を次に示します．



横 45, 縦 45



横 90, 縦 90



横 0, 縦 0

表示タブの表示範囲　プロット範囲とはサンプリングされた点の存在する範囲を示し，表示タブの表示範囲とは軸の表示範囲を示すものです．ビューの表示はプロット範囲によって決ります．なぜなら x 軸と y 軸の値によって普通 z 軸の値は大きく異なるためです．特に上下に振れている曲面の場合は値が大きく変化します．ビューの表示範囲はプロットのプロパティの表示タブで設定します．プロット範囲を色々と変化させる場合はプロットした数式のタブで操作します．
表示範囲を変更する場合は，表示タブの表示範囲のデフォルトのチェックボタンを外します．

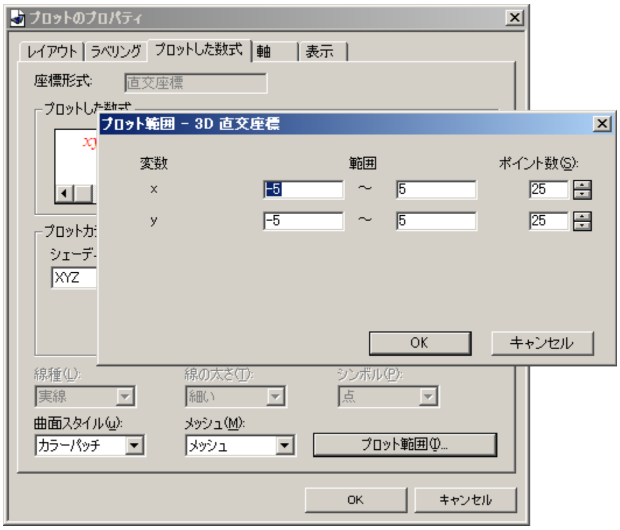
プロットした数式タブ

プロットした数式タブでは画面上にプロットした数式の編集を行ないます．個々の数式はプロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブで編集することができます. プロットした曲面の色や線種などはそれぞれ独立して設定できます.

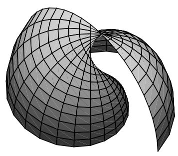
数式リスト　　プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブには, プロットした数式や不等式を表示するテキストボックスがあります. プロットした式をまとめて数式と呼びます. 各数式にはプロット番号が付きます. 目的の数式に関する情報を表示する場合はプロット番号のテキストボックスにある上下の矢印をクリックします.

曲線や曲面の式を編集するだけでなく, 数式の追加, 削除も行なえます．数式の編集はプロットした数式のテキストボックス内で直接行ないます．数式を追加する場合はプロット追加ボタンをクリックし, 目的の式を入力します．削除する場合は, 上下矢印で目的の数式を表示してプロット削除ボタンをクリックします.

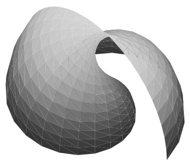
プロット範囲とポイント数　　プロットプロパティダイアログのプロットした数式タブには曲線のプロット範囲を設定するボタンがあります．ここで設定した範囲内で指定された数のポイントをサンプリングします．そして, そのポイントを使って曲線が作成されます.



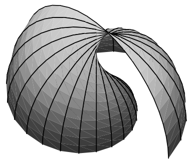
作成される 3D プロットはサンプリングされたデータから計算処理されたものです．従って, ポイント数を増やせば, それだけ質の高いグラフを作成できます.



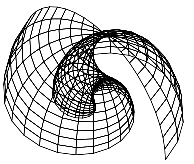
曲面スタイル: カラーパッチ
メッシュ: メッシュ
シェーディング:グレースケール



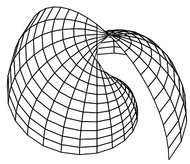
曲面スタイル: カラーパッチ
メッシュ: 無し
シェーディング:グレースケール



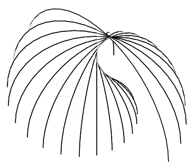
曲面スタイル: カラーパッチ
メッシュ: 等高線
シェーディング:グレースケール



曲面スタイル: ワイヤフレーム
メッシュ: メッシュ
シェーディング: フラット



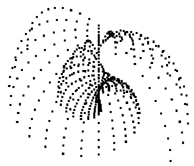
曲面スタイル: 陰線
メッシュ: メッシュ
シェーディング: フラット



曲面スタイル: 陰線

メッシュ: 等高線

シェーディング: フラット



曲面スタイル: 点

メッシュ: 無し

シェーディング: フラット

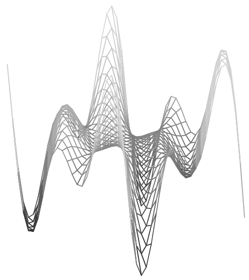
軸タブ

軸の表示方法は標準, 無し, ボックス, フレームから選択できます.

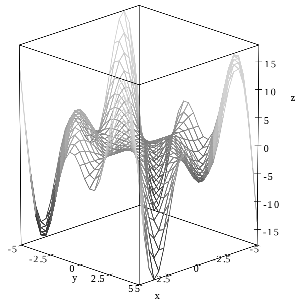
- 標準は原点がビュー内に存在する場合 x , y , z 軸を表示し, 原点が入らない場合でも, できるだけ原点近くに 3 つの軸を表示します.
- ボックスはボックスフレームの中にプロットを表示します.
- フレームは垂直な軸を左端に, 2 つの軸を下側に表示します.

無し, 以外のオプションを選択すると数値ラベルが自動表示されます.
独立変数の軸にはその変数名のラベルが自動的に付きます. また, 次のようにカスタマイズすることもできます.

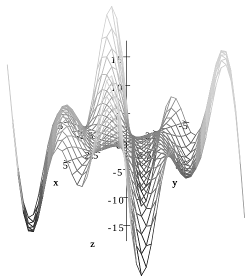
- x, y, z 軸の軸目盛の数を変更したり, 目盛ラベルを隠す.
- x, y, z 軸にカスタムラベルを追加する.
- 両軸で同じスケーリングを採用する.



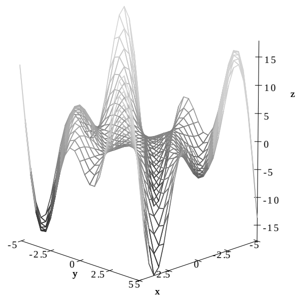
軸の種類: 無し



軸の種類: ボックス



軸の種類: 標準



軸の種類: フレーム

ラベリングタブ

このオプションの設定はすべてのプロットや画像ファイルの場合, 基本的に同じです. このオプションの利用方法に関する詳細は 150 ページを参照してください. オンラインヘルプでラベルの項目を検索して, 関連する情報を見ることもできます.

6.14　関数と数式の 3D プロット

3D プロットコマンドには様々な 3D 曲面をプロットするコマンドが用意されています. ここでは直交座標, 円柱座標, 球面座標, 陰関数, 環のプロットを作成する方法について解説します. 勾配およびベクトルの 3D プロットについてはベクトルの微積分 (351 ページ) で紹介します.
Scientific Notebook の場合, 3D プロットのメニューコマンドに**直交座標**しか表示されない場合があります. その時は, **ツール**メニューの**計算エンジン設定**を選び, 一般タブで簡略化した**数式処理メニュー**の表示のチェックを外してください. ただし, *Scientific Notebook* で **3D 陰関数**コマンドは利用できません.

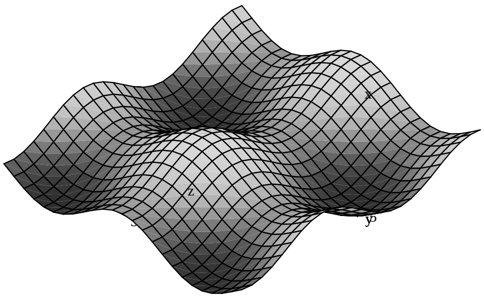
6.14.1　数式

▶　2 変数の数式をプロットする

1. 文章中に数式を入力します.
2. カーソルを式に配置します.
3. **3D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

▶　3D プロット ＋ 直交座標

$\sin x + \cos y$



▶　既存の 3D プロットに2 変数のプロットを追加する

1. 数式を選択します.
2. 数式をプロット上へドラッグします.

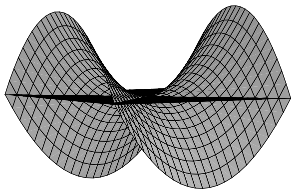
または

1. プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブを表示します.
2. プロット追加ボタンをクリックします.
3. 数式の入力ボックスに数式を入力するか, 貼り付けます.

▶　3D プロット ＋ 直交座標

$x^2 - y^2$

0 (クリックしてフレームにドラッグ)



その他の定義した関数の 3D プロットは次のセクションで紹介します.

6.14.2 定義した関数

2 変数を持つユーザ定義関数をプロットする方法は 2 通りあります. 始めに, 次の式に

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

カーソルを配置して**関数定義**サブメニューから**新しい定義**を選択します.

► **定義した 2 変数の関数f をプロットする**

1. 関数名 f または, 関数 $f(x,y)$ を選択します.
2. **3D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

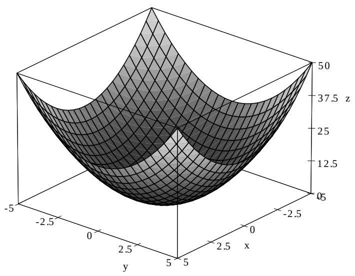
► **2 変数の定義関数 g を 3D プロットに追加する**

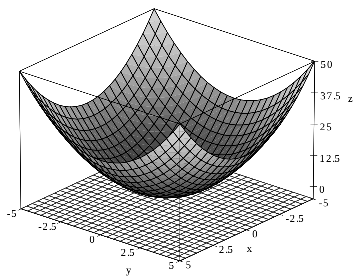
1. 関数名 g または, 関数 $g(x,y)$ を選択します.
2. 既存のプロット上へドラッグします.

ここでは実際に $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ および $g(x,y) = -5$ というユーザ関数を定義します. 下図は関数 $f(x,y)$, および $f(x,y)$ と $g(x,y)$ を同一グラフ上にプロットしたものです. プロット範囲は $-1 \le x \le 1$ および $-1 \le y \le 1$ で表示タブの表示範囲は $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-5 \le z \le 5$ です . z の表示タブの表示範囲がデフォルトでは不適切で 2 つの曲面が表示できないため, デフォルトのチェックを外して表示範囲を調整しています.

► **3D プロット ＋ 直交座標**

$f(x,y)$　　ユーザ関数 $g(x,y)$ をプロットに追加





6.14.3　**パラメトリックプロット**

直交座標におけるパラメトリック曲面は $x = f(s,t)$, $y = g(s,t)$, $z = h(s,t)$ という形式で表示できます．この方法を使うと，いろいろな形の曲面を作り出すことができます．

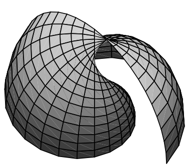
► **パラメトリック曲面のプロット**

1. ベクトル形式で数式を入力します．次に示すように別々の式で記述します．
2. ベクトルにカーソルを配置して **3D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します．

次に示すプロットのパラメータの範囲は $0 \leq s \leq 2\pi$ および $0 \leq t \leq \pi$ です．

► **3D プロット ＋ 直交座標**

$$\begin{bmatrix} s\cos t\sin s & s\cos s\cos t & s\sin t \end{bmatrix}$$



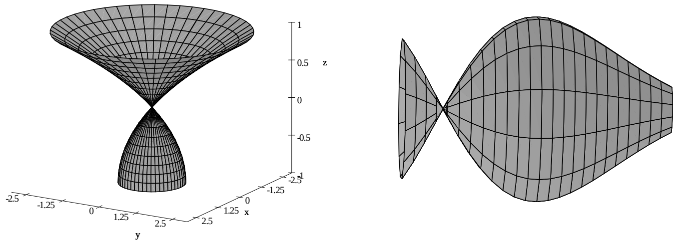
ある平面曲線をその平面内の線の周りを回転させることによって生成される曲面は回転面です．$y = f(x)$ のグラフをパラメトリック形式 $(f(s)\cos t, f(s)\sin t, s)$ を使って z 軸の周りを回転させて生成した曲面と $y = f(x)$ のグラフを x 軸の周りを回転させることによって生成した曲面はパラメトリック形式 $(f(s)\cos t, s, f(s)\sin t)$ を使って，プロットすることができます．次に示す左の図は，表示範囲を $-1 \leq z \leq 1$, $-\pi \leq t \leq \pi$ とし，右の図は，表示範囲を $-2 \leq x \leq -0.5$,

$-\pi \leq t \leq \pi$ としています.

▶ **3D プロット ＋ 直交座標**

$\left(\left(2z+z^2\right)\cos t, \left(2z+z^2\right)\sin t, z\right)$

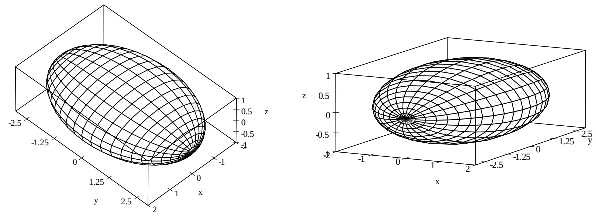
$\left(\left(\sin x^2\right)\cos t, x, \left(\sin x^2\right)\sin t\right)$



次に楕円の 3D パラメトリックプロットの例を紹介します. 軸の表示方法はボックスフレーム, 曲面スタイルは陰線にし, プロット範囲を $-1.57 \leq s \leq 1.57$ および $0 \leq t \leq 6.28$ とします.

▶ **3D プロット ＋ 直交座標**

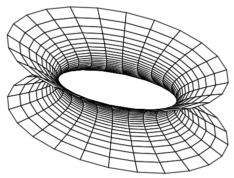
$[2\cos t\cos s, 3\sin s, \sin t\cos s]$



次に 1 曲面で構成される 3D ハイパボロイド曲面の例を紹介します. 軸の表示方法は無し, 曲面スタイルは陰線, そしてプロット範囲を $-1 \leq s \leq 1$, $-3.14 \leq t \leq 3.14$ とします.

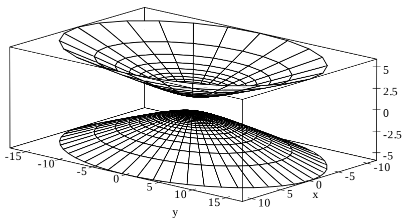
▶ **3D プロット ＋ 直交座標**

$[2\sec s\sin t, 3\sec s\cos t, \tan s]$



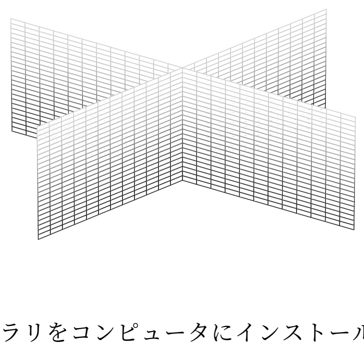
次に 2 曲面で構成される 3D ハイパボリック曲面の例を紹介します．曲面スタイルは陰線とし，プロット範囲は $0 \leq s \leq 1.4$ および $-3.1416 \leq t \leq 3.1416$ とします．

▶　**3D プロット ＋ 直交座標**
$[2\tan s \sin t, 3\tan s \cos t, \sec s]$



次に 2 平面で構成される 3D パラメトリック曲面の例を紹介します．曲面スタイルは陰線とし，プロット範囲は $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$ とします．

▶　**3D プロット ＋ 直交座標**
(x, x, z)
$(x, -x, z)$ をプロットにドラッグします．



Note　リファンレンレンスライブラリをコンピュータにインストールしていれば，より多くの曲線を作成する数式を見つけて，プロットすることができます．リファンレンレンスライブラリの

Tables, reference: Surfaces and Curves in Space をご覧下さい. (“標準” インストールでは, リファレンスライブラリはインストールされません. これらのファイルを CD-ROM からコピーするか, “カスタム” インストールして, ファイルを追加します.)

6.14.4 陰関数プロット

3 変数を持つ方程式を **3D プロット**+ **陰関数**でプロットすることができます. プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブのプロット範囲とアニメーションを選択すると表示される変数の変換ボタンは変数が意図したように設定されない場合に有効です.

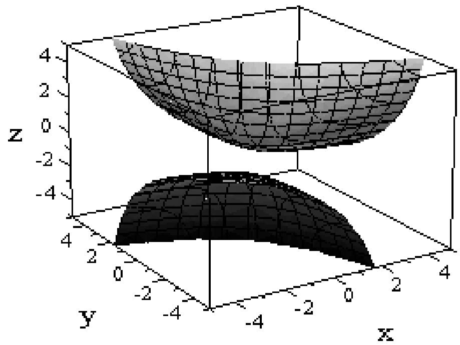
▶ **3 変数の数式を陰関数プロットする**

1. 文書内に数式を入力します.
2. **3D プロット**サブメニューから, **陰関数**を選択します.

次に示す例は, $x^2+y^2+z^2+1=(x+y+z+1)^2$ を 3D プロットした図です. 軸の表示方法はボックス, プロット範囲は $-5\le x\le 5$, $-5\le y\le 5$, $-5\le z\le 5$ で, 横回転 111, 縦回転 60 に設定しています.

▶ **3D プロット ＋ 陰関数**

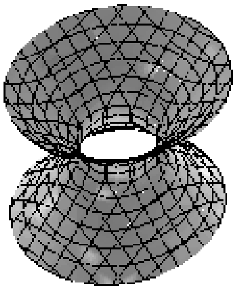
$x^2+y^2+z^2+1=(x+y+z+1)^2$



次に示す図は 1 面の双曲面の 3D 陰関数プロットです. 軸の表示方法はなし, プロット範囲は $-15\le x\le 15$, $-10\le y\le 10$, $-10\le z\le 10$ に設定しています.

▶ **3D プロット ＋ 陰関数**

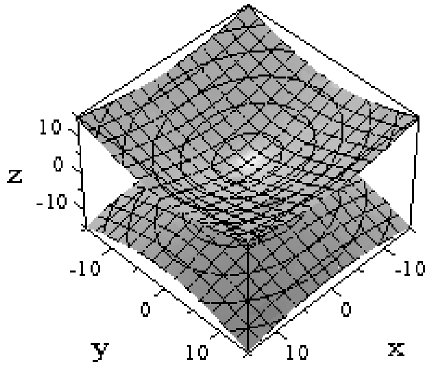
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$



次に示す図は, 2 面の双曲面の 3D 陰関数プロットです. 軸の表示方法はボックス, プロット範囲は $-15 \le x \le 15$, $-15 \le y \le 15$, $-15 \le z \le 15$ に設定しています.

► **3D プロット ＋ 陰関数**

$-\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$



6.14.5　3D 空間の曲線

3D 空間の曲線は 1 変数を使った 3 つの関数 $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ で表示することができます. これら 3 つの関数は, 行ベクトル $\begin{bmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \end{bmatrix}$ または $\begin{pmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \end{pmatrix}$, 列ベクトル $\begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$ または $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$, 分離リスト $(f(t), g(t), h(t))$ または $[f(t), g(t), h(t)]$ として表します.

► **直交座標で 3D 曲線をプロットする**

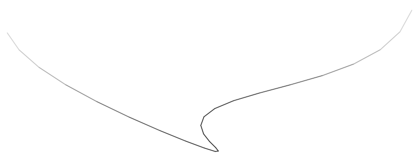
1. 3 要素を持つベクトルとして曲線の式を記述します.

2. ベクトルにカーソルを配置して **3D プロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

ビューを変更する場合は, プロットをダブルクリックして表示タブの設定を変更します.

▶ **3D プロット ＋ 直交座標**

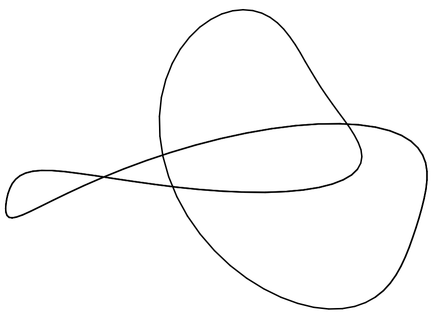
$$\begin{bmatrix} t & 2\sin t & t^2 \end{bmatrix}$$



滑らかな曲線を作成する時はプロットするポイント数を増やします. 次の例ではポイント数を 200 に設定しています.

▶ **3D プロット ＋ 直交座標**

$$\begin{bmatrix} -10\cos t - 2\cos(5t) + 15\sin(2t) \\ -15\cos(2t) + 10\sin t - 2\sin(5t) \\ 10\cos(3t) \end{bmatrix}$$



曲線に厚みを加える場合は, **3D プロット**メニューの**環**コマンドを利用します. そしてプロットのプロパティダイアログで環の半径を設定します. 半径には定数または, 変数 t の関数を入力します. ポイント数は環を構成する長さ方向のデータ点の数を示しています. プロット範囲にはパラメータ t の範囲を入力します. 表示タブの表示範囲は x, y, z ともに $x_0 \le x \le x_1$, $y_0 \le y \le y_1$,

$z_0 \le z \le z_1$ の条件を満たす値を入力します.

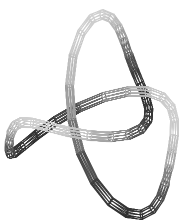
► **3D 曲線を環コマンドで作成する**

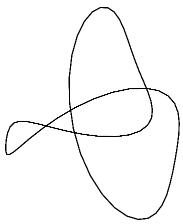
1. 3 要素を持つベクトルで曲線の式を定義します.
2. ベクトルにカーソルを配置して **3D プロット**サブメニューから**環**コマンドを選択します.
3. 半径やビューを変更する場合は, プロットのプロパティダイアログを開き, 設定を変更します.

太い環で曲線を表示することにより, 視点に近いカーブと離れた位置にあるカーブを正しく見分けることができます. 次の例では半径を 1, プロット範囲を $0 \le t \le 6.28$ ($\approx 2\pi$) にし, 曲面スタイルを陰線処理にしました. 環コマンドで "曲線状" の細いカーブを描画する場合は逆に半径を 0 にします.

► **3D プロット + 環**

$$\begin{bmatrix} -10\cos t - 2\cos(5t) + 15\sin(2t) \\ -15\cos(2t) + 10\sin t - 2\sin(5t) \\ 10\cos(3t) \end{bmatrix}$$

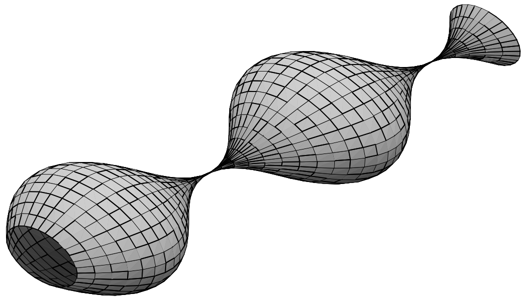




半径の入力ボックスに t の関数を入力すると, 全く違った 3D プロットを作成することができます. 次の例では半径を $1 - \sin t$ にし, 変数 t の範囲を $-2\pi \le t \le 2\pi$, サンプル数を 30 とします.

► **3D プロット + 環**

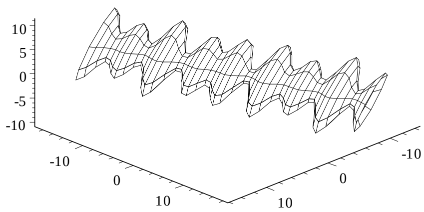
$[t, 0, 0]$



次に半径を $4 + \sin 3t + 2\cos 5t$, 枠:フレーム, 曲面スタイル: 陰線, プロット範囲: $-5 \le t \le 5$ の例を示します.

▶ **3D プロット ＋ 環**

$(2t, -3t, t)$



6.14.6 多角形

多角形を描画する場合はその頂点の座標を利用します.

$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), \ldots, (x_n, y_n, z_n)\}$$

の頂点を持つ多角形は次のように記述します.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \text{ または } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \vdots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \vdots & y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & \vdots & z_n \end{bmatrix}$$

次のリストを入力し,

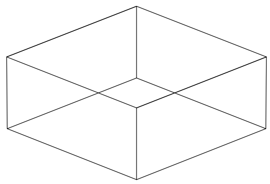
$$(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_1, x_3, y_3, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$$

そして **3D プロット ＋ 直交座標**とします．各頂点が直線で結ばれ，次のような図形が表示されます．

▶　**3D プロット ＋ 直交座標**

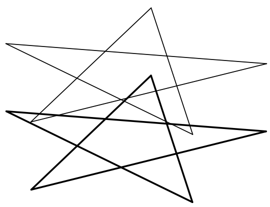
$(0,0,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,0,0)$

- 作成した図形に次のベクトル式をドラッグします $(0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,0,1,0,0,1)$, $(1,1,0,1,1,1,0,1,1,0,1,0)$, $(1,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0)$



▶　**2D プロット ＋ 直交座標**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\frac{4\pi}{5} & \sin\frac{4\pi}{5} & 0 \\ \cos\frac{8\pi}{5} & \sin\frac{8\pi}{5} & 0 \\ \cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5} & 0 \\ \cos\frac{6\pi}{5} & \sin\frac{6\pi}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{次のベクトルを図にドラッグします} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos\frac{4\pi}{5} & \sin\frac{4\pi}{5} & 1 \\ \cos\frac{8\pi}{5} & \sin\frac{8\pi}{5} & 1 \\ \cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5} & 1 \\ \cos\frac{6\pi}{5} & \sin\frac{6\pi}{5} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



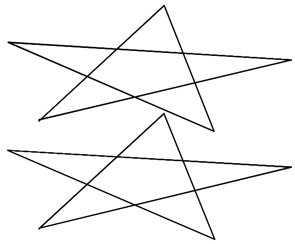
多角形を作図する場合はポイント数を調整する必要があります．

▶　**2D プロット ＋ 直交座標**

$(\cos t, \sin t, 0)$

次のベクトルを図にドラッグします $(\cos t, \sin t, 1)$

プロット項目 1 と 2 のプロット範囲: $0 \le t \le 12.566$, ポイント数: 6.



6.14.7 円柱座標

円柱座標系では, 点 P の位置座標を (r, θ, z) で表します. ここで (r, θ) は極座標の場合と同じ値を持ち, z は高さ方向の位置を示します. 円柱座標と直交座標の関係は次のように記述できます.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

直交座標系の座標値を円柱座標系の座標に変換する場合は次のように考えます.

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

基本的に r は θ と z の関数として表現できます. 複数の図形を一つの座標系に描画する場合は, その数式をドラッグします.

数式

► **数式を円柱座標にプロットする**

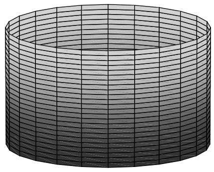
1. 文章に数式を記述します.
2. 数式にカーソルを配置して **3D プロット**サブメニューから, **円柱座標**を選択します.

円柱 $r = 1$ と円錐 $r = 1 - z$ を円柱座標でプロットした時の図形を次に示します. それぞれ式は 1 および $1 - z$ とし, プロット範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ および $0 \leq z \leq 1$ とします.

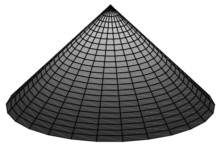
► **3D プロット ＋ 円柱座標**

$$\begin{bmatrix} 1 & \theta & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - z & \theta & z \end{bmatrix}$$



$(1, \theta, z)$



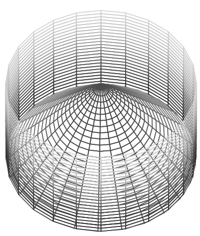
$(1-z, \theta, z)$

半径を $r=1$ および $r=1-z$ として式 1 と $1-z$ を 3D プロットした図形を次に示します. プロット範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ および $0 \leq z \leq 1$ とします. このようにプロットを同時に作成する方法とは別に, 従来のように一つの数式を既存のプロットにドラッグする方法をあります. 左図の曲面スタイルはワイヤフレームで, 右図は陰線処理したものです.

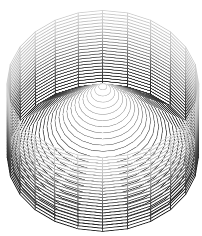
► **3D プロット + 円柱座標**

$\begin{bmatrix} 1 & \theta & z \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1-z & \theta & z \end{bmatrix}$ 式を選択し, プロットにドラッグします. $1-z$



曲面スタイル: ワイヤフレーム



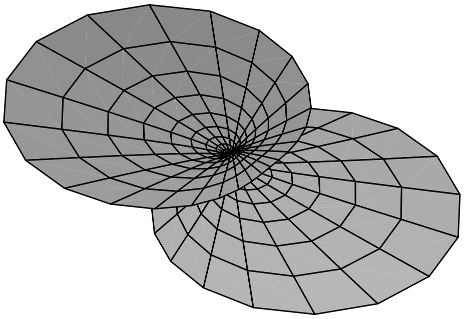
曲面スタイル: 陰線

定義した関数

次の円柱座標プロットは式 $r(\theta, z) = (z + \sin\theta)^2$ を**関数定義**サブメニューの**新しい定義**コマンドで定義した式を利用しました. プロット範囲は $-3.1416 \leq \theta \leq 3.1416$ および $-5 \leq z \leq 5$ です. 曲面スタイルが**カラーパッチ**, メッシュの設定は**メッシュ**を選択しています.

► **3D プロット + 円柱座標**

$\left((r(\theta, z))^2, \theta, z\right)$



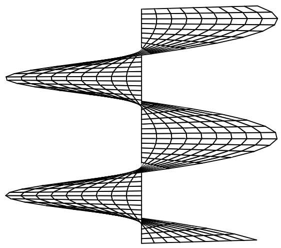
円柱座標系におけるパラメトリック曲面
パラメトリック曲面を示す関数 $z(r,\theta) = r + \cos\theta$ を円柱座標にプロットする方法について解説します．パラメトリック曲面 $r = f(s,t)$, $\theta = g(s,t)$, $z = h(s,t)$ を円柱座標にプロットします．そのために r, θ, z の数式をベクトル形式で $(f(s,t), g(s,t), h(s,t))$ のように記述し，**3D プロット**サブメニューから**円柱座標**を選択します．

► **パラメトリック曲面を円柱座標にプロットする**

1. 目的の r, θ, z の関数式をベクトルとして入力します．
2. ベクトルにカーソルを配置して **3D プロット**サブメニューから**円柱座標**を選択します．

“螺旋階段” $z = \theta$ が次のようにプロットされます．3D のベクトル式を $[r, \theta, \theta]$ とし，プロット範囲を $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$ とします．曲面スタイルは陰線にします．

► **3D プロット ＋ 円柱座標**
$[r, \theta, \theta]$



半径 1 の球，ベクトル $\left[\sqrt{1-z^2}, \theta, z\right]$ で表される 3D 円柱図形と球を組合せたものを次に示します．後者のプロット範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で曲面スタイルは陰線，および**両軸で同じスケーリングを**

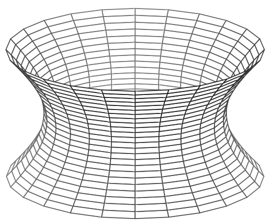
採用するオプションを選択します. 単独の球のプロット範囲は $-1 \le z \le 1$ で, 組合せたプロットの範囲は $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ とします.

► **3D プロット + 円柱座標**
$\left[\sqrt{1-z^2}, \theta, z\right]$
$[0.5, \theta, z]$ 式を選択し, 半径 0.5 のプロットへドラッグします.

$\left[\sqrt{1-z^2}, \theta, z\right]$ $\qquad$ $\left[\sqrt{1-z^2}, \theta, z\right]$ と $[0.5, \theta, z]$

1 平面で構成されるハイパボリック関数の曲面図をご紹介します. これはベクトル $\left[1+z^2, \theta, z\right]$ を円柱座標プロットしたもので, プロット範囲は $-1 \le z \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ です. 曲面スタイルは陰線で, **両軸で同じスケーリングを採用**しています.

► **3D プロット + 円柱座標**
$\left[\sqrt{1-z^2}, \theta, z\right]$



6.14.8 球面座標

球座標上の点 P は (ρ, θ, ϕ) で表すことができます. ここで, ρ は原点からの距離, 角度 θ は xy 平面上での角度 (極角) と z 軸との角度 ϕ (垂直角) を示します. 直交座標への変換は次のように行ないます.

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad z = \rho \cos\phi$$

原点からの距離は次のようになります.

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

原点からの距離 ρ は角度 ϕ と θ の関数となります．極角と垂直角の変数名に, ここに示したものとは異なる記号を利用することもできます．もちろん, ここに示した標準的な変数名をそのまま使っても問題はありません．もし, 何らかの原因で変数名が逆に割当てられた場合は, プロットのプロパティのダイアログで変数の変換機能を使います.
複数の球面プロットを作成する場合, 既存のプロットに新たな式をドラッグするか, またはプロットのプロパティのプロットした数式タブにプロットを示す式を追加します.

数式

▶ **球面プロットを作成する**

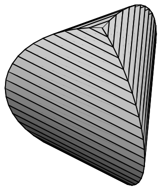
1. 角度 θ と ϕ からなる数式を入力します.
2. 数式にカーソルを配置します.
3. **3D プロット**サブメニューから**球面座標**を選択します.

球面プロットと円柱プロットはいずれも半径の関数です．次の図は半径 2 の球と, 半径 4 および半径 3 の円柱の組合せです．後者の軸範囲は $-2.65 \leq z \leq 2.65$ です．両者のプロット範囲はともに $0 \leq \theta \leq 2\pi$ および $0 \leq \phi \leq \pi$, **両軸に同じスケーリングを採用**し, 曲面スタイルには陰線処理を選択します.

▶ **3D プロット ＋ 球面座標**
2
4
S 次の式を選択し, 後者のプロットにドラッグします $3\csc\phi$

角度 θ のサンプル数を 4 に変更すると次の図のような三角形になります．次の例では $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-1 \leq z \leq 1$ および $0 \leq \phi \leq \pi$ としました.

▶ **3D プロット ＋ 球面座標**
$(2, \theta, \phi)$



定義した関数

定義した関数 $\rho = \rho(\theta, \phi)$ を球面座標でプロットする方法について解説します.

► **角度 θ および ϕ からなるユーザ定義の関数ρ を球面座標でプロットする**

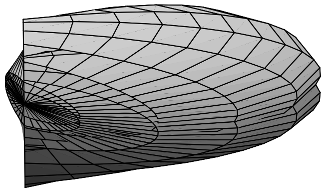
1. 角度 θ と ϕ を使って関数 ρ を定義します. **関数定義**サブメニューの**新しい定義**コマンドを利用します.
2. 関数名 ρ を選択するか, 式 $\rho(\theta, \phi)$ を選択します.
3. **3D プロット**サブメニューから**球面座標**を選択します.

Example 19 オウムガイの形を示す数式 $(1.2)^{\phi}\sin(\theta)$ をプロットします.

- 数式 $(1.2)^{\phi}\sin(\theta)$ を球面座標にプロットします. プロットのプロパティのダイアログのプロットした数式タブでプロット範囲ボタンから変数の変換を行ないます. そしてプロット範囲を $-1 \leq \phi \leq 2\pi$ および $0 \leq \theta \leq \pi$ とします.
- 数式 $\rho(\theta, \phi) = (1.2)^{\phi}\sin(\theta)$ を定義します. そして数式 $\rho(\theta, \phi)$ をプロットし, プロットのプロパティのダイアログのプロットした数式タブで**変数の変換**を行ないます. プロット範囲を $-1 \leq \phi \leq 2\pi$ および $0 \leq \theta \leq \pi$ とします. 次のプロットが得られます.
- 数式 $\rho(\phi, \theta) = (1.2)^{\phi}\sin(\theta)$ を定義し, 関数名 ρ をプロットします. この時, 変数は既に変換されています. プロット範囲を $-1 \leq \theta \leq 2\pi$ および $0 \leq \phi \leq \pi$ とします. 次のプロットが得られます.

► **3D プロット ＋ 球面座標**

ρ



Note　関数名を使ってプロットした場合, 変数の変更オプションは利用できません.

球面座標におけるパラメトリック曲面

球面座標におけるパラメトリック曲面は $\rho = f(s,t)$, $\theta = g(s,t)$, $\varphi = h(s,t)$ で与えられます. これらの式はごく一般的なものですが, 様々な形のプロットを作成することができます.

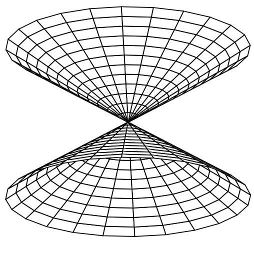
▶ **パラメトリック曲面をプロットする**

1. 3 要素のベクトル形式で数式を入力します.
2. 数式にカーソルを配置して **3D プロット**サブメニューから**球面座標**を選択します.

ベクトル $[\rho, \theta, 1]$ を 3D 球面座標プロットすると $\varphi = 1$ の円錐が作成されます. 次の図はプロット範囲を $-1 \le \rho \le 1$ および $0 \le \theta \le 2\pi$ とした時の例です.

▶ **3D プロット ＋ 球面座標**

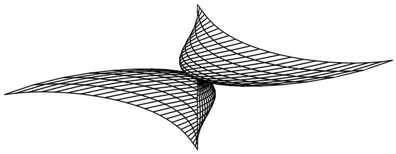
$[\rho, \theta, 1]$



式 $\rho = s$, $\theta = s^2 + t^2$, $\varphi = t$ で定義される曲面をプロットする場合は, これらの式をベクトル形式で記述します. プロット範囲は $0 \le s \le 1$ および $-1 \le t \le 1$ とします.

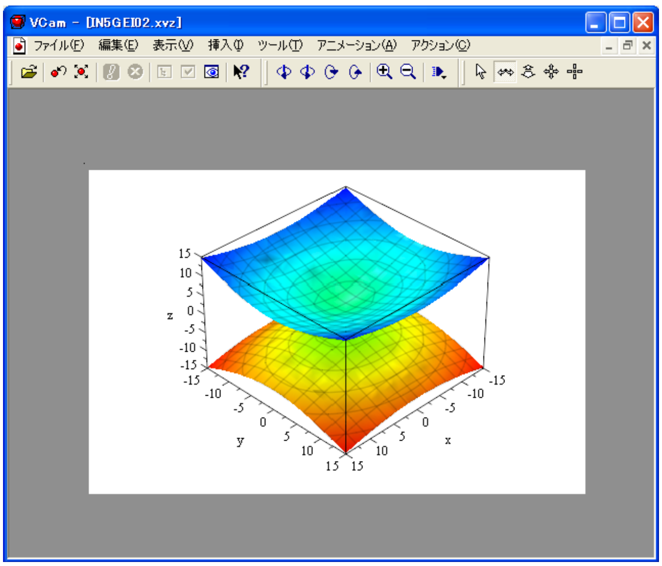
▶ **3D プロット ＋ 球面座標**

$$\begin{pmatrix} s \\ s^2 + t^2 \\ t \end{pmatrix}$$



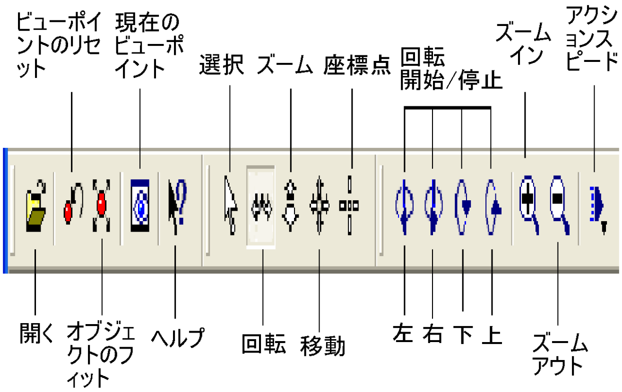
6.15　VCAM ウィンドウと 3D プロット

3D 曲面図は VCAM ウィンドウを使って, 回転させたり, 調べたりすることができます．読み込み専用文書の場合, VCAM ウィンドウを起動にするには, プロットフレームをクリックします．書き込み可能文書の場合, フレームをクリックすると表示される VCAM ツールボタン  をクリックして, VCAM ウィンドウを起動します．



VCAM ウィンドウの上部にある VCAM ツールバーを使って, プロットを制御することができます．回転, ズーム, 移動, 座標点ツールを使って, マウス操作でプロットを制御します．回転開始/停

止ツールとズームインズームアウトツールは回転や拡大/縮小をアニメーション表示します.



6.16　3D プロットのアニメーション表示

3D アニメーションをプロットするには, 3 つの変数を指定します.3 つの変数の内の 1 つをアニメーション変数として設定します. デフォルトのアニメーション変数は t. です.

6.16.1　直交座標のアニメーション表示

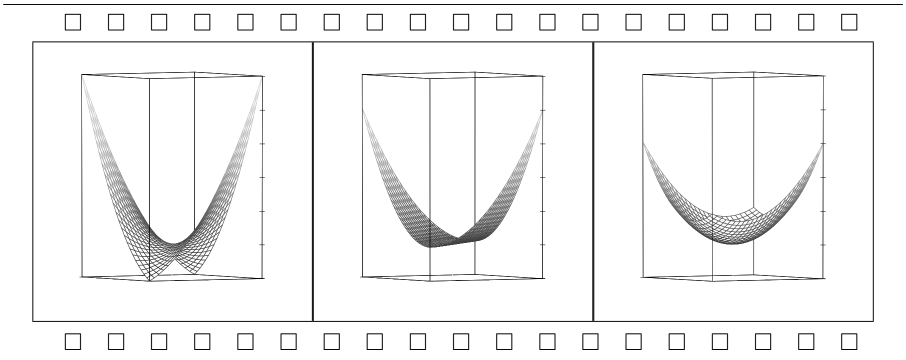
▶ **直交座標のアニメーションプロットを作成する.**

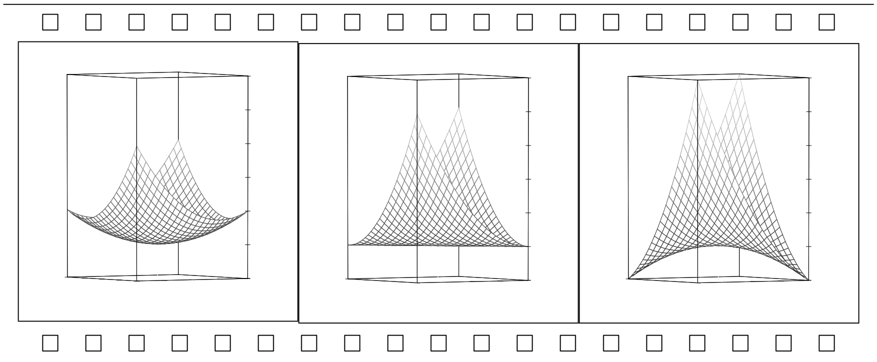
1. 3 変数の数式を入力します.
2. 数式にカーソルを配置し, **3D アニメーションのプロット**サブメニューから**直交座標**を選択します.

次に示す図は軸表示をボックスにし, 表示範囲を $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$, $-3 \leq t \leq 3$ とした 3D アニメーションのプロットです. ここでは, 変数 t がアニメーション変数に設定されています. 表示タブの角度では, 横方向を 40, 縦方向を 20 に設定しています.

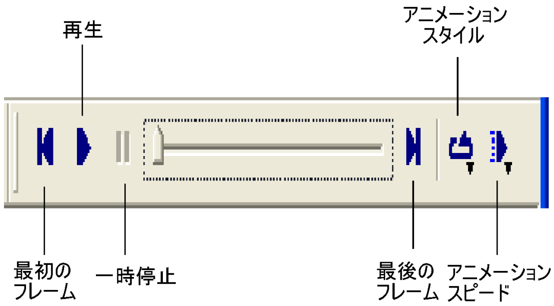
▶ **3D アニメーションのプロット ＋ 直交座標**

$x^2 + y^2 + txy$





3D プロットをアニメーション表示する場合, VCAM ウィンドウの上部にある VCAM ツールバーを使って, プロットを制御することができます. アニメーションスタイルドロップダウンメニューは, 一回だけ, ループ, 往復オプションが用意されています. アニメーションスピードドロップダウンメニューには, 1/8 **倍速** から 8 **倍速の幅のオプションが用意されています**.



► **直交座標のパラメトリックアニメーションを作成する**

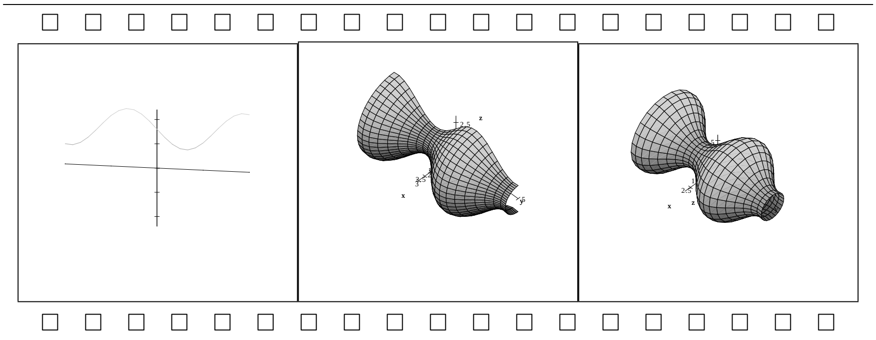
1. $(x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t))$ 形式の数式を入力します.

2. 数式にカーソルを配置し, **3D アニメーションのプロット**サブメニューの**直交座標**を選択します.

次に示す図は $z = 2 + \sin y$ のグラフを y 軸の周りを回転させることによって生成した回転曲面です. 軸の表示形式はボックスとし, 表示範囲は $-5 \le r \le 5$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ と設定しています. ここでは, 変数 t をアニメーション変数としています.

▶ **3D アニメーションのプロット ＋ 直交座標**

$((2 + \sin s) \sin(2\pi tr), s, (2 + \sin s) \cos(2\pi tr))$



6.16.2 円柱座標のアニメーションプロット

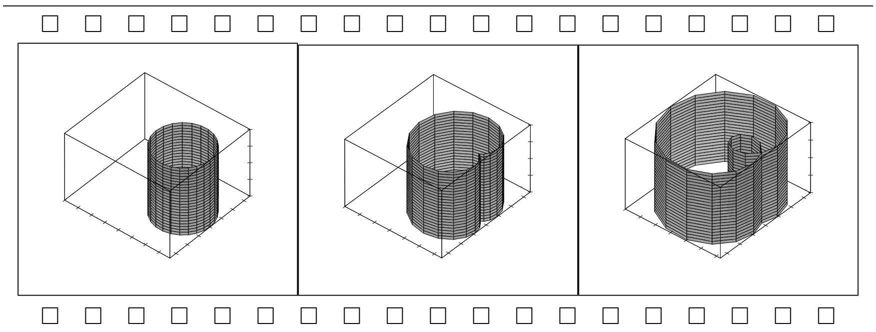
▶ **円柱座標のアニメーションプロットを作成する**

1. 3 変数の数式を入力します.
2. 数式にカーソルを配置し, **3D アニメーションのプロット**サブメニューから**円柱座標**を選択します.

次に示す図は $r = 1$ から $r = 1 - 2\sin\theta$ への変換を表した円柱です. 表示範囲は $0 \le z \le 1$, $-\pi \le \theta \le \pi$, $0 \le t \le 2$ に設定し, 表示角度は横回転を 20, 縦回転を 80 に設定しています.

▶ **3D アニメーションのプロット ＋ 円柱座標**

$1 - t\sin\theta$



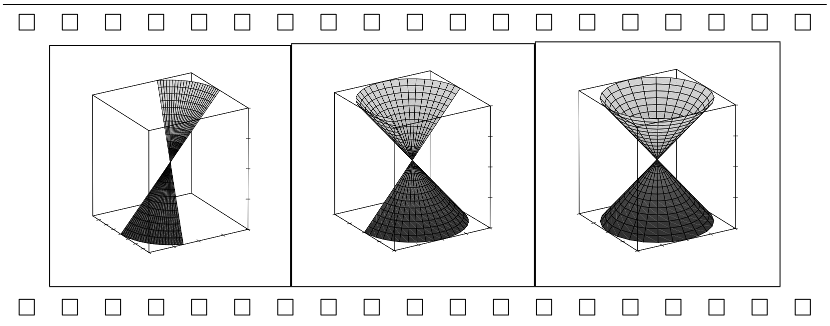
▶ **円柱座標のパラメトリックアニメーションの作成**

1. $(r(u,v,t), \theta(u,v,t), z(u,v,t))$ 形式の数式を入力します.
2. 数式にカーソルを配置します. **3D アニメーションのプロット**サブメニューから**円柱座標**を選択します.

次に示す図は直線 $z = r$ を z 軸の周りを回転させて生成した円錐です. 表示範囲は, $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ に設定されています. 表示角度は横回転 20, 縦回転 40 に設定されています.

▶　**3D アニメーションのプロット + 円柱座標**

$(-1+2r, 2\pi st, -1+2r)$



6.16.3　球面座標のアニメーションプロット

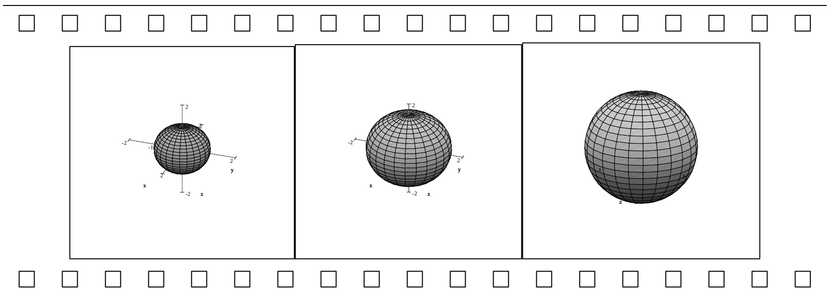
▶　**球面座標のアニメーションプロットを作成する**

- 3 変数の数式を入力し, **3D アニメーションのプロット**サブメニューから**球面座標**を選択します.

次に示す図は, 半径 1 から半径 2 へ膨張する球を表しています. 軸の表示形式はボックスとし, アニメーション変数の範囲は $0 \le t \le 1$ に設定しています.

▶　**3D アニメーションのプロット + 球面座標**

$1+t$



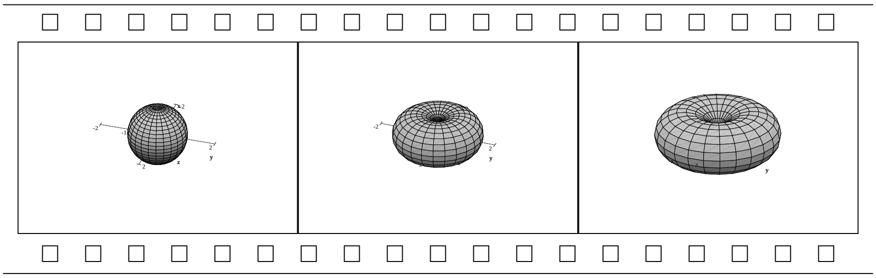
▶　**球面座標のパラメトリックアニメーションプロットの作成**

1. $(\rho(r,s,t), \theta(r,s,t), \phi(r,s,t))$ 形式の数式を入力します.
2. 数式にカーソルを配置します. **3D アニメーションのプロット**サブメニューから**球面座標**を

選択します.

次に示す図は球をドーナツ型に変形させた曲面図を表しています. 表示範囲は $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ に設定しています.

► **3D アニメーションのプロット ＋ 球面座標**
$(1 - t\cos 2\pi r, 2\pi s, \pi r)$



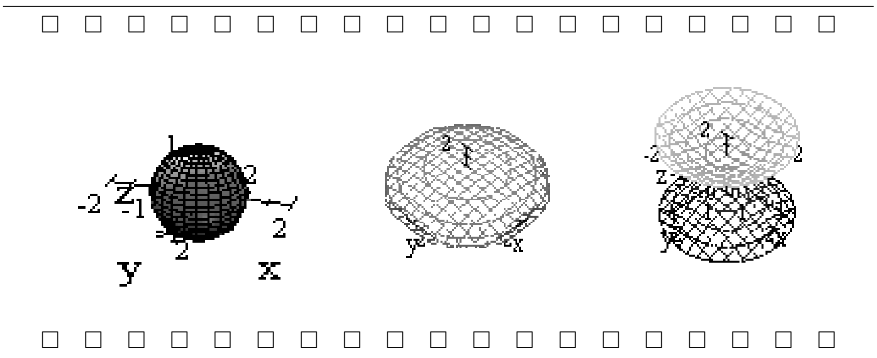
6.16.4 陰関数のアニメーション表示

► **陰関数のアニメーションプロットを作成する**

1. 4 変数の数式を入力します.
2. 数式にカーソルを配置します. **3D アニメーションのプロット**サブメニューから**陰関数**を選択します.

次に示す図は, 1 つの球を 2 面の双曲面に変形させた曲面図です. 表示範囲は $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$, $-2 \le z \le 2$, $-1 \le t \le 1$ に設定しています.

► **3D アニメーションのプロット ＋ 陰関数**
$z^2 = 1 + tx^2 + ty^2$



6.16.5 環のアニメーション表示

► **環のアニメーションプロットを作成する**

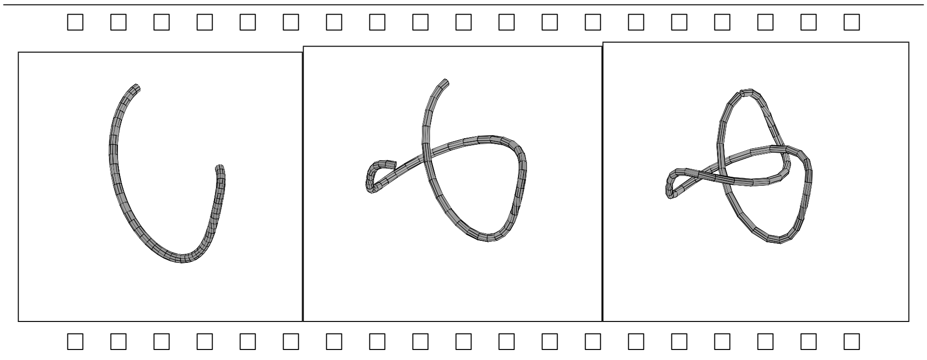
1. 1 または 2 変数の数式を入力します.

2. 数式内にカーソルを配置します．**3D アニメーションのプロット**サブメニューから**環**を作成します．
3. プロットのプロパティダイアログを開き，プロットした数式タブで，選択した数式に合わせ，同じ変数を使って半径を変更します．

次に示す図は，結び目を表しています．表示範囲は $0 \le x \le 2\pi$ $0 < t < 1$ に設定し，半径は 1 に設定しています．

▶　**3D アニメーションのプロット ＋ 環**

$$\begin{bmatrix} -10\cos tx - 2\cos(5tx) + 15\sin(2tx) \\ -15\cos(2tx) + 10\sin tx - 2\sin(5tx) \\ 10\cos(3tx) \end{bmatrix}$$



6.17　スナップショット

ファイルメニューから**プレビュー**や**印刷**を選択すると，画面上のプロットは画面イメージの通りに出力されます．しかし，*Scientific Word* や *Scientific WorkPlace* でタイプセット印刷やタイプセットプレビューを行なったり，一般的な LaTeX コンパイラでファイルをコンパイルし，dvi ファイルを作成する場合は独立した画像ファイルが必要になります．ここで言うスナップショットとは`*.wmf` 形式の画像ファイルのことです．プロットした画像にランダムなファイル名，例えば，`EWHCUS00.wmf` を付け，文書ファイルと同じディレクトリに保存します．プロットした画像のスナップショットは，スナップショットの自動作成機能か，または，プロットのプロパティダイアログのスナップショットの作成機能を利用して作成します．

画面上のイメージを直接印刷する普通の印刷の場合，スナップショットをわざわざ作成する必要はありません．しかし，もし該当するプロットのスナップショットがフォルダ中に存在する場合は，それを利用して効率的に画面表示する方法を採用しています．また，*Scientific Word* や *Scientific WorkPlace*，その他の一般的な LaTeX コンパイラでは単独の画像ファイルが必要ですが，スナップショットとして作成したファイルを画像ファイルとしてインポートして，割り付けることもできます．詳細は 208 ページを参照してください．

ここでスナップショットの自動作成に関するメリットとデメリットを紹介します．

6.17.1　スナップショットの作成と削除

スナップショットの自動生成を利用すると, 新しい図を作成すると常に対応するスナップショットを作成します. この機能には次のようなメリットとデメリットがあります

- **メリット**: タイプセッティングの際にそのまま利用できます. 作成したスナップショットをインポートすれば, 再描画の時間をかけずに画面表示を効率的に行なえます.
- **メリット**: スナップショットを図としてインポートできます.
- **メリット**: スナップショットを自動作成するので, 画面のスクロール, プレビュー, 印刷を高速に行なえます.
- **デメリット**: すべてのプロットに対してスナップショットの wmf ファイルが作成されていますので, ディスク容量を必要以上に使ってしまいます.

スナップショットの自動作成機能のデフォルト設定は次の手順で確認します.

► スナップショットの自動作成のデフォルト設定を変更する

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択します.
2. プロットの設定タブからプロット画像ファイルの自動作成の項目を, 目的の設定に変更します.
3. OK ボタンをクリックします.

個別のファイル毎にこの設定を行う場合は**数式処理**+ **設定**メニューのプロットの設定タブを利用します.

個々のプロットに関して, そのスナップショットの作成, または, 削除をコントロールする場合は, プロットのプロパティダイアログの表示タブで目的のボタンを利用します.

► スナップショットを作成する

1. プロットを選択します. **編集** + **プロパティ**を選択し, 表示タブを表示します.
2. スナップショットボタンをクリックします.
3. OK ボタンをクリックします.

► スナップショットを削除する

1. プロットを選択します. **編集** + **プロパティ**を選択し, 表示タブを表示します.
2. スナップショットの削除ボタンをクリックします.
3. OK ボタンをクリックします.

作成したスナップを改めて目的の箇所にインポートすると, 画面の表示をより高速に行えます.

6.17.2 画像としてのスナップショット

図は画像としてインポートして表示させた方が, その都度描画するよりも高速に生成することができます.

▶ スナップショットを画像ファイルとしてインポートする

1. 上述の方法でスナップショットを作成します. プロットのプロパティダイアログの表示タブでファイル名を確認します.
2. エクスプローラでファイル名を分かりやすい名前に変更します. 例えば, myplot.wmf.
3. 文書ファイルを画面表示し, インポートする位置にカーソルを移動し, **ファイル** + **画像のインポイート**を選択します. そして myplot.wmf を選択します.

インポートした画像は基本的に, その都度描画されるプロットと同じものです. この方法なら, 再描画による時間のロスを防ぐことができます. しかも, 数式処理エンジンを内蔵していない *Scientific Word* や *Scientific Viewer* でも, オリジナルと同じファイルを見ることができます.
学生にオンラインの問題を配布する場合はスナップショットを作成し, それをインポートしたものを利用するといいでしょう. プロット本体には, プロットのプロパティダイアログに, 数式に関する情報が含まれていますが, スナップショットならその情報は含まれません. プロットされた画像から, 式の内容や解を求める練習になります.

6.18 プロットのデフォルトオプションを設定する

プロットの作成と表示に関するデフォルト設定に関して説明します. デフォルト設定には, すべての文書に対するグローバル設定と, 個々の文書に対するローカル設定があります.

6.18.1 プロットのグローバル設定

デフォルトのグローバル設定は**ツール**メニューを利用します.

▶ プロットレイアウトのグローバル設定

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択します.
2. プロットレイアウトタブを選択します.
3. サイズ, 画面表示方法, 単位, 印刷方法, 位置などに関する設定を行います.

▶ プロットのグローバル設定

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択します.
2. プロットの設定タブを選択します.
3. 各項目を必要に応じてチェックします. そして OK ボタンをクリックします.

プロットの設定に関する詳細は以下の通りです.

- プロット画像ファイルの自動作成
  スナップショットの自動作成機能に関する詳細は 207 ページを参照してください.
- 定義の更新時にプロットを自動更新
  プロットを作成した関数や, そのパラメータが変更された場合, 描画したプロットを更新します. インタラクティブなオンライン学習に利用する場合はこのオプションをチェックしましょう.
- プロットのプロパティダイアログを最初に表示
  プロット範囲を調整したり, その他の設定をその都度チェックする場合に便利です.

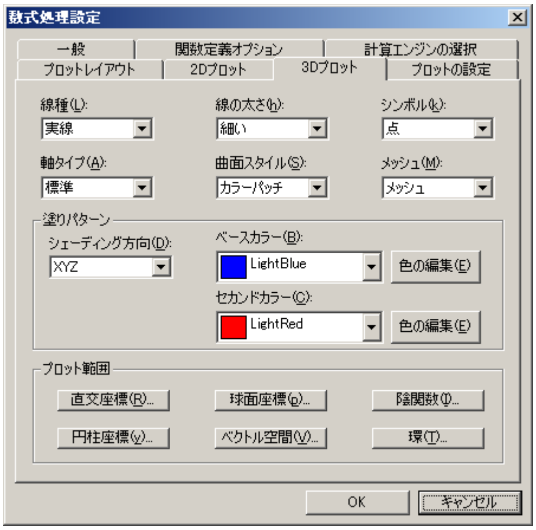
Remark　プロットのプロパティのダイアログを描画の前に表示する場合は, CTRL キーを押しながらプロットを作成します. この方法を使えば最初に表示するためのオプションを選択していなくても, ダイアログを表示できます.

▶ 2D プロットのデフォルトをグローバル設定する

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択します.
2. 2D プロットタブを表示します.
3. デフォルトのプロットスタイル, 線種, 線の太さ, シンボル, 軸タイプ, プロット色, プロット範囲などの設定を行います.
4. 不連続点の処理のオプションを目的に応じて設定します. プロット範囲とサンプルサイズのデフォルト設定を選びます.
5. OK ボタンをクリックします.

▶ 3D プロットのデフォルトをグローバル設定する

1. **ツール**メニューから**数式処理設定**を選択します.
2. 3D プロットタブを表示します.
3. デフォルトの線種, 線の太さ, シンボル, 軸タイプ, 曲面スタイル, メッシュ, プロット色, プロット範囲などの設定を行います.
4. 不連続点の処理のオプションを目的に応じて設定します. プロット範囲とサンプルサイズのデフォルト設定を選びます.
5. OK ボタンをクリックします.



6.18.2　プロットのローカル設定

数式からプロットを作成する場合, 数式処理設定ダイアログにあるプロットレイアウト, プロット設定, 2D プロット, 3D プロットなどのタブの情報を利用します. 個々の文書へのローカル設定を変更する場合は**数式処理**+ **設定**を選択します.

▶　プロットレイアウトのローカル設定

1. **数式処理**メニューから**設定**を選択します.
2. プロットレイアウトタブを表示します. ローカル設定のオプションをチェックします.
3. サイズ, 表示方法, 単位, 印刷方法, 位置などに関するオプションを選択します.
4. OK ボタンをクリックします.

▶　プロットの設定のローカル設定

1. **数式処理**メニューから**設定**を選択します.
2. プロットの設定タブを表示します. ローカル設定のオプションをチェックします.
3. 各項目のチェックボックスにチェックを付けるか, 外すかして, OK ボタンをクリックします.

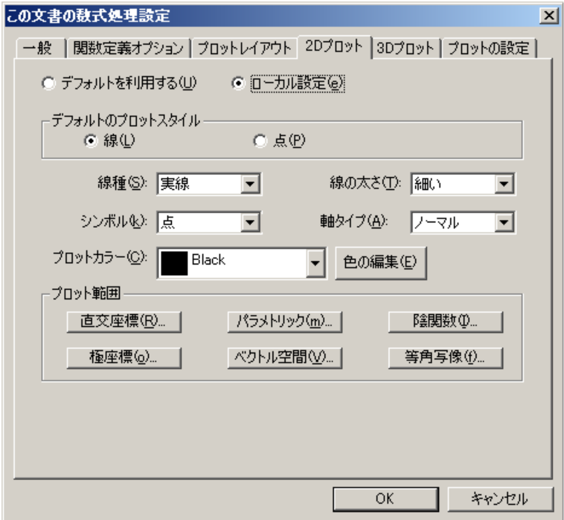
▶　2D プロットのローカル設定

1. **数式処理**メニューから**設定**を選択します.
2. 2D プロットタブを表示します. ローカル設定オプションをチェックします.

3. デフォルトのプロットスタイル, 線種, 線の太さ, シンボル, 軸タイプ, プロット色, プロット範囲などの設定を行います.
4. 不連続点の処理のオプションを目的に応じて設定します. プロット範囲とポイント数のデフォルト設定を選びます.
5. OK ボタンをクリックします.

▶ 3D プロットのローカル設定

1. **数式処理**メニューから**設定**を選択します.
2. 3D プロットタブを表示します. ローカル設定オプションをチェックします.
3. デフォルトの線種, 線の太さ, シンボル, 軸タイプ, 曲面スタイル, メッシュ, プロット色, プロット範囲などの設定を行います.
4. 不連続点の処理のオプションを目的に応じて設定します. プロット範囲とポイント数のデフォルト設定を選びます.
5. OK ボタンをクリックします.



▶ プロット設定のローカル設定

1. **数式処理**メニューから**設定**を選択します.
2. プロット設定を表示します. ローカル設定オプションをチェックします.
   - プロット画像ファイルの自動作成機能を目的に応じて設定します.
   - 定義の更新時にプロットを自動更新する機能を目的に応じて設定します.
   - プロットのプロパティダイアログを最初に表示するオプションを目的に応じて設定します.
3. OK ボタンをクリックします.

Remark　プロットのプロパティのダイアログを描画の前に画面表示する場合は, CTRL キーを押

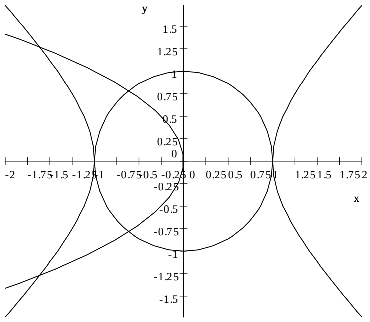
しながらプロットを作成します．この方法を使えば, **最初に表示する**オプションを選択していなくてもダイアログを表示できます.

6.19　練習問題

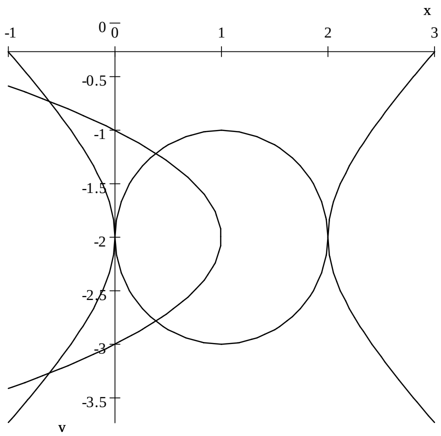
1. **2D プロット**サブメニューの**陰関数**コマンドを使って関数 $x^2+y^2=1$, $x^2-y^2=1$, $x+y^2=0$ を同一グラフ上にプロットしてください.
2. **2D プロット**サブメニューの**陰関数**コマンドを使って関数 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$, $(x-1)^2-(y+2)^2=1$, $(x-1)+(y+2)^2=0$ を同一グラフ上にプロットしてください. また, ビューを変更して練習問題 1 の曲線と同じ様に表示させてください.
3. 式 $x^2+y^2=4$ と $x^2-y^2=1$ を同一グラフ上にプロットしてください．交点はいくつありますか? 第一象限での交点をグラフ上で確認してください．行列に 2 つの式を記述し, **求解**メニューから**数値解**コマンドを選択して値を求め, 交点の座標と同じことを確認しましょう.
4. 次のアステロイド曲線 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ をプロットしてください.
5. デカルトの葉線 $x^3+y^3=6xy$ をプロットしてください.
6. 曲面 $z=\sin xy$ を $-4\le x\le 4$ および $-4\le y\le 4$ でプロットしてください．これの突部を次の 3 つの陰関数プロット $xy=\frac{\pi}{2}$, $xy=\frac{3\pi}{2}$, $xy=\frac{5\pi}{2}$ と比べてください.
7. 半径 1 の 2 つの円柱が直角に交わっているものとします．次の 2 つのパラメトリック曲面 $[s,\cos t,\sin t]$ と $[\cos t,s,\sin t]$ を **3D プロット**サブメニューの**直交座標**コマンドでプロットすれば, これを描画することができます．さらに, 交差する部分だけをプロットしてください．**3D プロット** + **環**コマンドを使い $[0,0,t]$ を範囲 $-1\le t\le 1$, 半径を $\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}$, サンプル数を 5 にしてプロットしてください.
8. 2 つの曲線
$$[(2+\sin t)10\cos t,\ (2+\cos t)10\sin t, 3\sin 3t]$$
と
$$[20\cos t, 20\sin t, -3\sin 3t]$$
は交差しますか? **3D プロット**サブメニューの**環**コマンドで描画し, ビューを回転させて確認しましょう.
9. 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と平面 $x+y+z=\frac{1}{2}$ を z について解き, **3D プロット**サブメニューの**直交座標**コマンドでプロットしてください．両者は交わりますか? 次に, 式 $x+y+z=\frac{1}{2}$ を z について解き, それを $x^2+y^2+z^2=1$ に代入して交点が楕円 (実際には円) となることを計算によって確認してください.
10. 曲面 $z=xy$ をプロットして等高線の様子を観察してください．プロットのプロパティのプロットした数式タブでカラーパッチ + 等高線のオプションを選択してください．真上から見た状態と, 真横から見た状態をそれぞれ表示し, 等高線の意味を考えてみましょう.

6.20 練習問題の答え

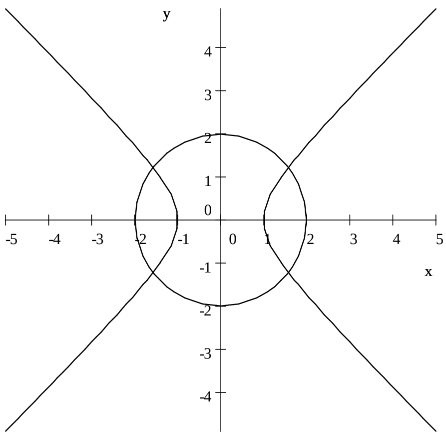
1. **2D プロット + 陰関数**: $x^2 + y^2 = 1, x^2 - y^2 = 1, x + y^2 = 0$
プロット範囲は $-2 \le x \le 2$ および $-2 \le y \le 2$. 両軸で同じスケーリングを採用するにチェックします.



2. **2D プロット + 陰関数**: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1, (x-1)^2 - (y+2)^2 = 1, (x-1) + (y+2)^2 = 0$
プロット範囲は $-1 \le x \le 3$ および $-4 \le y \le 0$. 両軸で同じスケーリングを採用するにチェックします.

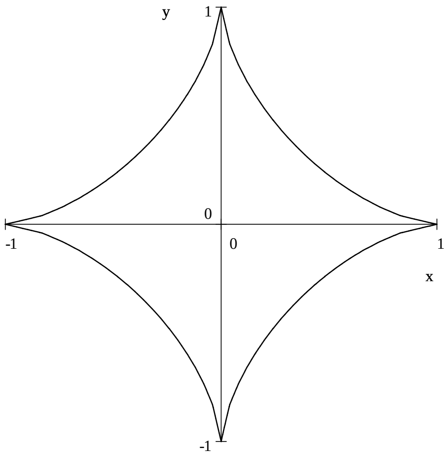


3. **2D プロット + 陰関数**: $x^2 + y^2 = 4, x^2 - y^2 = 1$
プロット範囲は $-5 \le x \le 5$ および $-5 \le y \le 5$. 両軸で同じスケーリングを採用するにチェックします.



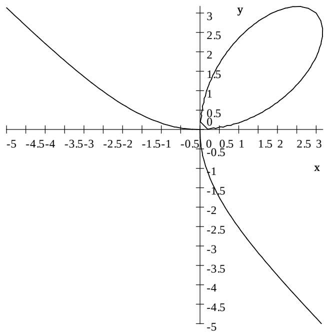
求解 + 数値解: $\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ x^2-y^2=1 \\ x \in (1,2) \\ y \in (1,2) \end{array}$, 解： $\{x = 1.58113883, y = 1.224744871\}$

4. **2D プロット + 陰関数**: $|x|^{2/3}+|y|^{2/3}=1$
   (プロット範囲は $-1 \le x \le 1$ および $-1 \le y \le 1$.)



   絶対値を外すと第一象限だけのグラフが得られます.

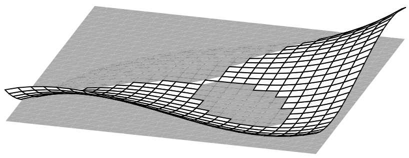
5. **2D プロット + 陰関数**: $x^3+y^3=6xy$
   (プロット範囲は $-5 \le x \le 5$ および $-5 \le y \le 5$, グリッドを 50 x 50 に設定.)



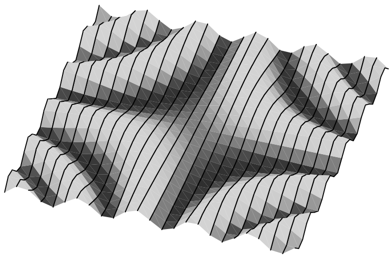
デカルトの葉線は曲面 $z = x^3 + y^3 - 6xy$ をプロットする, その表面の様子が良く分かります.

3D プロット + **直交座標**: $x^3 + y^3 - 6xy$
3D プロット + **直交座標**: 0
プロット範囲 $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$. 横回転 16, 縦回転 1. プロット面に対しては, 曲面

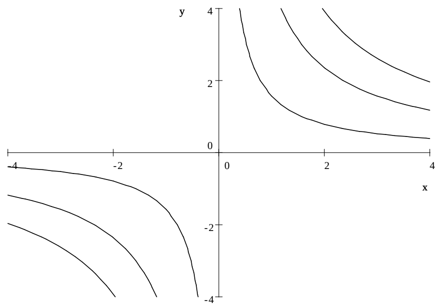
スタイル:陰線, メッシュ:メッシュとし, 平面に対しては, 曲面スタイル:カラーパッチ, メッシュ:無しに設定します.



6. **3D プロット** + **直交座標**: $\sin xy$
曲線スタイルはカラーパッチ, メッシュは等高線を選択. プロット範囲 $-4 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$, 横回転 108, 縦回転 17.

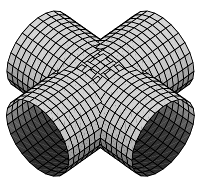


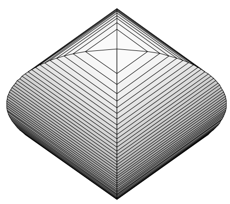
2D プロット+ **陰関数**: $xy = \pi/2, xy = 5\pi/2, xy = 3\pi/2$
(プロット範囲 $-4 \le x \le 4$ および $-4 \le y \le 4$.)



7. **3D プロット** + **陰関数**: $[s, \cos t, \sin t]$
最初のプロットに式 $[\cos t, s, \sin t]$ をプロットにドラッグ. プロット範囲は $-2 \le s \le 2$ および $0 \le t \le 2\pi$.

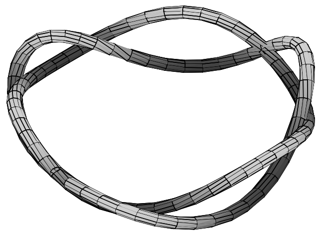
2 番目のプロッドは, 3D プロット + 環: $[0, 0, t]$
プロット範囲は $-1 \le t \le 1$, 半径 $\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}$, ポイント数 4.





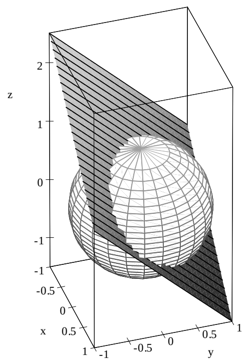
8. **3D プロット+ 環**: $\begin{bmatrix} (2+\sin t)10\cos t \\ (2+\cos t)10\sin t \\ 3\sin 3t \end{bmatrix}$

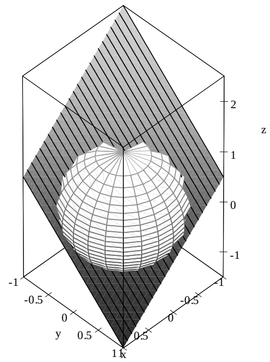
この式 $\begin{bmatrix} 20\cos t \\ 20\sin t \\ -3\sin 3t \end{bmatrix}$ をプロッドにドラッグ, プロット範囲 $0 \leq t \leq 2\pi$, そして半径を両方とも 1 に設定.



求解 + 解:
$\begin{bmatrix} (2+\sin t)10\cos t = 20\cos s \\ (2+\cos t)10\sin t = 20\sin s \\ 3\sin 3t = -3\sin 3s \end{bmatrix}$, 解：$\{t=0, s=0\}, \{t=\pi, s=\pi\}$

9. **3D プロット + 直交座標**: $\left(\sqrt{1-s^2}\cos t, \sqrt{1-s^2}\sin t, s\right)$
プロット範囲 $-1 \leq s \leq 1$ および $0 \leq t \leq 6.283$ (2π). 曲面スタイルは陰線を選択, 両軸で同じスケーリングを採用するオプションをチェック.
次のプロットをドラッグ: $\left(s, t, \frac{1}{2} - s - t\right)$
プロット範囲 $-1 \leq s \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$, 曲面スタイルはカラーパッチ, メッシュは等高線.





平面上の z は, $z = \frac{1}{2} - x - y$ で計算でき, 球と平面の交点の式は次のようになる.

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{2} - x - y\right)^2 = 1$$

この式を展開して, 交点の曲線式は

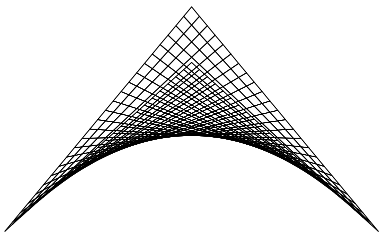
$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - x - y - \frac{3}{4} = 0$$

判別式 $B^2 - 4AC$ を計算すると

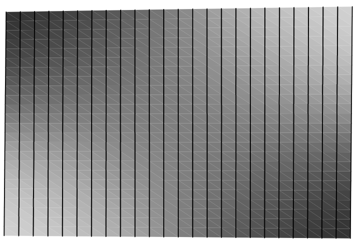
$$2^2 - 4\,(2)\,(2) = -12 < 0$$

なので, 交点は楕円となる.

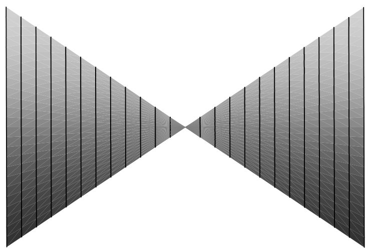
10. **3D プロット + 直交座標**: xy
(これはデフォルト設定通りのプロット $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$, 曲面スタイルはワイヤフレーム.)



(次のプロットでは範囲を $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, 曲線スタイルはカラーパッチ, メッシュは等高線)



横回転 90, 縦回転 0



横回転 90, 縦回転 90

第 7 章

微積分

この章では微積分計算の実行方法, 極限, 数列, 級数などの基本的な事柄について解説します. 微積分においては関数の意味を考えることが大切です. ここでは, ユーザが既に関数の定義方法や演算の実行方法を理解しているものとして解説を行います. 数式や関数の命名方法について分からないことがある場合は, 代数による関数について解説した第 3 章, および関数の定義, 定義情報の保存や読込みなど, 関数と数式に関する基本的な操作方法は第 5 章を参照してください. 本章では, 第 6 章の曲線と曲面で利用した関数のプロットと微積分機能の関係を図を用いて分かりやすく解説します.

7.1 微積分の計算

微積分の計算は代数式や三角式の計算と同じ要領で行います.

► **微分計算や積分計算を実行する**

1. 通常の記述法通りに, 微分式や積分式を入力します.
2. 数式にカーソルを移動します.
3. **数式処理**メニューから**計算**コマンドを選択するか をクリック, または CTRL + E とします.

► **微分式 $\frac{d}{dx}x\sin x$ を計算する**

1. アイコン をクリックし d を入力して, TAB キーを押して分母に移動します.
2. dx と入力してスペースバーを押し, インラインに戻って式 $x\sin x$ を入力します.
3. 式 $\frac{d}{dx}x\sin x$ にカーソルを置き, **数式処理**メニューから**計算**コマンドを選択するか をクリックします. または CTRL + E とします.

► **計算**

$\frac{d}{dx}x\sin x = \sin x + x\cos x$

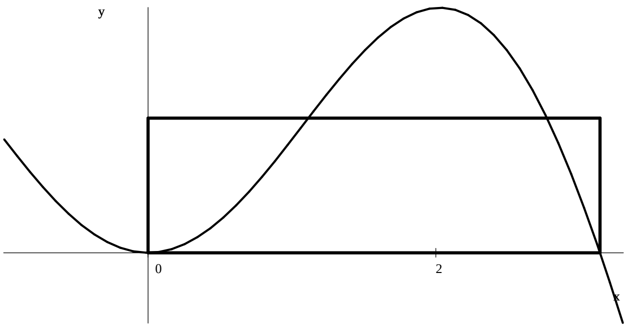
► **積分式 $\int_0^\pi x\sin x\,dx$ を計算する**

1. 数式テンプレートツールバーの積分記号  をクリックするか, CTRL + I を押します.
2. 下限を入力するために数式テンプレートツールバーの  をクリックするか, CTRL + 下向き矢印 を押します. そして, 入力ボックスに下限 0 を入力します.
3. TAB キーを押すと上限の位置にカーソルが移動します. 入力ボックスに上限 π を入力します.
4. スペースバーを押し, インラインに戻ります. そして式 $x \sin x\, dx$ を入力します.
5. 式 $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$ にカーソルを置き, **数式処理**メニューから**計算**コマンドを選択するか,  をクリックします. または CTRL + E とします.

▶ **計算**

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = \pi$$

曲線 $y = x \sin x$ の 0 から π までの面積と, 高さ 1, 横 π の長方形の面積を比較してください.



7.2　極限

Scientific WorkPlace や *Scientific Notebook* には, 極限に関して色々な計算を行う機能が用意されています. 極限の考え方そのものが微積分の中心です. この考え方を用いることによって, 数学は新たな時代入ったと考えられています. 例えば, 物体の速度も以前ならば, 経験と実験に頼らなければなりませんでしたが, 微積分の考えを導入することにより, 容易に求めることができるようになりました.

7.2.1　極限の表記方法

任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta$ ならば, $|f(x) - L| < \epsilon$ が成り立ち, x が a に近づく時の f の極限は L であるといい, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ と書きます.

▶ **式** $\lim_{x \to a} f(x)$ **の極限値を求める**

1. 数式モードで lim と入力するか, または数式名ボタン  をクリックして lim を選択します.

2. アイコン  をクリックし, $x \to a$ を入力します.
3. スペースバーを押してカーソルをインラインに戻し, 関数 $f(x)$ を入力します.
4. **計算**コマンドを選択するか, CTRL ＋ E, または  をクリックします.

▶ **計算**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$x \neq 1$ であれば $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ となります. これは x が 1 に近づけば, 当然, 2 に近づきます.
有理関数の極限値がいつも求められる訳ではありません. 例えば, 次の式を $x=-3/2$ で計算することはできません. なぜなら, この値のとき分母が 0 になってしまうからです. しかし, この時, 極限値は $-3/2$ と求められます.

▶ **計算**

$$\lim_{x\to -3/2}\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}=-\frac{25}{7}$$

因数分解と簡単化の部分計算を行うと代入法により極限値を求めることができます.

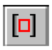
▶ **因数分解**

$4x^4+6x^2+19x+6x^3+15=(2x+3)(x+1)\left(2x^2-2x+5\right)$
$2x^3+5x^2+5x+3=(2x+3)\left(x+x^2+1\right)$
次の式で明らかなように, 2 行目の約分により, 特異点が除かれます. 最初の 2 行の計算では数式全体をコピーし, 目的の部分で部分計算を行います. そして 3 行目に $x=-3/2$ の代入式を記述します.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3/2}\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} &= \lim_{x\to -3/2}\frac{(2x+3)(x+1)\left(2x^2-2x+5\right)}{(2x+3)\left(x+x^2+1\right)}\\ &= \lim_{x\to -3/2}\frac{(x+1)\left(2x^2-2x+5\right)}{\left(x+x^2+1\right)}\\ &= \left[\frac{(x+1)\left(2x^2-2x+5\right)}{\left(x+x^2+1\right)}\right]_{x=-3/2}\\ &= -\frac{25}{7}\end{aligned}$$

3 行目の代入計算は次の手順で行います. 代入計算の詳細は 69 ページを参照してください.

▶ **変数に値を代入する**

1. 式 $(x+1)\,\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1}$ を選択します. または, SHIFT キーを押しながら右矢印を利用して選択します. アイコン  をクリックします.
3. アイコン  をクリックし, $x=-3/2$ を入力します.
4. **計算**コマンドを選択します.

▶ **計算**

$$\left[\frac{(x+1)\left(2x^2-2x+5\right)}{x^2+x+1}\right]_{x=-3/2} = -\frac{25}{7}$$

3 行目の代入計算は編集機能を使って行なうこともできます.

▶ **数式モードで置換機能を利用する**

1. 式 $(x+1)\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1}$ を選択するか, SHIFT キーを押しながら右矢印で選択します.
2. **編集**メニューから**置換**を選択します.
3. 数式モードでダイアログボックスに次のように入力します.
   - 検索する語: x
   - 次の語で置換: $(-3/2)$

結果を次に示します.

$$\frac{((-3/2)+1)\left(2\,(-3/2)^2-2\,(-3/2)+5\right)}{(-3/2)^2+(-3/2)+1}$$

7.2.2 特別な極限

片側の極限, 無限遠点での極限, 無限大の極限を計算することができます. 次の例を計算する際は $a=0$ を関数として定義します.

▶ **計算**

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=1$　　$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=-1$

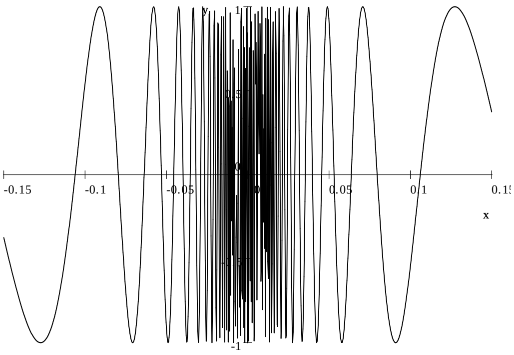
$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x-2}=\infty$　　$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\text{undefined}$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=[-1,1]$　　$\lim_{x\to a^+}\frac{\sin x}{x}=1$

最後の例題の $-1..1$ と $[-1,1]$ は区間 $-1\le x\le 1$ を示すものです. 関数 $y=\sin\frac{1}{x}$ をプロットすると, この計算結果をより簡単に理解できます. x が 0 に近づくと関数 $\sin\frac{1}{x}$ は区間 $-1\le x\le 1$ の中の点を無限に含むことになります. 次のようなプロットを作成するには, プロットをクリックし, **編集** + **プロパティ**を選び, プロットした数式タブをクリックします. プロット範囲ボタンをクリックして, ポイント数を 500 にします.

▶ **2D プロット + 直交座標**

$\sin\frac{1}{x}$



$y = \sin\frac{1}{x}$

7.2.3　極限近傍の値とプロット

関数を定義して，それに複数の値を代入することにより極限に近い値を計算することができます．ここでは $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を例に，その方法を紹介します．始めに，この極限を**計算**コマンドによって求めます．次に，原点の近傍での関数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ のふるまいを調べてみることにします．2 通りの方法がありますので順番に解説します．

► **計算**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

計算コマンドの結果からも分かるように $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ です．この式 $\frac{\sin x}{x}$ について，次に 0 の近傍に存在する複数の x を使って計算します．最初に関数 f を定義します．これを使って原点に近い値に**数値計算**コマンドを実行します．

► **関数定義 ＋ 新しい定義**

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

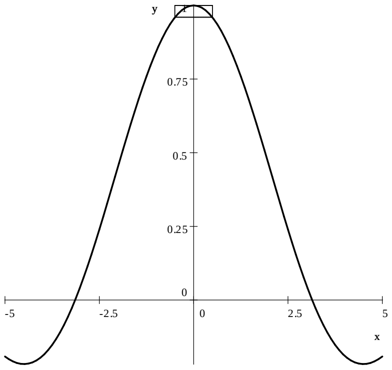
► **数値計算**

$$\begin{aligned} f(0.1) &= 0.9983341665 \\ f(0.01) &= 0.9999833334 \\ f(-0.001) &= 0.9999998333 \end{aligned}$$

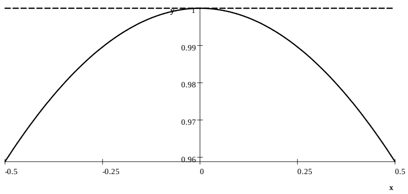
明かに関数の計算結果が 1 に近づいています．また，式 $y = \frac{\sin x}{x}$ をプロットすると，これは明らかに 0 で，1 に近い値を持っていることがわかります．これは $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ の強力な証明材料となります．

► **2D プロット ＋ 直交座標**$(0.5, 0.96, 0.5, 1)$

$$\frac{\sin x}{x}$$



$y = \frac{\sin x}{x}$



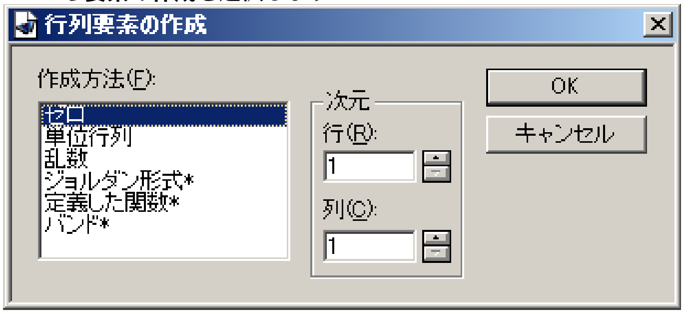
$y = \frac{\sin x}{x}$

補助関数を使って極限近くの値を求める

要素の作成という行列の機能を使うと, 行列に値を入力するのに便利です.

► **補助関数 $y = f(x)$ を定義して値を計算する**

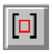
1. 関数 $f(x)$ を定義します.
2. 独立変数のサンプル値を作成する関数 $g(n)$ を定義します.
3. 関数 $h(i, j) = (2 - j)g(i) + (j - 1)f(g(i))$ を定義します.
4. **行列**サブメニューから**要素の作成**を選択します.



5. 列を 2, 行数を目的の数に合わせます.
6. 作成方法は**定義した関数**を選択します.
7. 関数名の入力ボックスに h と入力します.
8. OK ボタンをクリックします.

関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とし, 独立変数のサンプル数を 10 とした時の例を次に示します.

► **関数 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ を使って極限近くの値を計算し, 行列形式で表示する**

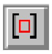
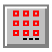
1. 式 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ にカーソルを移動して, **関数定義** + **新しい定義**とします.
2. 式 $g\,(i) = i * 10^{-2}$ にカーソルを移動して, **関数定義** + **新しい定義**とします.
3. 式 $h(i,j) = (2-j)g(i) + (j-1)f(g(i))$ にカーソルを移動して, **関数定義** + **新しい定義**とします.
4. 数式テンプレートツールバーのカギカッコボタン  を選択し, 入力ボックスにカーソルを移動します.
5. **行列**サブメニューから**要素の作成**を選択します.
6. 行を 10, 列を 2 にします.
7. リストから, **定義済みの関数を**選択します.
8. 関数名の入力ボックスに h を入力します.
9. OK ボタンをクリックします.

この計算結果は次の左辺となります. 行列の左側は独立変数で, 右側が関数の計算結果となります. 左辺から右辺を計算する時は**数値計算**コマンドを使います.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 100\sin\frac{1}{100} \\ \frac{1}{50} & 50\sin\frac{1}{50} \\ \frac{3}{100} & \frac{100}{3}\sin\frac{3}{100} \\ \frac{1}{25} & 25\sin\frac{1}{25} \\ \frac{1}{20} & 20\sin\frac{1}{20} \\ \frac{3}{50} & \frac{50}{3}\sin\frac{3}{50} \\ \frac{7}{100} & \frac{100}{7}\sin\frac{7}{100} \\ \frac{2}{25} & \frac{25}{2}\sin\frac{2}{25} \\ \frac{9}{100} & \frac{100}{9}\sin\frac{9}{100} \\ \frac{1}{10} & 10\sin\frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.999\,98 \\ 0.02 & 0.999\,93 \\ 0.03 & 0.999\,85 \\ 0.04 & 0.999\,73 \\ 0.05 & 0.999\,58 \\ 0.06 & 0.999\,4 \\ 0.07 & 0.999\,18 \\ 0.08 & 0.998\,93 \\ 0.09 & 0.998\,65 \\ 0.1 & 0.998\,33 \end{bmatrix}$$

行列を連結して極限近傍の値を求める

▶ **連結コマンドを使って極限近くの値を計算する**

1. 数式テンプレートツールバーのカギカッコボタン  を押します. マウスカーソルを入力ボックスに置いたままにします.
2. 数式オブジェクトツールバーの行列ボタン  をクリックするか, **挿入** + **行列**とします.
3. 1 列複数行の行列を作成し, OK を押します.
4. 各セルに定義域の値を入力します.
5. f(作成した行列) として**計算**コマンドを実行します.

上述の関数と同じ関数を利用すると, 次のような結果になります.

$$f\begin{bmatrix}\frac{1}{100}\\ \frac{1}{50}\\ \frac{3}{100}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\sin\frac{1}{100}\\ 50\sin\frac{1}{50}\\ \frac{100}{3}\sin\frac{3}{100}\end{bmatrix}$$

これらを連結します.

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{100}\\ \frac{1}{50}\\ \frac{3}{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\sin\frac{1}{100}\\ 50\sin\frac{1}{50}\\ \frac{100}{3}\sin\frac{3}{100}\end{bmatrix}, \text{連結:}\begin{bmatrix}\frac{1}{100} & 100\sin\frac{1}{100}\\ \frac{1}{50} & 50\sin\frac{1}{50}\\ \frac{3}{100} & \frac{100}{3}\sin\frac{3}{100}\end{bmatrix}$$

7.3　微分

関数 f の微分式 f' の定義は次の通りです.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

7.3.1　微分の表記

利用可能な微分式を次に示します.

$$\frac{d}{dx},\ \frac{d^n}{dx^n},\ D_x,\ D_{xx},\ D_{x^2},\ D_{xy},\ D_{x^sy^t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial^n}{\partial x^s\partial y^t}$$

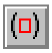
微分を計算するには, これらの形式のいずれかで数式を入力し, 数式にカーソルを置いたまま**計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$　　$\frac{d^4}{dx^4}\left(3x^8\right)=5040x^4$　　$D_{x^5y^2}\left(x^9y^3\right)=90\,720x^4y$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x\right)=\sin 2x$　　$\frac{\partial^5}{\partial x^2\partial y^3}(\sin x\cos y)=\frac{1}{2}\cos(x+y)-\frac{1}{2}\cos(x-y)$

仮に $f(x)$ が定義されていれば, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ と記述した場合, それらは 1 次, 2 次 n 次の微分式として認識されます.

Note　n 次微分式であることを示す $f^{(n)}$ にはキーボード上のカッコ記号は使わないでください. 必ず, **挿入**+ **カッコ**, または  をクリックしてください. キーボード上のカッコ記号を利用して $f^{(n)}(x)$ と記述すると $(f(x))^n$ と解釈されます.

▶ **関数定義 + 新しい定義**

$f(x)=\sin x\cos x$

▶ **計算**

$f(x)=\cos x\sin x$　　$f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$　　$f''(x)=-4\cos x\sin x$

$f^{(4)}(x) = 16\cos x \sin x$ $\qquad$ $f^4(x) = \cos^4 x \sin^4 x$

次のサンプルは，いくつかキーボード入力を使って，式を入力しています．

▶ **微分式 $\frac{d}{dx}x^2$ を入力する**

1. 目的の位置にカーソルを移動します．
2. アイコン をクリックするか，または**挿入**メニューから**分数**を選択します．分子を入力します．
3. 下向き矢印キーか，タブキーを使って分母に移動します．分母に dx と入力します．
4. 右向き矢印キーまたはスペースバーを押して分数式から離れます．数式を入力します．

▶ **微分式 $f^{(3)}(x)$ を入力する**

1. 目的の位置にカーソルを移動します．
2. アイコン をクリックするか，または**挿入**メニューから**数式**を選択します．
3. 関数名 f を入力します．
4. アイコン と をクリックします．または**挿入** + **上付き文字**，**挿入** + **ペアカッコ**としてカッコを選択します．
5. 入力ボックスに 3 を入力します．
6. 右矢印キーを 2 回押して上付き文字から離れます．
7. アイコン をクリックします．または，**挿入** + **ペアカッコ**としてカッコを選択します．
8. 入力ボックスに x を入力します．

▶ **x^2 の微分式を求める**

1. 式 $\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$ にカーソルを移動します．
2. **計算**コマンドまたは，CTRL + E とするか をクリックします．

次の一覧に示す式を計算した結果と，同じ値が表示されます．

$$\frac{dx^2}{dx} \qquad \frac{d}{dx}x^2 \qquad \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right)$$
$$D_x x^2 \qquad D_x\left(x^2\right) \qquad \frac{\partial x^2}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}x^2$$

ダッシュ記号はユーザが定義した関数にだけ有効です．例えば，式 $(x+\sin x)'$ の**計算**コマンドを実行しても微分式は得られません．

▶ **計算**

$(x+\sin x)' = x+\sin x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(x+\sin x) = 1+\cos x$

微分記号はすぐ右隣の項にだけ有効です．その例を次に紹介します．

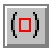
▶ **計算**

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}x^2+3x = 2+3x$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2+3x\right) = 2$

微分式の表記には十分気をつけてください．あいまいな記述でも正確に反応する場合と，意図とは異なった解釈を実行する場合があります．次の計算式で練習してみましょう．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bigl((x^2+3x\bigr) \qquad \text{および} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{x^2+3x$$

数式を正しく記述しないと，思わぬ計算結果が表示されます．もし，予期せぬ結果が表示された場合は CTRL ＋ ？ として認識パターンを確認してください．

Tip　カッコのアイコン  を活用すれば，数式の記述ミスを無くすのに役立ちます．

区間定義関数の微分式を求めることもできます．その計算結果もまた，区間定義式となります．区間定義式に関する詳細は 105 ページを参照してください．

▶ **関数定義 ＋ 新しい定義**

$f(x) = \begin{cases} x & if \quad x<0 \\ 3x^2 & if \quad x \geq 0 \end{cases}$

▶ **計算**

$\frac{d}{dx}f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x<0 \\ 6x & \text{if} \quad 0<x \end{cases}$

区間定義関数は命名しなくてもその微分式を求められます．

▶ **計算**

$$\frac{d}{dx}\left(\begin{cases} x+2 & \text{if} \quad x<0 \\ 2 & \text{if} \quad 0<x<1 \\ 2/x & \text{if} \quad 1<x \end{cases}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x<0 \\ 0 & \text{if} \quad 0<x \wedge x<1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{if} \quad 1<x \end{cases}$$

$\wedge$ 記号は $0<x$ と $x<1$ の両方が真であることを意味します．これは不等式 $0<x<1$ と同一です．

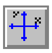
7.3.2　微分式のプロット

複数の関数を同一グラフ上にプロットする方法は既に解説しました．この機能を使って，関数式とその微分式を同一グラフ上に表示してみましょう．

▶ **関数定義 ＋ 新しい定義**

$f(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x$

▶ **1 階，2 階微分を持つ関数 f のプロットを作成する**

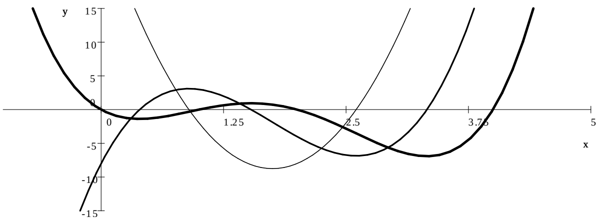
1. $f(x)$ と入力し，マウスカーソルを $f(x)$ に置き，  をクリックするか，**2D プロット** ＋ **直交座標**とします．
2. 微分式 $f'(x)$ を入力して選択します．そして，最初のプロット上にドラッグします．
3. 同じ要領で微分式 $f''(x)$ を入力し，選択しドラッグします．
4. プロットをクリックし，**編集** ＋ **プロパティ**を選び，プロットのプロパティダイアログを開きます．

5. 表示タブで, デフォルトのチェックを外し, 表示範囲を $-1 \le x \le 5$ および $-15 \le y \le 15$ とします.
6. 次にプロットした数式タブを表示します.
   - プロット番号 1 の線を太く表示し, プロット範囲を $-1 \le x \le 5$ として OK ボタンをクリックします.
   - プロット番号 2 については, 標準の太さでプロット範囲を $-1 \le x \le 5$ として OK ボタンをクリックします.
   - プロット番号 3 は細くして, プロット範囲を $-1 \le x \le 5$ として OK ボタンをクリックします.
7. OK ボタンをクリックします.

次の図に示すように f は太線, f' は標準, f'' は細い線で表示されます.

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

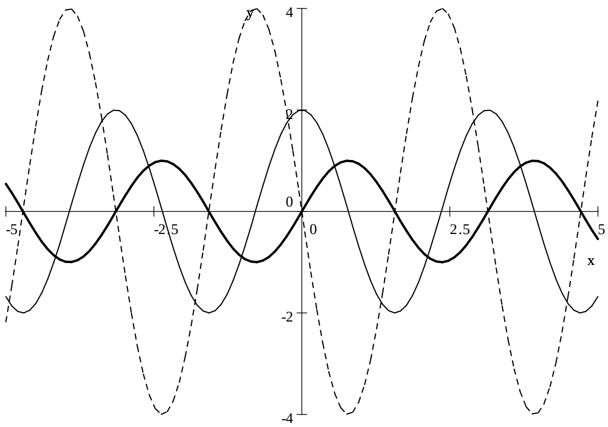
$f(x)$
$f'(x)$
$f''(x)$



各プロット毎に線の色を変更できます. 各曲線を判別する方法として, 点 0 における値を示す方法があります. 実際 $f(0)=0$, $f'(0)=-8$, $f''(0)=28$ と, それぞれ異なった値になります.
関数を定義する必要はありません. 以下に示すように, プロットに 1 階, 2 階微分式をドラッグするだけでプロットできます.

▶ 2D プロット ＋ 直交座標

$\sin 2x$
$\frac{d}{dx}(\sin 2x)$
$\frac{d^2}{dx^2}(\sin 2x)$



7.3.3 関数の一般形

任意の関数を代表するものとして $f(x)$ を関数として 定義することができます．関数の一般形 $f(x)$ を定義するにあたって具体的に右辺を記述する必要はありません．

▶ **関数定義 ＋ 新しい定義**

$f(x)$

$g(x)$

微積分に関する基本的な公式は，そのまま関数の一般形にも適用できます．

▶ **計算**

$\dfrac{d}{dx}f\left(g\left(x\right)\right)=f'\left(g\left(x\right)\right)\frac{\partial g(x)}{\partial x}$ $\qquad D_x\left(f(x)g(x)\right)=\left(f\left(x\right)\frac{\partial g(x)}{\partial x}+g\left(x\right)\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)$

$D_x\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\frac{\partial f(x)}{\partial x}g\left(x\right)-f\left(x\right)\frac{\partial g(x)}{\partial x}}{g^2\left(x\right)}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\left(f\left(x\right)+g(x)\right)=\dfrac{\partial f\left(x\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}$

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=f\left(x\right)$

▶ **ベキ級数，展開する変数:** x

$f(x)=f\left(0\right)+xf'\left(0\right)+\frac{1}{2}x^2f''\left(0\right)+\frac{1}{6}x^3f^{(3)}\left(0\right)+\frac{1}{24}x^4f^{(4)}\left(0\right)+O\left(x^5\right)$

7.3.4 陰関数の微分

明示的な方法ではなく，数式を使って，変数を別の変数にリンクさせることができます．例えば，$xy=1$ では，x の関数として，暗に y が決まります．この例は，明示的な関数 $y=1/x$ を与えることで，解くことができます．多くの数式は，変数 1 つでは簡単に解くことができません．また，$x^2+y^2=1$ のような関数式では，関数を決めることができません．しかし，このような関数式で表される曲線の一部は，関数で決めることができます．**微積分**サブメニューの**陰関数微分**は，ある変数に対して，数式を明示的に解くことなく，数式から微分します．

微分変数—独立変数を指定します．微分は, y' のような表記で返されるので, 結果を解釈する際に, この変数を覚えておくことは大切です．

► **定義した陰関数を微分する**

1. 数式にカーソルを移動します．
2. **微積分**サブメニューから**陰関数微分**を選択します．
3. 結果にマウスカーソルを置き, **求解 + 解**を実行します．

► **微積分 + 陰関数の微分**

$xy + \sin x = y$ (微分変数 x), 解: $y + xy' + \cos x = y'$

$xyz - x^2y = 0$ (微分変数 t), 解: $xyz' - 2xyx' + xzy' + yzx' - x^2y' = 0$

上記の最初のサンプルは, $y' = dy/dx$ であり, 2 番目のサンプルは $x' = dx/dt$, $y' = dy/dt$, $z' = dz/dt$ です．

► **求解 + 解**

$y + xy' + \cos x = y'$ (目的変数: y'),

解: $\begin{cases} \left\{\frac{1}{x-1}(-y - \cos x)\right\} & \text{if} \quad x \neq 1 \\ \mathbb{C} & \text{if} \quad y \in \{-\cos 1\} \wedge x = 1 \\ \emptyset & \text{if} \quad x = 1 \wedge y \in \mathbb{C} \setminus \{-\cos 1\} \end{cases}$

► **特別なケースを無視する**

- **ツール + 計算エンジン設定**を選び, 一般タブの求解オプショングループにある特別なケースを無視するチェックボックスを選択します．

► **求解 + 解**

$y + xy' + \cos x = y'$ (目的変数: y'), 解: $\frac{1}{x-1}(-y - \cos x)$

$xyz' - 2xyx' + xzy' + yzx' - x^2y' = 0$ (目的変数: z'),

解: $\frac{1}{xy}\left(2xyx' - xzy' - yzx' + x^2y'\right)$

関数定義 + 新しい定義を使って, 定数となる関数式を宣言することができます．ある状況下では, 定義した定数名を無視することができます．例えば, 陰関数の微分で従属および独立変数を識別する場合, 定義した定数は変数として考えません．以下の違いを見てみましょう．a は定数ですが, b は違います．

► **関数定義 + 新しい定義**

a

► **微積分 + 陰関数の微分**

$axy = \sin y$ (微分変数 x) 解: $ay + axy' = (\cos(y))\,y'$

$bxy = \sin y$ (微分変数 x) 解: $by + xby' + xyb' = (\cos(y))\,y'$

► **求解 + 解**

$ay + axy' = (\cos(y))\, y'$ (目的変数 y'), 解: $-a\frac{y}{ax-\cos y}$

$by + xby' + xyb' = (\cos(y))\, y'$ (目的変数 y'),

解: $\frac{1}{bx-\cos y}\left(-by - xyb'\right)$

Example 20 陰関数の微分機能と**編集**メニューのコマンドを使って 2 階微分 y'' を求める方法を紹介します.

1. 式 $y' = -\frac{y+\cos x}{x-1}$ にカーソルを移動します. **微積分**サブメニューから**陰関数微分**を選択します. 微分変数を x とし, OK ボタンをクリックします. 次の結果が表示されます.

$$y'' = -\frac{y' - \sin x}{x-1} + \frac{y+\cos x}{(x-1)^2}$$

2. 次に上式の y' を $-\frac{y+\cos x}{x-1}$ で置換します.
1. 簡単化と分母で因数分解を部分計算で行うことにより, 次の結果を得ることができます.

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{-\frac{y+\cos x}{x-1} - \sin x}{x-1} + \frac{y+\cos x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2y + 2\cos x + (\sin x)\, x - \sin x}{x^2 - 2x + 1} \\ &= \frac{2y + 2\cos x + (\sin x)\, x - \sin x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Example 21 陰関数の微分機能を使って接線を求めることができます. 微分式 y' を求め, 曲線上の任意の点における傾きを求めます. その結果を利用して接線の方程式を得ることができます.

1. 式 $x^3 + 3x^2y = 2y^3 + 2$ にカーソルを移動します. **微積分**サブメニューから**陰関数微分**を選択し, 微分変数を x とします. 次の計算結果が表示されます.

$$\text{解: } 6xy + 3x^2 + 3x^2y' = 6y^2y'$$

2. 次に**求解**サブメニューから**解**(目的変数: y') を選択すると,

$$\text{解: } \begin{cases} \left\{\frac{-6xy-3x^2}{3x^2-6y^2}\right\} & \text{if} \quad 3x^2 - 6y^2 \neq 0 \\ \mathbb{C} & \text{if} \quad -6xy - 3x^2 = 0 \wedge 3x^2 - 6y^2 = 0 \\ \emptyset & \text{if} \quad -6xy - 3x^2 \neq 0 \wedge 3x^2 - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

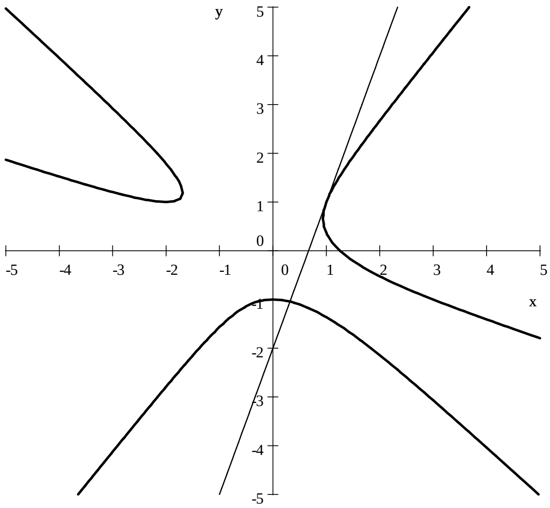
最初の解を簡単化すると次のようになります.

$$\frac{-6xy - 3x^2}{3x^2 - 6y^2} = \frac{2xy + x^2}{2y^2 - x^2}$$

3. 曲線上の点 $(1, 1)$ における傾きを求めます. 数式をカギカッコで囲みます. 座標を下付き文字として記述して**計算**コマンドを実行します.

$$\left[\frac{2xy + x^2}{2y^2 - x^2}\right]_{x=1, y=1} = 3$$

4. 接線を示す式 $y-1=3\,(x-1)$ にカーソルを移動して**求解**サブメニューから**解**(目的変数: y) を選択すると目的の接線の方程式 $y=3x-2$ を求めることができます.
5. 式 $x^3+3x^2y=2y^3+2$ にカーソルを移動して **2D プロット**サブメニューから**陰関数**を選択します. 曲線がプロットされます. そこに接線の式をドラッグすれば接線が追加されます.



関数定義 + **新しい定義**コマンドで汎用的な定数を作成することができます. こうして定義した定数を陰関数の微分式で利用すると, 任意の一般的な定数として扱われます. その例を次に示します.

▶ **関数定義 + 新しい定義**

a

▶ **微積分 + 陰関数の微分**

$ax+y=0$ (微分変数: x) 微分式: $a+y'=0$

$bx+y=0$ (微分変数: x) 微分式: $b'x+b+y'=0$

ここで $a'=0$ と解釈されますが, b' は 0 とは解釈されません.

7.3.5 方程式の数値解を求める

方程式の数値解を求める場合, **解**および**数値解**コマンドを利用します. 次にその例を示します.

▶ **求解 + 解**

$5x^3-5x^2=x$, 解: $0, \frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5}, \frac{3}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$

$5.0x^3-5.0x^2=x$, 解: $0, -0.170\,82, 1.170\,8$

▶ **求解 + 数値解**

$5x^3-5x^2=x$, 解: $\{x=0\}, \{[x=1.170\,8], [x=-0.170\,82], [x=0.0]\}$

繰返し計算

微積分サブメニューの**繰返し**の機能を利用して関数形 $f(x) = x$ の数値解を求めることもできます．この機能は曲線 と $y = f(x)$ と $y = x$ の交点の近傍で $|f'(x)| < 1$ を満たす関数に対して利用可能です．変数 x_0 を使って計算を開始すると, 次のような計算結果が得られます．

$$f(x_0), f\left(f(x_0)\right), f\left(f\left(f(x_0)\right)\right), f\left(f\left(f\left(f(x_0)\right)\right)\right), \ldots$$

繰返し計算の回数はユーザが指定します．適切な式であれば, この計算結果の値は方程式 $f(x) = x$ の解に近づきます．
例えば $\cos x = x$ を解く場合にこの機能を利用します．

► **関数定義 ＋ 新しい定義**
$f(x) = \cos x$
ダイアログが表示されたら, 繰返し計算の関数名 f と初期値 1.0, そして繰返し回数に 10 を入力します．有効桁数を 5 にした場合の計算結果を次に示します．

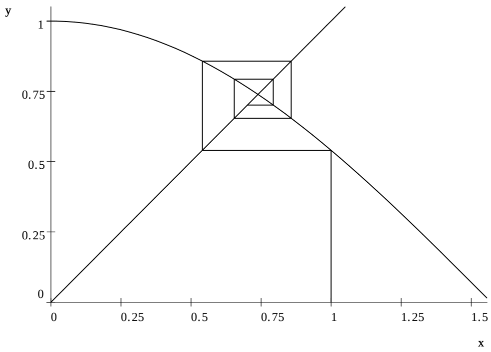
► **微積分 ＋ 繰返し**

繰り返し計算: $\begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.5403 \\ 0.85755 \\ 0.65429 \\ 0.79348 \\ 0.70137 \\ 0.76396 \\ 0.7221 \\ 0.75042 \\ 0.7314 \\ 0.74424 \end{bmatrix}$

これらの値は次の関数値を計算したものです．

$$f(1.0), f(f(1.0)), \ldots, f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(1.0))))))))))$$

これらの値は幾何学的な手法によって計算することもできます．点 $(1, 0)$ から垂直に移動し, 曲線 $y = \cos x$ との交点を求めます．次に水平方向に移動し, 直線 $y = x$ との交点を求めます．そこから, 垂直に移動し $y = \cos x$, 同じ要領で水平に移動し $y = x$ との交点を求めます．この時の様子を次に示します．



この図は $\cos x$ と x を通常の方法でプロットし, 次の行列をドラッグして作成したものです.

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 1.0 & 0.5403 \\ 0.5403 & 0.5403 \\ 0.5403 & 0.85755 \\ 0.85755 & 0.85755 \\ 0.85755 & 0.65429 \\ 0.65429 & 0.65429 \\ 0.65429 & 0.79348 \\ 0.79348 & 0.79348 \\ 0.79348 & 0.70137 \\ 0.70137 & 0.70137 \end{bmatrix}$$

この行列は先程計算した行列をコピーし, 編集した後, **行列** + **連結**コマンドで編集したものです. 行列の連結方法に関する詳細は 299 ページを参照してください.

ニュートン法

前項で紹介した繰返し計算には計算速度の問題があり, 大変時間がかかります. ここで紹介するニュートン法は基本的な考えを繰返し計算の方法と共有していますが, 計算速度の面で優れています. ニュートン法は接線がグラフの微小部分で優れた近似値を提供すると言う考え方を利用しています.

関数 f のグラフ上にある点 $(x_0, f(x_0))$ を考えます. この点における接線は次の通りです.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

この接線は $y = 0$ のとき, x 軸と交わります. その時の x の値は,

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

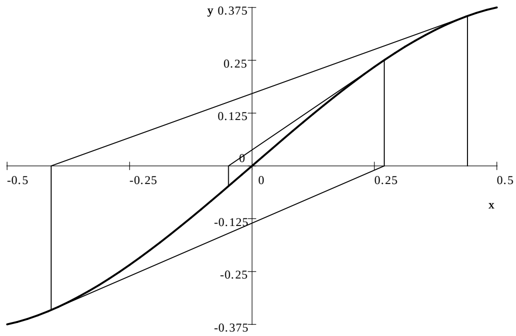
となります. 関数 $f(x)$ がゼロになる時の x 座標を x_n とすれば, 点 $(x_n, f(x_n))$, つまり $(x_{n+1}, 0)$ における接線は次のようになります.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

関数 f のニュートン法による繰返し関数を g とすれば, それは次のように定義できます.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

最初の近似値 x_0 を与えると, f をゼロに近づける $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が得られます. 次のグラフで, $f(x) = x - x^3$, $x_0 = 0.44$, $x_1 \approx -0.41$, $x_2 \approx 0.27$, $x_3 \approx -0.048$ となります.



$x - x^3$

このグラフは関数 $x - x^3$ を普通にプロットし, グラフを拡大表示した後で次の行列

$$\begin{bmatrix} 0.44 & 0 \\ 0.44 & 0.904\,75 \\ -0.41 & 0 \\ -0.41 & 0.917\,12 \\ 0.27 & 0 \\ 0.27 & 0.963\,77 \\ -0.048 & 0 \\ -0.048 & 0.998\,85 \end{bmatrix}$$

をプロットにドラッグして作成したものです.

方程式 $x = \cos x$ をニュートン法で解くことができます.

► **関数定義 ＋ 新しい定義**

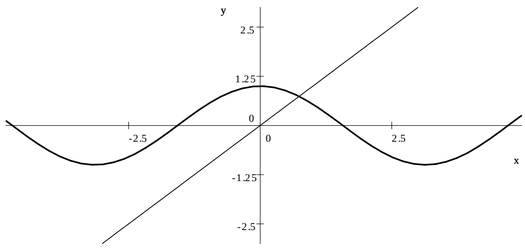
$f(x) = x - \cos x$
$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
ダイアログが表示されたら**繰返し関数**として g を入力して初期値を 0.7, 繰返し計算の回数を 5 にします.
有効数字を 20 とすると, 次のような計算結果が表示されます.

► **微積分 ＋ 繰返し計算**

0.7
0.73943649784805819543
0.7390851604651073986
0.73908513321516080562
0.73908513321516064166
0.73908513321516064166
4 回の繰返し計算で値がほぼ収束しました．試しに次の左辺を計算してみましょう．

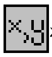
$$\cos(0.73908513321516064166) = 0.73908513321516064165$$

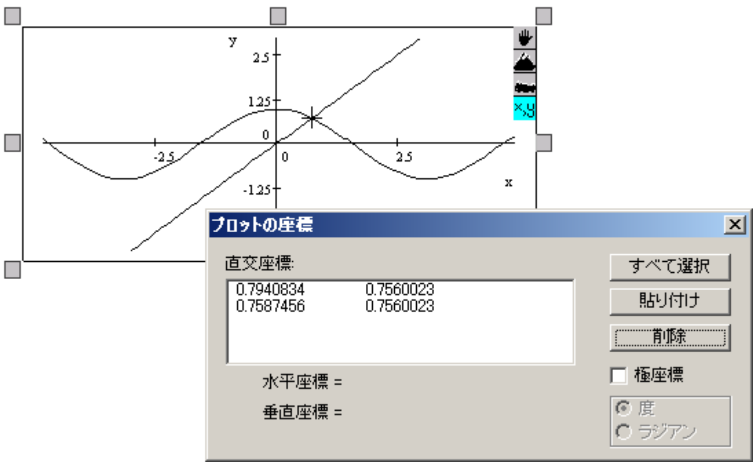
次の図で $y = \cos x$ と $y = x$ の交点は，ほぼ予測した場所に存在しています．この交点が方程式 $x = \cos x$ の解となります．



この例題では 1 つの変数しかありません．従って，解の範囲を指定する必要はありません．式 $\cos x = x$ を入力し，**求解**サブメニューから**数値解**コマンドを選択します．

▶　**求解 ＋ 数値解**

$\cos x = x$, 解：$\{x = 0.739\,09\}$
軸上の座標値を見つけるツールが用意されています．プロットをダブルクリックしてから をクリックします．プロットで交点近くにカーソルを移動すると，カーソルの位置座標が画面表示されます．



7.3.6　最適化

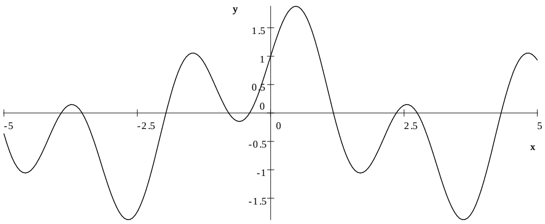
関数 $f(x)$ の極大点や極小点における x の値を求める方法がいくつか用意されています. 関数 $f(x)$ が明示的または暗示的に分かっている場合, これらを求める良い方法は, 関数のプロットを調べることです.

Tip　多くの場合, 最適化のため浮動小数点係数を使うことをお勧めします. **求解** + **解**では有理係数を持つ数式に記号解を与え, 解が長くなり, 複雑な式になり, 操作が困難になります.

関数 $f(x) = \cos x + \sin 3x$ を使って, その方法を紹介します. この関数には, 次の図からも分かるように極大, 極小点が数多く存在します.

▶ **2D プロット + 直交座標**

$\cos x + \sin 3x$



極値は $f'(x) = 0$ を満たす x に存在します. 従って, 連続な関数 $f(x) = \cos x + \sin 3x$ の場合に, 至るところに極値が存在します.

Note　この章では有効数字を 5 に設定しています. 有効数字の設定は, 数式処理設定にある一般タブで行います. 詳細は 29 ページを参照してください.

▶ **解 + 数値解**

$\frac{d}{dx}(\cos x + \sin 3x) = 0$, 解: $\{[x = -82.267]\}$

この計算では, グラフ上に多くの極値があるにもかかわらず, 1 つの極値だけしか求めていません. 1 列の行列の 1 行目に数式を, 2 行目に解の範囲を入力して, 解の範囲を指定することができます.

▶ **解 + 数値解**

$\begin{array}{c} \frac{d}{dx}(\cos x + \sin 3x) = 0 \\ x \in (0, 2) \end{array}$, 解: $[x = 0.4728]$

別の方法としては, 関数に浮動小数点係数を与え, そのまま使う方法です.

▶ **関数定義 + 新しい定義**

$f(x) = 1.0 \cos x + \sin 3x$

▶ **求解 + 解**

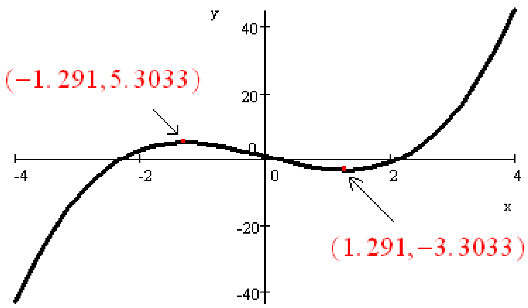
$f'(x) = 0$, 解: $\{6.2832 X_{36} + 2.0 (\arctan X_{34}) \mid X_{36} \in \mathbb{Z},$

$X_{34} \in \{-4.1510, -0.89335, -0.30132, 0.24091, 1.1194, 3.3187\}$
$\cap \mathbb{C} \setminus \{i\} \cap \mathbb{C} \setminus \{-i\}\}$
実際, 極小値 $f(-2.6688) = -1.8787$ は $x = -2.6688$ (および $-2.6688 + 2\pi n$ ここで n は整数) で出現し, 極大値 $f(0.4728) = 1.8787$ は $x = 0.4728$ (および $0.4728 + 2\pi n$ ただし n は整数) に存在します.
関数 $y = x^3 - 5x + 1$ の極値も同じように求めることができます.

▶ **微積分 ＋ 極値を探す**
$x^3 - 5x + 1$, 極値: $\left\{\frac{10}{9}\sqrt{15} + 1, -\frac{10}{9}\sqrt{15} + 1\right\}$,
　　この時 $\left\{\left[x = \frac{1}{3}\sqrt{15}\right], \left[x = -\frac{1}{3}\sqrt{15}\right]\right\}$
係数に小数点を付けると小数点形式で近似値を表示します. 関数 $x^3 - 5.0x + 1.0$ に極値を求めるコマンドを実行すると, 数値解が求められます.

▶ **微積分 ＋ 極値を探す**
$x^3 - 5.0x + 1.0$ 極値: $\{-3.3033, 5.3033\}$,
この時 $\{[x = -1.2910], [x = 1.2910]\}$
図からも分かるように $(-1.291, 5.3033)$ と $(1.291, -3.3033)$ がそれぞれ極大点, および極小点となっています.

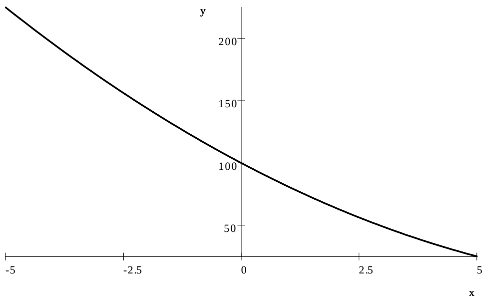
▶ **2D プロット ＋ 直交座標**
$x^3 - 5x + 1$



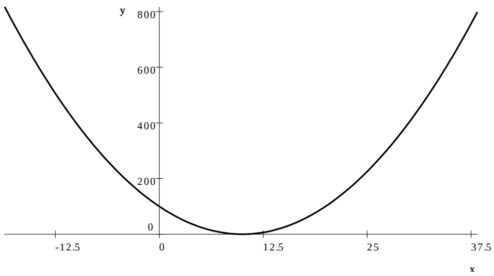
7.3.7　曲線の描画

デフォルトのプロットが, 分かりにくいものになる場合があります. 仮にそうでなくても, 詳細なプロットを表示したい場合があります. 見やすいプロットを表示するために, 変数域と範囲を調整する必要があるかもしれません. 例えば, 関数 $f(x) = x^2 - 20x + 100$ のグラフを見てみましょう. デフォルトのプロットでは, 減少する曲線が表示されているだけで, 曲線の全体像についての詳細はわかりません.

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**
$x^2 - 20x + 100$



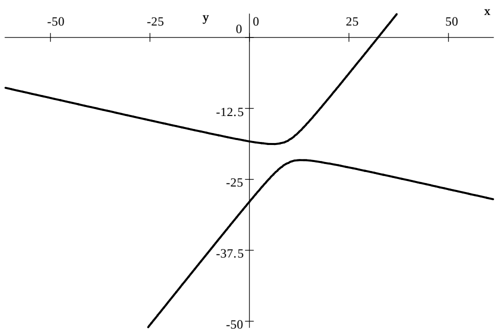
曲線の全体像を表示するためにはプロットのプロパティダイアログの表示タブにあるデフォルト設定を解除し, 次のように表示範囲を変更する必要があります.



より印象的な物は, 関数 $7x^2 + 36xy - 50y^2 + 594x - 2363y - 26\,500 = 0$ をプロットしても, デフォルトの範囲 $-5 < x < 5$. にグラフのデータ点が無いために, 最初はグラフが作成されません. 次のようにグラフを拡大して, 異なる表示範囲します.

▶ **2D プロット ＋ 陰関数**

$7x^2 + 36xy - 50y^2 + 594x - 2363y - 26\,500 = 0$



グラフ表示を調整したので, これらの極値がビューに含まれるようになりました. 拡大したり, 表示位置を変えることが必要になる場合があります.

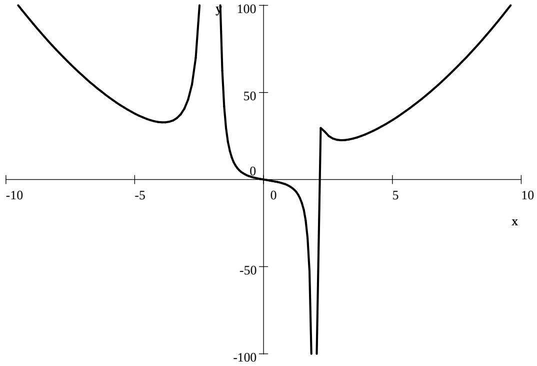
▶ **グラフの相対的な極値を表示する**

- $f'(x) = 0$ を計算します.

次のサンプルでは, 関数の極値を表示します.

$$f(x) = \frac{x^6 - 5x^3 + 10x^2 - 40x}{(x^2 - 4)^2}$$

この関数のデフォルトのプロットは, 3 つの極値を表示しています.



極値となっているポイントを探すことができます.

▶ **求解 + 解**

$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x^6 - 5x^3 + 10x^2 - 40x}{(x^2 - 4)^2}\right] = 0$, 解: $(\rho_1) \setminus \{-2, 2\}$ ここで ρ_1 は, $180X_{231}^2 - 80X_{231} - 20X_{231}^3 + 5X_{231}^4 - 24X_{231}^5 + 2X_{231}^7 + 160$, X_{231} の根です.

求解サブメニューの**数値解**を使って, この 7 次の多項式の近似実数解を求めることができます. 次の例は, 数式処理設定ダイアログボックスの一般タブで計算結果の表示桁数を 5 に設定しています.

▶ **求解 + 数値解**

$180X_{231}^2 - 80X_{231} - 20X_{231}^3 + 5X_{231}^4 - 24X_{231}^5 + 2X_{231}^7 + 160 = 0$,

解: $[X_{231} = 2.2359]$, $[X_{231} = -0.90484 + 1.6422i]$,

$[X_{231} = -0.90484 - 1.6422i]$, $[X_{231} = 3.0327]$, $[X_{231} = 0.21375 - 0.90433i]$,

$[X_{231} = 0.21375 + 0.90433i]$, $[X_{231} = -3.8864]$

関数 f' の 2 つの極小点は, $f(-3.8864) = 32.812$ および $f(3.0327) = 22.553$, 極大点は, $f(2.2359) = 29.656$.

さらに, 式を部分分数の形に変形することで, その特徴を見つけることができます.

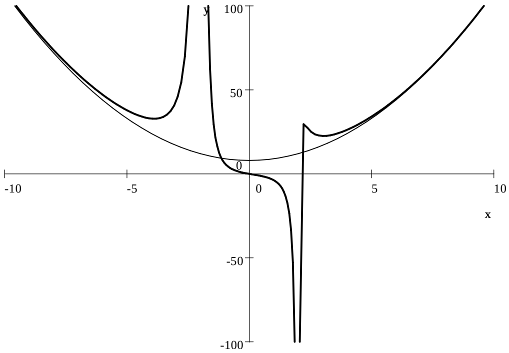
▶ **多項式 + 除算**

$$\frac{x^6 - 5x^3 + 10x^2 - 40x}{(x^2 - 4)^2} = x^2 + \frac{1}{(x^2-4)^2}\left(58x^2 - 40x - 5x^3 - 128\right) + 8$$

式 $x^2 + 8$ を選択して既存のプロットにドラッグします. 関数 $y = x^2 + 8$ は x の値が大きいところで, その曲線が $y = f(x)$ と良く一致しています.

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

$\dfrac{x^6-5x^3+10x^2-40x}{(x^2-4)^2}$ および x^2+8



▶ **グラフが上に凸になっている場所を見つける**

- 2 階微分の正負が反転する範囲を見つける

関数 $f(x) = x^4+3x^3-x^2-3x$ で曲線が上に凸になっている範囲を探します．従って 微分式 $f''(x)$ である $f''(x) = 12x^2+18x-2$ から $12x^2+18x-2>0$ を解きます．

▶ **求解 ＋ 解**

$12x^2+18x-2>0$, 解: $\left(-\infty, -\frac{1}{12}\sqrt{105}-\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{12}\sqrt{105}-\frac{3}{4}, \infty\right)$
複雑な不等式を解く場合は, 右辺が 0 の方程式に変形し, その符号を調べてください．

Example 22 関数 $f(x) = \frac{x^6-5x^3+10x^2-40x}{(x^2-4)^2}$ の曲線が上に凸になる範囲を 2 階微分することによって調べます．**計算**コマンドと**簡単化**コマンドを使って次の式を得ます．

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(x+2)^{-4}(x-2)^{-4} \\ &\quad\cdot\left(320x^2-1200x-400x^3+270x^4-5x^5-16x^6+x^8+160\right) \end{aligned}$$

これから, 分母が常に正であることが分かります．従って, 分子の符号を調べます．次の式に**求解**サブメニューから**数値解**を選択します．

$$0 = 320x^2-1200x-400x^3+270x^4-5x^5-16x^6+x^8+160$$

解は,

$$[x = 0.13759], [x = 2.3414]$$

そして**数値計算**コマンド実行します．

$$\begin{aligned} f''(0) &= 1.25 \\ f''(1) &= -21.481 \\ f''(2.4) &= 40.964 \end{aligned}$$

漸近線の存在を考慮するとグラフは次の範囲 $(-\infty,-2)$, $(-2,0.1376)$, $(2.3414,\infty)$ で上に凸になっていると考えられます. そして, $(0.13759,2)$ と $(2,2.3414)$ の間で下向きにへこんだ形となります.

7.4　不定積分

関数 $f(x)$ の逆微分関数を $g(x)$ とすれば, 当然, この微分関数は $f(x)$ です. $g(x)$ を $f(x)$ の逆微分関数とするなら, $g(x)+C$ も当然, 逆微分関数と言えます. 従って, 定数 C を色々と用意すれば, それだけ逆微分関数 $g(x)+C$ ができる訳です.
関数 $f(x)$ の不定積分は $f(x)$ の逆微分関数に含まれ, $\int f(x)\,dx$ と記述します.

► **不定積分を求める**

1. 数式にカーソルを移動します.
2. **計算**コマンドを選択するか, または CTRL + E, もしくは をクリックします.

► **計算**
$\int \left(2x^2+3x+5\right)\,dx = \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x$
不定積分を実行しても積分定数 が自動的に作成されることはありません. 必要に応じて "$+\ C$" を次の様に入力します.

$$\int \left(2x^2+3x+5\right)\,dx = \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x$$

から

$$\int \left(2x^2+3x+5\right)\,dx = \frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+5x+C$$

例えば, 加速度から速度を求める場合などは, このようにして自分で積分定数を入力します.

Tip　好みに応じて関数 $f\,(x)$ と dx の間にスペースを入れ, $\int f\,(x)\;dx$ としてもかまいません. 狭いスペースを挿入する時は**挿入**+ **スペース** + **横スペース**とします. または をクリックします. このスペースによって数式処理に影響を及ぼす事はありません.

区間定義関数の不定積分を求めることもできます. 計算結果も当然, 区間定義関数となります. 次のように, 数式に直接, **計算**コマンドを実行できます. ヘルパーラインをオンにして右側の空カッコを表示してください.

► **関数定義** + **新しい定義**
$f(x)=\begin{cases} x & \text{if} \quad x<0 \\ 3x^2 & \text{if} \quad x\geq 0 \end{cases}$

► **計算**

$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{if} \quad x \le 0 \\ x^3 & \text{if} \quad 0 < x \end{cases}$

▶ **計算**

$$\int \begin{cases} x & \text{if} \quad x < 0 \\ 3x^2 & \text{if} \quad x \ge 0 \end{cases} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{if} \quad x \le 0 \\ x^3 & \text{if} \quad 0 < x \end{cases}$$

7.4.1　数式を確認する

代数システムでは, 漠然とした数式を解釈することができます. 数式が目的通りに解釈できるか, 数式を計算することなく, 確認することができます.

▶ **計算しないで数式を確認する**

- 数式にカーソルを移動して, CTRL + ? または**数式処理** + **標準的な表記**を選びます.

▶ CTRL + ? **または数式処理** + **標準的な表記**

$xy/z = x\frac{y}{z}$ $\qquad \sin x/y = \sin\frac{x}{y}$

$\displaystyle\int ax^3 = \int ax^3\,d?$ $\qquad \displaystyle\int x^3 a = \int x^3 a\,d?$

仮に, 積分式の解釈で積分変数を表していない場合, 不正確な積分式であると解釈されます. このような式を計算する場合, 通常は, アルファベット順に選択されます.

▶ **計算**

$\displaystyle\int ax^3 = \frac{1}{4}ax^4$ $\qquad \displaystyle\int x^3 a = \frac{1}{4}ax^4$

関数 f が定義されていない場合, これは普通の変数または定数として認識されます.

▶ **計算**

$\displaystyle\int f = \frac{1}{2}f^2$ $\qquad \displaystyle\int f(x)dx = \frac{1}{2}fx^2$

この例で f は普通の変数として認識されており, $f(x)$ は f と x の積として解釈されます.

7.4.2　数式の清書

場合によっては計算結果が複雑な数式で表示される場合があります. 数式を簡単な形に清書する場合は**数式処理**メニューにある, **簡単化**, **結合**, **展開**, **因数分解**コマンドなどを使います.

▶ **計算, 因数分解**

$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a(\cos bx)e^{ax}+b(\sin bx)e^{ax}}{a^2+b^2} = \left(a^2+b^2\right)^{-1}(a\cos bx + b\sin bx)\left(e^{ax}\right)$

積分式 $\int 2^x \cos bx\,dx$ は一見簡単そうに見えて, 実はこれを計算すると, とても複雑な値となります. 実際にこの章の最後に練習問題として用意しておきました. 代数式は簡単化することによって, より見やすい式になります. 実際にメニューにある**簡単化**, **結合**, **展開**, **因数分解**の機能をいろいろ試してください. 簡単に数式を変換できるところに, このプログラムの特徴があります.

7.5 積分の手法

数式から直接, 積分計算を実行する事ができますが, 例えば, 部分積分, 置換積分, それに部分分数積分などのコマンドも用意されています.

7.5.1 部分積分

部分積分の公式を次に示します.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

この式は, 微分の積の公式から次のようになります.

$$d\,(uv) = udv + vdu$$

そして, 積分の線形性から次のようになります.

$$\int d\,(uv) = \int udv + \int vdu$$

微分の基礎理論から, 部分積分の式で $\int d\,(uv)$ を uv で置き換えることができます.

► **部分積分で計算する**

1. 数式にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**部分積分**を選択します.
3. ダイアログボックスに微分される関数を入力します.
4. OK ボタンをクリックします.

例えば, 積分式 $\int x \ln x\,dx$ では, 微分される関数を $\ln x$ とすると次のような結果になります.

► **微積分 ＋ 部分積分 (微分する関数:** $\ln x$)

$\int x \ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx$

$\int \frac{1}{2}x\,dx$ は, 簡単に積分できるので, これは, 積分 $x \ln x\,dx$ の問題を解きます. ここでは $u = \ln x$ で $dv = x\,dx$ としています. 従って $du = \frac{1}{x}\,dx$ および $v = \frac{1}{2}x^2$ となります.

7.5.2 置換積分

置換積分の公式を次に示します. ただし, $u = g(x)$ の時 $du = g'(x)\,dx$ とします.

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

► **置換積分を実行する**

1. 積分式 $\int x \sin x^2 \, dx$ を入力します.
2. **微積分**サブメニューから**置換積分**を選択します.
3. ダイアログボックスに $\varphi(u) = g(x)$ を入力します.
4. OK ボタンをクリックします.

積分 $\displaystyle\int x \sin x^2 \, dx$ で, $u = x^2$ のように置換して, 次のようになります.

► **微積分 ＋ 置換積分 (置換:** $u = x^2$**)**

$\displaystyle\int x \sin x^2 \, dx = \int \tfrac{1}{2} \sin u \; du$
これは, 積分 $x \sin x^2 \, dx$ の問題を 2 つの簡単な問題に置き換えます. 1 つは, 積分 $\frac{1}{2} \sin u \, du$ で, 結果の u を x^2 で置き換えます. $u = g(x) = x^2$, $f(u) = \sin u$, $du = 2x \, dx$ です.
積分 $\displaystyle\int x^5 \sqrt{x^3+1} \, dx$ で, $u = x^3 + 1$ のように置換します.

► **微積分 ＋ 置換積分 (置換:** $u = x^3 + 1$**)**
$\displaystyle\int x^5 \sqrt{x^3+1} \, dx = \int \tfrac{1}{3} \sqrt{u} \, (u-1) \; du$

► **計算**
$\int \frac{1}{3} \sqrt{u} \, (u-1) \; du = \frac{2}{15} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}}$
そして, 最後に置換を $u = x^3 + 1$ で元に戻します.

$$\frac{2}{15} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{15} \left(x^3+1\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9} \left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}$$

7.5.3 部分分数

部分分数積分は因数分解された有理関数は, より簡単な関数の和に書き換えることができるという考えを利用しています. 次の例題の計算結果が複数の項の和で表示されることに注目してください.

► 計算
$$\int \frac{3x^2+2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)^2} \, dx = \tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{4} \arctan x - \tfrac{5}{2} \ln(x-1)$$
$$+\tfrac{5}{4} \ln\left(x^2+1\right) - \frac{2}{x - x^2 + x^3 - 1} + \frac{x}{4x - 4x^2 + 4x^3 - 4}$$
$$-11 \frac{x^2}{4x - 4x^2 + 4x^3 - 4}$$
この計算が内部的にどのように処理されたか, その様子を調べる場合に部分分数法を利用します.

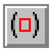
► **部分分数法を使う**

- 積分を実行する前に, 数式の有理関数を部分分数に置き換えます.

Example 23 式 $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$ に部分分数積分を実行する .

1. 式を入力し，積分記号の中にある有理式 $\dfrac{3x^2+2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ を選択します．
2. マウスカーソルを式においたまま，**微積分**サブメニューから**部分分数**コマンドまたは**多項式**コマンドを選択します．

$$\frac{3x^2+2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{9}{4\,(x-1)^2}-\frac{5}{2\,(x-1)}+\frac{\frac{1}{2}x-1}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}}{x^2+1}$$

3. 計算結果が選択されている状態で  をクリックします．式の左側に積分記号を入力し，式の右側に dx を入力します．
次のような積分式になります．

$$\int\left(\frac{9}{4\,(x-1)^2}-\frac{5}{2\,(x-1)}+\frac{1}{4}\frac{1+10x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{x-2}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx$$

4. 式を積分の和として書き換えます．

$$\int\frac{9}{4\,(x-1)^2}\,dx-\int\frac{5}{2\,(x-1)}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1+10x}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{x-2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$$

5. 個々の積分式を計算します．

$$\begin{aligned}\int\frac{9}{4\,(x-1)^2}\,dx&=-\frac{9}{4x-4}\\-\int\frac{5}{2\,(x-1)}\,dx&=-\frac{5}{2}\ln(x-1)\\\frac{1}{4}\int\frac{1+10x}{x^2+1}\,dx&=\frac{1}{4}\arctan x-\frac{1}{8}\pi+\frac{5}{4}\ln\left(x^2+1\right)\\\frac{1}{2}\int\frac{-2+x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx&=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2\,(2x^2+2)}\end{aligned}$$

6. 元の積分式は上記式の和として右側に現れます．

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2+2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx=&-\frac{9}{4\,(x-1)}-\frac{5}{2}\ln(x-1)\\&+\frac{1}{4}\arctan x-\frac{1}{8}\pi+\frac{5}{4}\ln\left(x^2+1\right)\\&+\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2\,(2x^2+2)}\end{aligned}$$

計算コマンドで計算した結果と同一になります．

7.6　定積分

関数 $f(x)$ の範囲 $[a,b]$ における定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の定義式は次の通りです．

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$$

ここで $\bar{x}_i$ は区間 $[a, b]$ 内の i 番目の値を示し,

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$\|P\| = \max\{\Delta x_i\}$ です．総和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

はリーマン和と呼ばれます．区間 $[a, b]$ が存在する時, 関数 f は積分可能です.
関数 f の区間 $[a, b]$ における積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

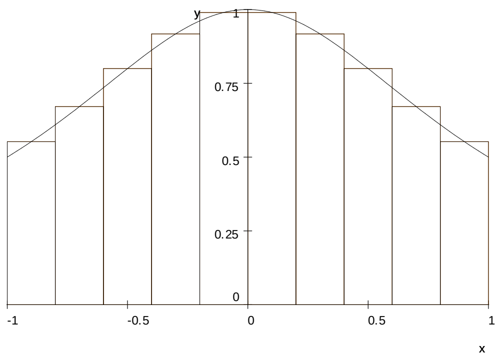
で示す事ができます．特に関数 f が区間 $[a, b]$ で連続な場合, 関数 f は区間 $[a, b]$ で積分可能です.
今, 正の値を持つ関数 f を使って, 次のような和を考えます.

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

この式は底辺の微小区間を $\frac{b-a}{n}$ とし, 高さを関数 f で計算した長方形の和を示す式です．高さは各長方形の右側の x 座標を利用して計算したものです．例えば $a = -1$, $b = 1$, $n = 10$, で $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ とすると, 上の式は次のようになります.

$$\frac{1-(-1)}{10} \sum_{i=1}^{n} f\left(-1 + i\frac{1-(-1)}{10}\right)$$

図に示すように区間内の面積を 10 の長方形の和として計算することを示しています.



(長方形の高さを利用したリーマン和の計算に関する詳細は 260 ページを参照してください.)

7.6.1　定積分の入力と計算

▶　定積分を入力する

1. アイコン  をクリックするか, または, **挿入** + **オペレータ**として積分記号を選択します.
2. アイコン  をクリックするか, **挿入** + **下付き文字**とします.
3. タブキーを押して積分の上限に移動します. 下付き文字と上付き文字の用法は, 積分記号の場合も他の数式の用法と同じです.
4. スペースバーか, または右矢印キーで上付き文字から離れ, 数式を入力します.

► **定積分を計算する**

- 定積分の計算方法は不定積分のそれと同じです. 数式にカーソルを移動して**計算**または, **数値計算**コマンドを選択します.

► **計算, 数値計算**
$\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{4}{9}\sqrt{2} - \frac{2}{9} = 0.4063171388$

► **数値計算**
$\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = 0.4063171388$
絶対値記号や区間定義関数の積分も通常の積分計算と同じ手順で計算できます.

► **計算**
$\int_{-2}^2 \left|x^2-1\right|\,dx = 4$
絶対値記号を使わないで複数の式の和に書き換え, それを計算することによって演算結果を確認することもできます.

► **求解 + 解**
$x^2-1>0$, 解: $(1,\infty)\cup(-\infty,-1)$
つまり, $x<-1$ または $1<x$ で $\left|x^2-1\right| = x^2-1$ であり, $-1<x<1$ の時, $\left|x^2-1\right| = -\left(x^2-1\right) = 1-x^2$ となります. 従って,
上記の積分式は次のように 3 つの項の和になります.

$$\int_{-2}^2 \left|x^2-1\right|\,dx = \int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)\,dx + \int_{-1}^1\left(1-x^2\right)\,dx + \int_1^2\left(x^2-1\right)\,dx$$

► **計算**
$\int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)\,dx + \int_{-1}^1\left(1-x^2\right)\,dx + \int_1^2\left(x^2-1\right)\,dx = 4$
式を直接積分するか, $f(x)$ を定義して, 区間定義関数を定義します.

► **関数定義 + 新しい定義**
$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x<0 \\ x & \text{if} \quad x\geq 0 \end{cases}$

► **計算**

$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \frac{43}{6}$ $\int_{-2}^{3} \left(\begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x < 0 \\ x & \text{if} \quad x \geq 0 \end{cases} \right) dx = \frac{43}{6}$

この式は次のように積分式の和として計算する事もできます.

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx = \frac{8}{3} + \frac{9}{2} = \frac{43}{6}$$

7.6.2　定積分での積分の手法

不定積分のセクションで説明した方法— 部分積分, 置換積分, 部分分数 — は, 定積分でも行うことができます. これらの方法の一般的な説明については, 247 ページをご覧下さい。

▶ **定積分での部分積分**

1. 定積分式にマウスカーソルを置きます.
2. **微積分**サブメニューから**部分積分**を選びます.
3. ダイアログボックスの微分される数式の一部に適切な数式を入力します.
4. OK をクリックします.

▶ **微積分 + 部分積分 (微分される数式の一部:** $\ln x$)

$\int_{1}^{2} x \ln x\,dx = 2\ln 2 - \int_{1}^{2} \frac{1}{2} x\,dx$

▶ **定積分での置換積分**

1. 定積分式にマウスカーソルを置きます.
2. **微積分**サブメニューから置換積分を選びます.
3. ダイアログボックスに適切な置換式 $\varphi(u) = g(x)$ を入力します.
4. OK をクリックします.

▶ **微積分 + 置換積分 (置換:** $u = x^3 + 1$)

$\int_{0}^{2} x^5 \sqrt{x^3 + 1} dx = \int_{1}^{9} \frac{1}{3} \sqrt{u}\,(u - 1)\ du$

これにより, 簡単な方法で計算できる積分式になります. 極限値を新しい変数に合うように変更する必要があります.

▶ **定積分での部分分数**

- 有理式を部分分数で置き換える

▶ **微積分 + 部分分数**

$\dfrac{3x^2 + 2x + 4}{(x - 1)^2} = \frac{8}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2} + 3$

つまり

$$\int_{3}^{7} \frac{3x^2 + 2x + 4}{(x - 1)^2} dx = \int_{3}^{7} 3dx + \int_{3}^{7} \frac{9}{(x - 1)^2} dx + \int_{3}^{7} \frac{8}{x - 1} dx = 12 + 3 + 8\ln 3$$

▶ **計算, 数値計算**

$\int_3^7 3dx + \int_3^7 \frac{9}{(x-1)^2} dx + \int_3^7 \frac{8}{x-1} dx = 8\ln 6 - 8\ln 2 + 15 = 23.789$

$\int_3^7 \frac{3x^2+2x+4}{(x-1)^2} dx = 8\ln 6 - 8\ln 2 + 15 = 23.789$

7.6.3　非固有積分

すべての $b \geq a$ に対して非固有積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が存在する場合,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

は, 第一種の非固有積分を定義します. 極限値が存在していれば, 積分は収束すると言いいます.

▶ **第一種の非固有積分を計算する**

- 積分式にマウスカーソルを置き, 計算または数値計算を選びます.

▶ **計算**

$\int_1^\infty x^{-2} dx = 1$　　$\int_1^\infty x^{-1} dx = \infty$　　$\int_0^\infty e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$

$\int_{-\infty}^0 e^{-3x} dx = \infty$　　$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

▶ **数値計算**

$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 1.7725$

積分区間が不連続または定義されていない場所での定積分は, 第二種の非固有積分といいます. 積分区間の内側とその両端で不連続が起こります.

▶ **第二種の非固有積分を計算する**

- 積分式にマウスカーソルを置き, **計算**または**数値計算**を選びます.

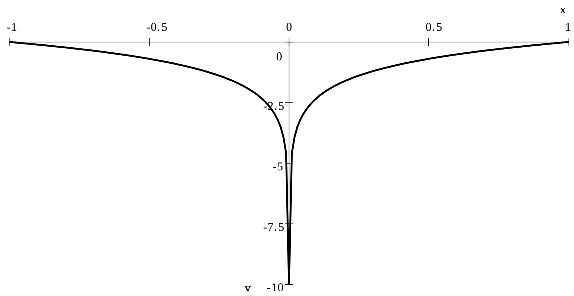
▶ **計算**

$\int_0^1 \ln x dx = -1$

f が c 点で不連続になる場合, $\int_a^c f(x)\,dx$ および $\int_c^b f(x)\,dx$ は収束し, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ となります. どちらかが発散する場合, $\int_a^b f(x)\,dx$ となります.

▶ **計算**

$\int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \infty$　　$\int_{1/2}^3 \frac{dx}{x-1} = \text{undefined}$　　$\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx = -2$



$\ln|x|$

非固有積分を使用する場合には, 適切な結果が求まっているか注意深く見る必要があります. 次の例は, 極限値が不連続にまたがる場合に起こる根本的な問題です. この場合, 不連続であることを認識し, 積分を計算しません.

► **計算**

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^2}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x+1}{(x-\cos x)^2}\, dx$

► **数値計算**

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^2}\, dx = (\text{numeric}) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x+1}{(x-\cos x)^2}\, dx$

しかし, 不定積分では解を持ちます.

► **計算**

$\int \frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^2}\, dx = \frac{4\cos x-4x}{4x^2-8x\cos x+2\cos 2x+2}$

この問題に対する通常のアプローチとしては, 不定積分を計算し, 区間の端点での値を計算します. 次の式

$$\left.\frac{4\cos x - 4x}{4x^2 - 8x\cos x + 2\cos 2x + 2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2\pi}{\pi^2 - 1}$$

は, 解を計算していますが, 間違っています. $x = \cos x$ の時, 関数 $\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^2}$ が定義されていないことに注意しましょう. 非固有積分に関してはこの章の最後にある練習問題でも取り上げます.

7.6.4　変数に仮定条件を付ける

5 章 (109 ページ) で述べたように, 4 つの関数 assume, additionally, about, unassume があります. 微分を行う際に, これらの関数を使用する例を簡単に説明します. 関数 ”assume”は, 指定したまたはすべての変数の条件を設定します. 関数”additionally”は, 同じ変数に条件を追加し, 関数”about”は, 条件情報を取得します. 関数”unassume”は, 変数の条件を消去します.
次のような積分計算の例を考えてみましょう.

► **計算**

$\int_0^1 x^{2n-1} dx = \int_0^1 x^{2n-1}\, dx$

右辺の極限は $n \geq 0$ の場合には存在しますが, $n < 0$ では存在しません. この極値を計算するためには関数 assume を使って n の値に条件を設定する必要があります.

► **計算**

assume(n, positive)

► **計算**

$\int_0^1 x^{2n-1}dx = \frac{1}{2n}$

利用可能な変数の型は, real, complex, integer, positive, negative, nonzero です. これらの仮定は, ローカルでもグローバルでも利用できます. 仮定条件についての詳細は, 109 ページをご覧下さい.

7.6.5　定義式を使って定積分を行う

定義式から定積分を実行する場合は部分計算機能を使って各ステップ毎に計算を行います.

Example 24 関数 f を $f(x)=x^3$ として定義します. 積分 $\int_1^4 f(x)dx$ を次の要領で行います.

1. 定義式を入力します.

$$\int_1^4 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+i\frac{4-1}{n}\right)\frac{4-1}{n}$$

2. 総和記号の右側にある式を選択します.
3. CTRL キーを押した状態で**計算**コマンドと**因数分解**を実行します.
4. 総和記号を含め, その右側の式を選択します.
5. CTRL キーを押した状態で**計算**コマンドと**展開**を実行します. そして式をカッコで囲みます.
6. 数式にカーソルを移動して**計算**コマンドを実行します.

計算の過程を次に示します.

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+i\frac{4-1}{n}\right)\frac{4-1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 3\frac{(n+3i)^3}{n^4}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{189}{2n}+\frac{135}{4n^2}+\frac{255}{4}\right)\\ &= \frac{255}{4}\end{aligned}$$

比較のため, これを直接積分計算してみましょう.

► **計算**

$\displaystyle\int_1^4 f(x)dx = \frac{255}{4}$

7.6.6　リーマン和を描画する

細分化した区間の中点, 左側の点, 右側の点を使ったリーマン和のグラフを描画することができます.

中点矩形を利用する

リーマン和を中点を使って面積を求める場合は次の式を利用します.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{2n}+i\frac{b-a}{n}\right)$$

中点とは積分区間を微少区間に等分割した場合に, 各矩形の上辺の中点を利用するものです.

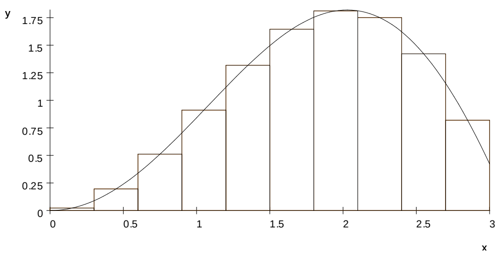
▶ **中点矩形を利用したリーマン和のグラフ**

1. 式 $x \sin x$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分のプロット**を選択します. デフォルトで中点矩形を利用したプロットが作成されます.
3. プロットをクリックしてフレームを選択します. または, プロットをダブルクリックしてビューを選択します.
4. プロパティツール  をクリックし, プロットした数式タブを開きます.
5. プロット範囲ボタンをクリックし, 範囲を編集します. OK ボタンをクリックします.
1. ボックスの数を編集し, OK をクリックします.

次のグラフは, プロット範囲が $0 < x < 3$ で, ボックスの数は 10 です.

▶ **微積分 ＋ 近似積分のプロット, 編集 ＋ プロパティ**

$x \sin x$



関数 $x \sin x$ を 10 のボックスで区間 0 から 3 とした時のリーマン和の近似値は次の通りです.

$$\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}k\right)\sin\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}k\right)=3.1784$$

数値計算コマンドを直接利用した場合は次のようになります.

$$\int_0^3 x \sin x\, dx = 3.111\,1$$

左側矩形を使う

リーマン和を左側の角を使った矩形で求める場合は次の式を利用します.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

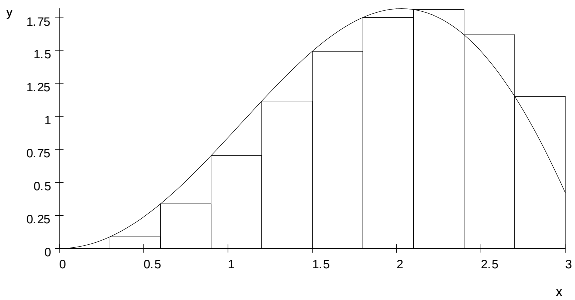
左側の角とは積分区間を微少区間に等分割した場合に, 各矩形の上辺の左角の点を利用するものです.

▶ 左側矩形を利用したリーマン和のグラフをプロットする

1. プロットしたい数式内にマウスカーソルを置きます.
2. **微積分**メニューから, **近似積分のプロット**を選びます. デフォルトの範囲で矩形プロットが表示されます.
3. プロットをクリックして, フレームを選択するか, プロットをダブルクリックしてビューを選択します.
4. プロパティツールボタン  をクリックして, プロットした数式タブを表示します.
5. プロット範囲ボタンをクリックし, 範囲を編集します. OK ボタンをクリックします.
1. 左のボックスにチェックを付け, ボックスの数を編集します. OK ボタンをクリックします.

▶ 微積分 ＋ 近似積分のプロット, 編集 ＋ プロパティ

$x \sin x$



関数 $x \sin x$ を 4 つの四角形で, 区間 $0 \le x \le 3$ とした時のリーマン和の近似値は次の通りです.

$$\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{3}{4}k\right)\sin\left(\frac{3}{4}k\right) = 2.8186$$

右側矩形を使う

リーマン和を右側の角を使った矩形で求める場合は次の式を利用します.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

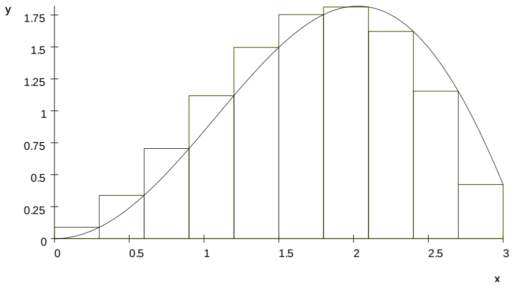
右側の角とは積分区間を微少区間に等分割した場合に, 各矩形の上辺の右角の点を利用するものです.

▶ **右側矩形を利用したリーマン和のグラフをプロットする**

- 中点を利用したプロット, または, 左角矩形のプロットを編集して右側矩形プロットを作成します.

▶ **微積分 ＋ 近似積分のプロット**

$x \sin x$



関数 $x \sin x$ を 4 つの四角形で, 区間 $0 \leq x \leq 3$ とした時のリーマン和の近似値は次の通りです.

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{3}{4} k \right) \sin \left(\frac{3}{4} k \right) = 3.1361$$

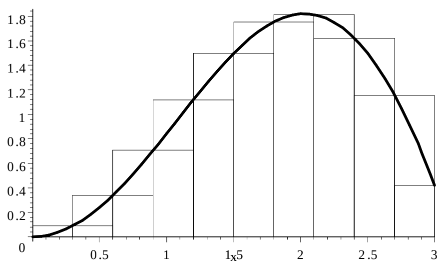
左右の矩形をプロットする

▶ **左右の矩形プロットを作成する**

- 中点, または左側矩形プロットを編集し, 左右の矩形を同時に表示します.

▶ **微積分 ＋ 近似積分のプロット**

$x \sin x$



7.6.7　近似方法

積分の近似計算方法には中点法, 台形法, シンプソン法などがあります. 近似計算を実行する場合は積分式にカーソルを移動して**微積分**サブメニューから**近似計算**を選択します. そしてダイアログから近似計算の方法を選択します.

中点法

一般的に中点法による積分計算 $\int_a^b f(x)dx$ の近似値 M_n は n を微少区間数とした場合,

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{2n} + i\frac{b-a}{n}\right)$$

で与えられ, その時の誤差は

$$\left| M_n - \int_a^b f(x)dx \right| \leq K\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

となります. ここで K はすべての $x \in [a,b]$ に対して $|f''(x)| \leq K$ を満たすものとします.

▶ **中点法を使って式$\int_a^b f(x)\ dx$ の近似値を求める**

1. 式 $\int_a^b f(x)\ dx$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分**を選択します.
3. ダイアログで中点法を選択し, 区間数を入力します.
   または
1. 式 $f(x)$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分**を選択します.
3. ダイアログで中点法を選択し, 区間数を入力します. さらに上限値と下限値を入力します.

ダイアログで区間数を 10 とした時の計算結果を次に示します. プログラムは計算結果を総和記号で出力しますので, さらに**数値計算**コマンドを実行します.

▶ **微積分 + 近似積分 + 中点法, 数値計算**

$\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$ の近似積分 (中点法) は

$$\tfrac{1}{10}\pi\sum_{i_3=0}^{9}\tfrac{1}{10}\pi\left(i_3+\tfrac{1}{2}\right)\sin\tfrac{1}{10}\pi\left(i_3+\tfrac{1}{2}\right) = 3.1545$$

区間数を 10, 下限を 0, 上限を 3.14159 としたときの計算例を次に示します.

▶ **微積分 + 近似積分 + 中点法, 計算**

$x\sin x$ の近似積分 (中点法) は

$$0.314\,16\sum_{i_4=0}^{9}(0.314\,16i_4+0.157\,08)\sin(0.314\,16i_4+0.157\,08) = 3.1545$$

直接計算した時の値と, 上記の値を比較してみましょう.

▶ **計算, 数値計算**

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \pi \qquad \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 3.1416$$

左右の矩形

普通, 区間数 n の左側矩形を利用した $\int_a^b f(x)dx$ に対する近似値 L_n は次のように記述します.

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

同じように, 区間数 n の右側矩形を利用した $\int_a^b f(x)dx$ に対する近似値 R_n は次のように記述します.

$$\int_a^b f(x)dx \approx R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

► **左側 [右側] 矩形を使って $\int_a^b f(x)\ dx$ を計算する**

1. 式 $\int_a^b f(x)\ dx$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分**を選択します.
3. ダイアログで左側 [右側] 矩形を選択し, 区間数を入力します.
   または
1. 式 $f(x)$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分**を選択します.
3. ダイアログで左側 [右側] 矩形を選択し, 区間数を入力します. さらに上限値と下限値を入力します.

ダイアログで区間数を 10 とした時の計算結果を次に示します. プログラムは計算結果を総和記号で出力しますので, さらに**数値計算**コマンドを実行します.

► **微積分 + 近似積分 + 左側矩形, 数値計算**

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$ の近似積分 (左側矩形) は

$$\tfrac{1}{20}\pi \sum_{i_5=0}^{9} \tfrac{1}{20}\pi i_5 \sin \tfrac{1}{20}\pi i_5 = 0.87869$$

► **微積分 + 近似積分 + 右側矩形, 数値計算**

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$ の近似積分 (右側矩形) は

$$\tfrac{1}{20}\pi \sum_{i_6=1}^{10} \tfrac{1}{20}\pi i_6 \sin \tfrac{1}{20}\pi i_6 = 1.1254$$

区間数を 10, 下限を 0, 上限を 1.5708 としたときの計算例を次に示します.

► **微積分 + 近似積分 + 左側矩形, 数値計算**

$x \sin x$ の近似積分 (左側矩形) は

$$0.15708 \sum_{i_7=0}^{9} 0.15708 i_7 \sin 0.15708 i_7 = 0.87869$$

▶ **微積分 ＋ 近似積分 ＋ 右側矩形, 数値計算**

$x\sin x$ の近似積分 (右側矩形) は

$0.157\,08\sum_{i_8=1}^{10} 0.157\,08 i_8 \sin 0.157\,08 i_8 = 1.125\,4$

台形法

台形法による近似積分 T_n は次の式で与えられます.

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)+f(b)\right)$$

その時の誤差は

$$\left|T_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leq K\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

となります. ここで K はすべての $x \in [a,b]$ に対して $|f''(x)| \leq K$ を満たすものとします.

▶ **台形法を使って式$\int_0^\pi x\sin x\,dx$ の近似値を求める**

1. 式 $\int_0^\pi x\sin x\,dx$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分**を選択します.
3. ダイアログで台形法を選択し, 区間数を入力します.
   または
1. 式 $f(x)$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分**を選択します.
3. ダイアログで台形法を選択し, 区間数を入力します. さらに上限値と下限値を入力します.

ダイアログで区間数を 10 とした時の計算結果を次に示します.

▶ **微積分 ＋ 近似積分 ＋ 台形法, 数値計算**

$\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$ の近似積分 (台形法) は

$$\tfrac{1}{10}\pi\sum_{i_9=1}^{9}\tfrac{1}{10}\pi i_9 \sin\tfrac{1}{10}\pi i_9 = 3.115\,7$$

区間数を 10, 下限を 0, 上限を 3.14159 としたときの計算例を次に示します.

▶ **微積分 ＋ 近似積分 ＋ 台形法, 数値計算**

$x\sin x$ の近似積分 (台形法) は

$$0.314\,16\sum_{i_{10}=1}^{9} 0.314\,16 i_{10}\sin 0.314\,16 i_{10} + 1.309\,5\times 10^{-6} = 3.115\,7$$

シンプソン法

任意の関数 f に対するシンプソン法による近似積分 S_n (n は正の偶数とする) は次の式で与えられます.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n$$
$$= \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f\left(a + (2i-1)\frac{b-a}{n}\right)\right.$$
$$\left. +2\sum_{i=1}^{-1+n/2} f\left(a + 2i\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

シンプソン法の誤差は

$$\left|S_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le K\frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

となります．ここで K はすべての $x \in [a,b]$ に対して $\left|f^{(4)}(x)\right| \le K$ を満たすものとします．シンプソン法は 3 次までの多項式の積分計算に優れた値を示します．なぜなら, 4 次の導関数は基本的にゼロになってしまうからです.

▶ **シンプソン法を使って式$\int_a^b f(x)\ dx$ の近似値を求める**

1. 式 $\int_a^b f(x)\ dx$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分**を選択します.
3. ダイアログでシンプソン法を選択し, 区間数を入力します.

   または

1. 式 $f(x)$ にカーソルを移動します.
2. **微積分**サブメニューから**近似積分**を選択します.
3. ダイアログでシンプソン法を選択し, 区間数を入力します．さらに上限値と下限値を入力します.

ダイアログで区間数を 10 とした時の計算結果を次に示します.

▶ **微積分 ＋ 近似積分 ＋ シンプソン法, 数値計算**

$\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$ の近似積分 (シンプソン法) は

$$\tfrac{1}{30}\pi\left(2\sum_{i_{11}=1}^{4}\tfrac{1}{5}\pi i_{11}\sin\tfrac{1}{5}\pi i_{11} + 4\sum_{i_{11}=1}^{5}\tfrac{1}{10}\pi\,(2i_{11}-1)\sin\tfrac{1}{10}\pi\,(2i_{11}-1)\right)$$
$$= 3.1418$$

区間数を 10, 下限を 0, 上限を 3.14159 としたときの計算例を次に示します.

▶ **微積分 ＋ 近似積分 ＋ シンプソン法, 数値計算**

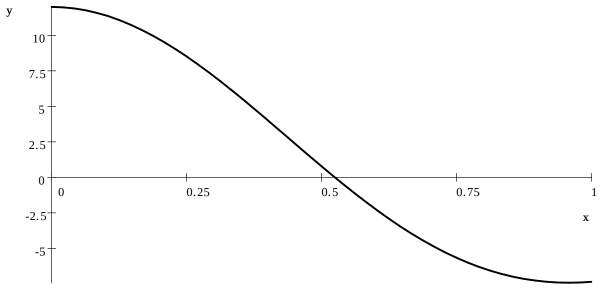
$x\sin x$ の近似積分 (シンプソン法) は

$$0.209\,44\sum_{i_{12}=1}^{4} 0.628\,32 i_{12}\sin 0.628\,32 i_{12}$$
$$+0.418\,88\sum_{i_{12}=1}^{5}(0.628\,32 i_{12} - 0.314\,16)\sin(0.628\,32 i_{12} - 0.314\,16)$$
$$+8.729\,9\times 10^{-7} = 3.141\,8$$

Example 25 誤差が 10^{-5} 以下である式 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ の近似値をシンプソン法で求める場合の区間数を求めてください．この時, 区間 $[0,1]$ で 4 次の導関数 e^{-x^2} の上限を見つける必要があります．このためには区間 $[0,1]$ で 4 次の導関数をプロットします．最初に $f(x)=e^{-x^2}$ を定義します．数式 $f^{(4)}(x)$ は次のようになります．

$$f^{(4)}(x) = 12e^{-x^2} - 48x^2e^{-x^2} + 16x^4e^{-x^2}$$

数式にマウスカーソルを置き, **2D プロット** + **直交座標**を選びます．



グラフからも分かるように導関数 $f^{(4)}(x)$ は $f^{(4)}(0)=12$ で最大値をとります．これを誤差の不等式に入力します．

$$12\frac{(1-0)^5}{180n^4} \le 10^{-5}$$

これを解きます．

$$\left\{n \le -\frac{10}{3}\sqrt{3}\sqrt[4]{6}\right\}, \{n=0\}, \left\{\frac{10}{3}\sqrt{3}\sqrt[4]{6} \le n\right\}$$

n は正の偶数ですから, $n \ge \frac{10}{3}\sqrt{3}\sqrt[4]{6} = 9.036$, 従って $n=10$ となります．

$$S_{10} \approx \frac{1}{30} + \frac{1}{30}e^{-1} + \frac{2}{15}\sum_{i=1}^{5} e^{-\left(\frac{1}{5}i-\frac{1}{10}\right)^2} + \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{4} e^{-\frac{1}{25}i^2} = 0.7468249483$$

数値計算コマンドを使って直接計算します．

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.7468241328$$

よって

$$|0.7468241328 - 0.7468249483| = 8.155 \times 10^{-7} < 10^{-5}$$

7.6.8　数値積分

積分計算の中には $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ や $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt$ のように正確な計算を行えないものが存在します．このような場合は**数値計算**コマンドを使ってその近似値を求めます．設定の変更と近似の関係に関する詳細は 28 ページを参照してください．

► **数値計算**

$\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.7468241328 \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt = 1.851937052$

曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの曲線の長さは次式で与えられます.

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

例えば, 曲線 $f(x) = x\sin x$ や $f'(x) = \sin x + x\cos x$ で考えると, $x = 0$ から $x = \pi$ までの曲線の長さは**数値計算**コマンドで近似値を算出できます. 曲線の長さを求める積分計算を正確に行うことはできない場合は, このようにして計算します.

► **計算, 数値計算**

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (\sin x + x\cos x)^2}dx = 5.04040692$

2D や 3D 空間の曲線はパラメータを使って表現します. 次の式は, $0 \le \theta \le 2\pi$ の範囲で螺旋上の曲線 $(\cos\theta, \sin\theta, \theta)$ を示します.

► **関数定義 ＋ 新しい定義**

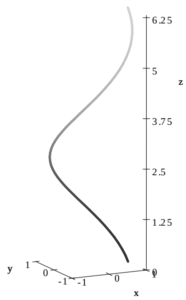
$x = \cos\theta \qquad y = \sin\theta \qquad z = \theta$

► **数値計算**

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 8.8858$

► **3D プロット ＋ 直交座標**

$(\cos\theta, \sin\theta, \theta)$



$(\cos\theta, \sin\theta, \theta)$

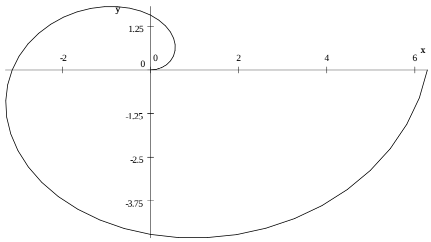
極座標では, 円弧の長さは積分で与えられます.

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

次は, $r = \theta$ を $0 \le \theta \le 6.2832$ の範囲でプロットしたものです.

► **2D プロット ＋ 極座標**

θ (プロット範囲 $0 \le \theta \le 6.2832$)



▶　**関数定義 ＋ 新しい定義**

$r = \theta$

▶　**計算, 数値計算**

$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right) = 21.256\,294\,15$

7.6.9　回転体のビジュアライズ

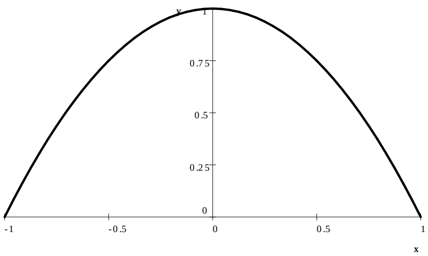
回転体をビジュアライズすることによって体積や面積を視覚的に理解できます.

直交座標

曲線 $y = 1 - x^2$ を x 軸を中心に回転させ, その回転体を作成する方法を示します.

▶　**2D プロット ＋ 直交座標**

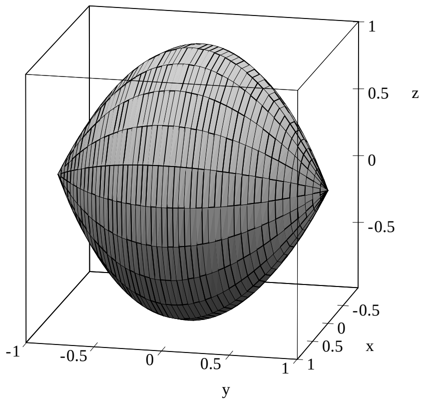
$1 - x^2$



環プロットのコマンドを利用して平面を立体化します.

▶　**3D プロット ＋ 環 (半径: $1 - x^2$)**

$(0, x, 0)$



次の式を積分することによって体積を求めることができます.

$$\int_{-1}^{1} \pi y^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 \, dx$$

► **計算**

$\pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 \, dx = \frac{16}{15}\pi$

曲面の面積は次のように計算します.

$$\int 2\pi y \, ds = 2\pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\left(1 - x^2\right)\right)^2} dx$$

► **計算**

$2\pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\left(1 - x^2\right)\right)^2} dx = 2\pi \left(\frac{7}{16}\sqrt{5} - \frac{17}{32} \ln\left(-2 + \sqrt{5}\right)\right)$

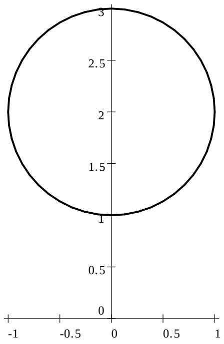
► **数値計算**

$2\pi \left(\frac{7}{16}\sqrt{5} - \frac{17}{32} \ln\left(-2 + \sqrt{5}\right)\right) = 10.965\,484\,66$

次に円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ を x 軸を中心に回転させ, その回転体を作成する方法を示します. 最初に円をプロットします.

► 2D **プロット** + **直交座標**

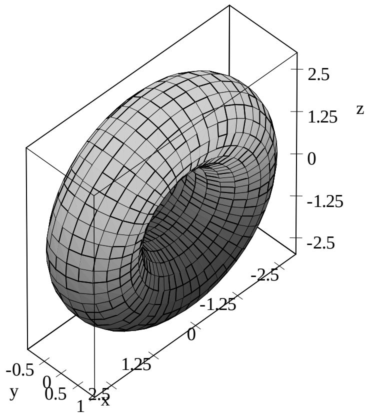
$(\cos t, 2 + \sin t)$



環プロットのコマンドを使って $(2\cos t, 0, 2\sin t)$ をプロットします. 半径は 1 とします.

▶ **3D プロット ＋ 環 (半径: 1)**

$(2\cos t, 0,$



体積を微分した式は $(2\pi y)\,2x\,dy$ となりますから, 体積は次の積分式となります.

$$4\pi\int_1^3 y\sqrt{1-(y-2)^2}\,dy$$

▶ **計算**

$4\pi\int_1^3 y\sqrt{1-(y-2)^2}\,dy = 4\pi^2$

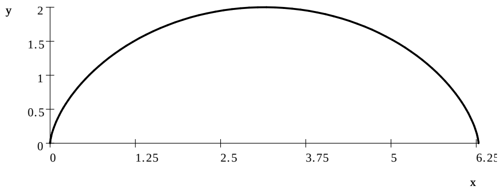
計算結果 $4\pi^2$ は, 面積 π の断面を距離 4π だけ回転させたものであることを示しています.

パラメトリック方程式

x 軸と式 $x = t + \sin t$, $y = 1 - \cos t$ で示される曲線で囲まれた部分を回転させた回転体の体積を求める方法を示します.

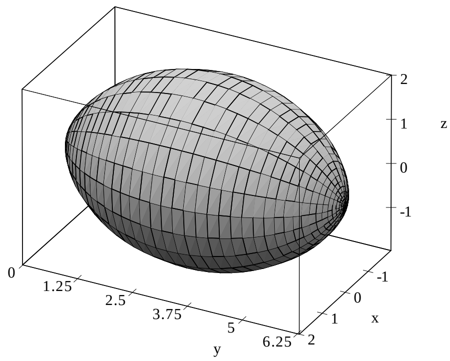
▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

$(t - \sin t, 1 - \cos t)$



環プロットコマンドを使って回転体をビジュアライズします.

▶ **3D プロット ＋ 環 (半径: $1 - \cot t$)**
$(0, t - \sin t, 0)$



回転体の体積を示す式は $\pi y^2\, dx$ となりますので, 体積は次のようになります.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \pi y^2\, dx &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t)\ dt \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\ dt\end{aligned}$$

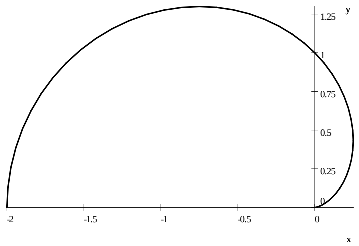
▶ **計算**
$\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\ dt = 5\pi^2$

極座標

曲線 $r = 1 - \cos\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$ を x 軸を中心に回転させた体積を求める場合に，まず，$x = r\cos\theta = (1 - \cos\theta)\cos\theta$ および $y = r\sin\theta = (1 - \cos\theta)\sin\theta$ とします．

▶　**2D プロット ＋ 極座標**

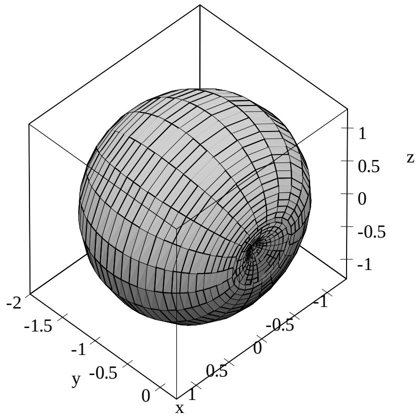
$1 - \cos\theta$



環プロットコマンドを使って回転体をビジュアライズします．

▶　**3D プロ**

$(0, (1 - \cos$



7.7　数列と級数

数列とは無限に続く数値列であり，級数とは数列の各項の和と考えることができます．

7.7.1　数列

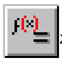
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は定義域を正の整数とする関数です．数列の極限値を求める場合は，式 $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を選択し，**計算**コマンドを実行します．または，a_n を定義して $\lim_{n\to\infty} a_n$ に対して**計算**コマンドを実行します．

▶ **計算**

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

数列の各項は関数値として定義できます．この時, 下付き文字を関数の引数とします．下付き文字を引数に利用する方法の詳細は 104 ページを参照してください.

▶ **数列 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を定義する**

1. 式 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ にカーソルを移動します．そして**関数定義** + **新しい定義**とします．または をクリックします.
2. 添え字の定義ダイアログが表示されたら, **関数の引数**という項目を選択します.OK ボタンをクリックします.

▶ **計算**

$\lim_{n\to\infty} a_n = e$

▶ **級数のいくつかの項を計算する**

1. 数式にマウスカーソルを置き, seq と入力します．(自動的に灰色になります.)
2. $n = 1..4$ のような形式で, サブスクリプトに項の数を入力します．$\mathrm{seq}_{n=1..4}$ のようになります.
3. 一般式を入力し, 計算します.

▶ **計算**

$\mathrm{seq}_{n=1..4}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}$

$\mathrm{seq}_{n=1..4}\left(\left(1.0+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 2.0, 2.25, 2.3704, 2.4414$

$\mathrm{seq}_{x=1..5}\cos x = \cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5$

数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ をグラフに表示する場合は, 式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ をプロットします．ただし, n を整数とします.

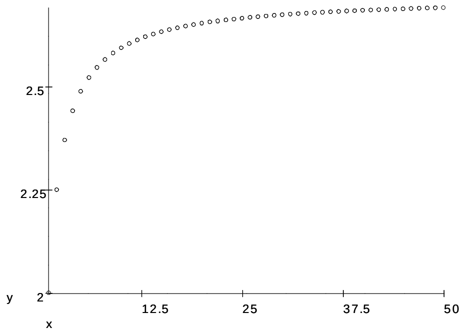
▶ **2D プロット + 直交座標**

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ をプロットしたものが上図です．プロットした画像の数式情報タブを使ってプロットスタイルを点, シンボルを円, プロット範囲を 1 から 50, サンプル数を 50 に設定します.

このプロットから $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7$ であることが分かります．実際, 数式に**計算**コマンドを実行すると e となり, **数値計算**コマンドでは $e = 2.718281828$ となります.

Note　有限数列に関する詳細は 31 ページを参照してください.



7.7.2 級数

級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の部分和は有限数列の和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ として表せます．一般的に，これらの部分和は数列 $\{s_n\}$ となります．今，$\lim_{n\to\infty} s_n = s$ が求まれば，s は級数の総和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ と言えます．級数の総和を求める場合は，カーソルを級数の数式に移動して，**計算**コマンドを実行します．数式 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の入力方法は 51 ページを参照してください．

▶ 計算

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.99)^n = 99.0 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{20^n}{n!} = e^{20}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi$$

級数によっては，その計算結果が明確でない場合があります．例えば $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\pi$ や $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ などの計算例がそれに該当します．実際，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\pi$ の計算を実行すると“計算できません” や “十分な情報がありません” というメッセージが表示されます．これらの級数やゼータ関数 $\zeta(\cdot)$ を計算する場合は数値解を求める方法を選択してください．

▶ **数値計算**

$$\zeta(3) = 1.202056903 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.202056903$$

例えば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ のような級数の和を求める場合は，始めに，式 $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ を入力します．次に**関数定義**サブメニューから**新しい定義**を選択します．下付き文字の設定に関するダイアログでは関数の**引数**を選択します．

▶ **関数定義 ＋ 新しい定義 (関数の引数)**

$a_n = \frac{n^2}{2^n}$

▶ **計算**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$

比判定法

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ はその絶対値 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束する場合は, やはり収束します. 比判定法は次の式が成り立つ時に級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束するというものです.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$$

比判定法を使って級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ の収束を調べる場合は, 最初に $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ を定義します.

► **計算**

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$

ここで $L = 1/2$ となり, 1 よりも小さな値となります. 従って級数は収束します.

乗根判定法

乗根判定法は次の式が成り立つとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するというものです.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$$

乗根定法を使って級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ の収束を調べる場合は, 最初に $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ を定義します.

► **計算**

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$

ここで $L = \frac{1}{2}$ となり, 1 よりも小さな値となります. 従って級数は収束します.

積分判定法

積分判定法は正の整数 n に対して $f(n) = |a_n|$ を満たし, 次の式が成り立つとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するというものです.

$$\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$$

積分判定法を使って級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ の収束を調べる場合は, 最初に $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ を定義します.

► **計算, 数値計算**

$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{2^x}dx = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^3 2} = 5.805497209$

この積分式は有限です. $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ とした場合, $f(1) < f(2) < f(3)$ となりますが, 関数 f は $x > 3$ で連続減少します. 実際,

$$f'(x) = 2\frac{x}{2^x} - \frac{x^2}{2^x}\ln 2$$

は区間 $0 < x < \frac{2}{\ln 2} = 2.885390082$ でのみ正です. つまり, f は $3 < x < \infty$ で減少します. 級数の収束は上限値に依存しますので, 級数が連続減少することが分かれば十分です.

マクローリン級数

関数 f のマクローリン級数は次の通りです.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ここで $f^{(n)}(0)$ は f の n 次微分式に 0 を代入したものです. $x=0$ におけるベキ乗です.

▶ **関数 $f(x)$ をマクローリン級数に展開する**

1. 関数 $f(x)$ にマウスカーソルを置きます.
2. ベキ級数を選択します.
3. 項数を指定します.
4. 変数 x を指定します.
5. OK ボタンをクリックします.

関数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ で項を 10 とした時の例を次に示します.

▶ **ベキ級数**

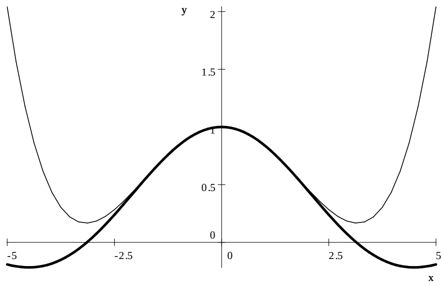
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^8 + O\left(x^9\right)$$

$O\left(x^9\right)$ は展開した級数の中で x^9 の項を含むものを集めたものです. 実際, この例では x^{10} の項は丸め誤差の範囲に入ってしまいます. x の奇数乗の項は係数 0 となっています.

2D プロット コマンドで元の関数とマクローリン展開した多項式を比べると, その違いがよく分かります.

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

$\dfrac{\sin x}{x}$　および　$1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4$



複数のプロットを作成した場合, 曲線の判別する必要があります. その場合は適当な値を代入して**計算**コマンドを実行します. 例えば, $\sin 4/4 = -0.1892006238$ となります. 従って, $\sin x/x$ のグラフは $x=4$ でマイナスの値を取っているプロットだという事が分かります.

マクローリン級数の例をもう少し紹介します.

▶ **ベキ級数 (x のベキ乗展開)**

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + O\left(x^7\right)$
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O\left(x^{10}\right)$
$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 + O\left(x^7\right)$
計算結果は普通にコピーと貼り付けコマンドで, 他の計算に利用できます. 実際, $+O\left(x^n\right)$ の項を削除すれば, 多項式として簡単に利用できます. 関数 e^x のマクローリン級数と $\sin x$ のマクローリン級数の互いの最初の数項を掛けた時の値は, 関数 $e^x \sin x$ のマクローリン級数の値と同じものになります. 実際の計算例を次に示します.

► **展開, 多項式 ＋ 並べ替え**
$\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\right) = \frac{1}{14\,400}x^{10} + \frac{1}{2880}x^9 - \frac{1}{360}x^7 - \frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$

テイラー級数

マクローリン級数はテイラー級数の特殊なケースです. 関数 f のテイラー級数は $x = a$ で次の式を展開したものです.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

この級数は $x - a$ のベキ乗に展開されます.

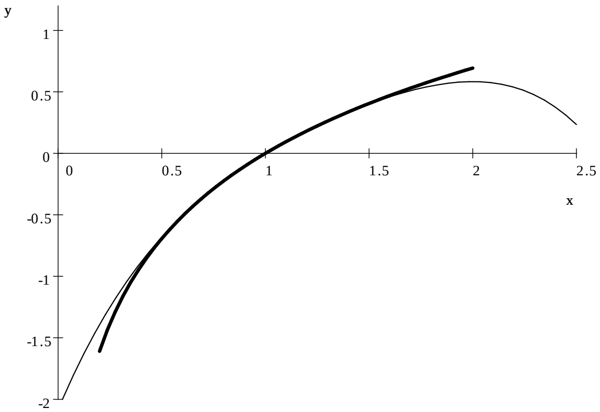
► **関数 $f(x)$ をテイラー級数で展開する**

1. 関数 $f(x)$ にマウスカーソルを置きます.
2. ベキ級数コマンドを選びます.
3. 項数を指定します.
4. $x - a$ のベキ乗展開を入力します.
5. OK をクリックします.

テイラー級数の場合, ダイアログボックスに項の数と展開する点を入力します. 関数 $\ln x$ の $x = 1$ におけるテイラー展開は, ベキ級数のコマンドを使います. ここでは点 $x - 1$ でテイラー展開した例を示します.

► **ベキ級数**
$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + O\left((x-1)^5\right)$
関数 $\ln x$ と多項式 $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$ を比較したプロットを次に示します. 点 $x = 1$ の近傍では多項式が $\ln x$ に大変良く近似している様子が分かります.

► **2D プロット ＋ 直交座標**
$\ln x$　および　$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$



7.8 多変数の微積分

多変数の微積分とは微積分の考え方を複数の変数を持つ関数に応用したものです. 始めに, 最適化を例に, その実行方法を紹介します. 1 変数の微積分で述べた**数式処理**メニューコマンドを使って, 多変数の関数の微積分でも簡単に行うことができます. 最初に, 微分に関しての多くの考え方がある最適化の方法を見て, 次に, 簡単に 2 変数のテイラー多項式および全微分について考えてみます. そして, 累次積分で操作を行う一般的な方法について述べます.

7.8.1 最適化

複数の変数を持つ関数に対して最適化を実行する場合には技術的な工夫が必要です. ここでは, 偏微分値がゼロになる 2 つの項を利用する方法を利用します. この他にもラグランジュの乗数法 (参照 277 ページ) と**微積分** + **極値を探す**コマンド (参照 277 ページ) を利用する方法があります.

曲面の極値を求める

関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めます. 従って, 関数の偏微分式の値がゼロとなるすべての座標 (x,y) を求めることになります. 実数解だけが適切ですので, 変数を実数とする仮定を使います.

▶ **計算**

$\mathrm{assume}\,(\mathrm{real}) = \mathrm{real}$

▶ **関数定義** + **新しい定義**

$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$

▶ **求解** + **解**

$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0$

$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0$, 解: $[x=1,y=1],[x=0,y=0]$

実数解は $(0,0)$ と $(1,1)$ だけです. これらの極値の性質は 2 階微分することによって明らかになり

ます.

$$\left[D_{xx}f(x,y)D_{yy}f(x,y)-(D_{xy}f(x,y))^2\right]_{x=0,y=0}=-9<0$$

従って $(0,0)$ は鞍点であり,

$$\left[D_{xx}f(x,y)D_{yy}f(x,y)-(D_{xy}f(x,y))^2\right]_{x=1,y=1}=27>0$$

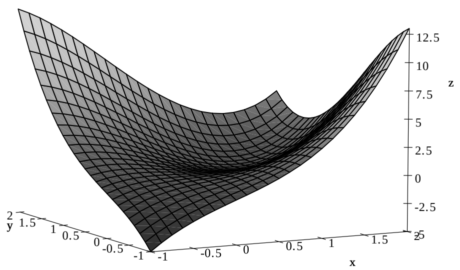
$$\text{および}\qquad [D_{xx}f(x,y)]_{x=1,y=1}=6>0$$

$(1,1)$ が極小値の座標となります.

点 $(1,1)$ における極小値の様子をプロットする事ができます. 式 $x^3-3xy+y^3$ にカーソルを移動し, をクリックします. そして, プロットプロパティダイアログの数式情報タブでプロット範囲を $-1\le x\le 2$ および $-1\le y\le 2$ とします. 曲面スタイルは**色で塗る**, メッシュに**等高線**を選択します. また, 軸タブで種類を**フレーム**にします.

▶ **3D プロット ＋ 直交座標**

$x^3-3xy+y^3$

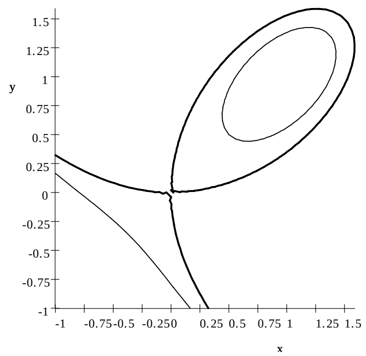


等高線 $x^3-3xy+y^3=0$ は点 $(0,0,0)$ を通過します. この曲線の表示を良くするために, $x^3-3xy+y^3=0$ の 2D プロットを作成し, 曲線 $x^3-3xy+y^3=-0.5$ をプロットに追加します.

▶ **2D プロット ＋ 陰関数**

$x^3-3xy+y^3=0$

- $x^3-3xy+y^3=-0.5$ を記述し, フレームにドラッグします.



太い線は, z が 0 の位置での等高線となっており, 細い線は, -0.5 の位置での等高線となっています. このビューは, z 値が正である場所と負である場所を表示します. 曲面 $z = x^3 - 3xy + y^3$ の z 値はループの中, および xy 平面の第一象限の左下角付近でマイナスになっています.
関数 $x^3 - 3xy + y^3$ の微分式から極値を求める場合は**微積分**メニューを利用することもできます.
一般的に, **極値を探す**コマンドを実行するほど, 変数の数が減り, 最終的に一変数の問題となります. 複数の変数が存在する場合は, このコマンドと他のコマンドを適切に応用する必要があります.
極値を探すコマンドの使用例を次に示します. 数値解を求める場合は, 小数点形式で係数を記述します.

▶ **計算**
$\text{assume}\,(\text{real}) = \text{real}$

▶ **微積分 + 極値を探す (極値を求める目的変数:** y**)**
$x^3 - 3xy + y^3$
極値: $\left\{x^3 - 2x^{\frac{3}{2}}, x^3 + 2x^{\frac{3}{2}}\right\}$, この時 $\{[y = \sqrt{x}], [y = -\sqrt{x}]\}$
$y = \pm\sqrt{x}$ の時, 式 $x^3 - 3xy + y^3$ は $x^3 \mp 2x^{\frac{3}{2}}$ となります. これら数式の極値を求める場合, 同じ手法を繰返し用います.

▶ **微積分 + 極値を探す**
$x^3 - 2x^{\frac{3}{2}}$ 極値: $\{-1, 0\}$, この時 $\{[x = 0], [x = 1]\}$
$x^3 + 2x^{\frac{3}{2}}$ 極値: $\{0\}$, この時 $\{[x = 0]\}$
複素数解を無視すると, $y = \sqrt{x}$ は点 $(0, 0)$ と $(1, 1)$ で極値を取り, $y = -\sqrt{x}$ は $(0, 0)$ で極値を取ります. これらの 2 点の性質を調べる場合は, 2 階微分を行います (参照 275 ページ).

ラグランジュの乗数法

付帯条件の付いた最適値を求める場合はラグランジュの乗数法を利用します. 関数 $f(x, y)$ の付帯条件を $g(x, y) = k$ とする時, 次式を満たす全ての x, y, λ を求めることができます.

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

ここで $g(x, y) = k$ であり ∇ は勾配を示す演算子です.

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$$

変数 λ のことをラグランジュの乗数と呼びます.

▶ **和が** 5 **となり, 積が最大となる** x **と**y **のペアを求める**.

1. 関数 $f(x, y) = xy$ と $g(x, y) = x + y$ を定義します.
2. 方程式 $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ を付帯条件 $g(x, y) = 5$ で解きます.

▶ **関数定義 + 新しい定義**
$f(x, y) = xy$ $\qquad$ $g(x, y) = x + y$

▶ **計算**

$$\nabla f(x,y) = \begin{matrix} y \\ x \\ 0 \end{matrix} \qquad \nabla g(x,y) = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

▶ **求解 ＋ 解**

$$\begin{aligned} y &= \lambda \\ x &= \lambda \\ x+y &= 5 \end{aligned} \text{ , 解： } \left[x = \tfrac{5}{2}, y = \tfrac{5}{2}, \lambda = \tfrac{5}{2}\right]$$

最適化問題では目的の範囲内で数値解を求める必要があります.

▶ **計算**

$$\nabla(x+2y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla(ye^x + xe^y) = \begin{pmatrix} e^y + ye^x \\ e^x + xe^y \\ 0 \end{pmatrix}$$

▶ **求解 ＋ 数値解**

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda(ye^x + e^y) \\ 2 &= \lambda(e^x + xe^y) \\ ye^x + xe^y &= 5 \\ x &\in (0,10) \\ y &\in (0,10) \\ \lambda &\in (-5,5) \end{aligned} \text{ , 解： } [x = 1.666\,5, y = 0.450\,56, \lambda = 0.252\,90]$$

これより $f(x,y) = x + 2y$ および $g(x,y) = ye^x + xe^y$ に対して, 以下を与えます.

$$g(1.666\,5, 0.450\,56) = 5.000\,1$$
$$f(1.666\,5, 0.450\,56) = 2.567\,6$$

付帯条件 $g(x,y) = 5$ を満たす関数 $f(x,y)$ の値は, $(1.666\,5, 0.450\,56)$ となります.

7.8.2　2 変数のテイラー多項式

今, z を 2 変数の関数とします. z の点 (a,b) における 2 次のテイラー多項式は次のようになります.

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = {} & z(a,b) + D_x z(a,b)(x-a) + D_y z(a,b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2} D_{xx} z(a,b)(x-a)^2 + D_{xy} z(a,b)(x-a)(y-b) \\ & + \frac{1}{2} D_{yy} z(a,b)(y-b)^2 \end{aligned}$$

▶ **関数 z の点 (a,b) における偏微分を求める**

1. 点 (x, y) における偏微分を求めるために, 式 $\frac{\partial}{\partial x} z(x, y)$, $D_x z(x, y)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y)$, $D_{xy} z(x, y)$ から適当なものを入力します.
2. 点 (a, b) における偏微分を求める場合はカギカッコをつけて, 下付き文字 $x = a, y = b$ を入力します.

計算例を次に示します.

► **計算**

$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right)\right]_{x=1, y=2} = 4$

関数 $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ の点 $(0, 0)$ における 2 次のテイラー多項式の計算方法を次に示します. 最初に関数 $z(x, y)$, を定義して, 次に 2 次のテイラー多項式を計算します.

► **関数定義 + 新しい定義**

$z(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

► **計算**

$z(0, 0) = 1$	$[D_x z(x, y)]_{x=0, y=0} = 0$
$[D_y z(x, y)]_{x=0, y=0} = 0$	$[D_{xx} z(x, y)]_{x=0, y=0} = -2$
$[D_{xy} z(x, y)]_{x=0, y=0} = 0$	$[D_{yy} z(x, y)]_{x=0, y=0} = -2$

2 次のテイラー多項式は

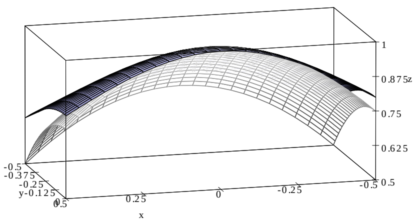
$$T_2(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

となります. これをプロット範囲 $-0.5 \le x \le 0.5$ および $-0.5 \le y \le 0$, 横**回転** 75, 縦回転 75 でプロットしたものを次に示します. 下のプロットからは 2 次のテイラー多項式が関数 z と点 $(0, 0)$ の近傍で重なっていることがはっきり分かります.

► **3D プロット + 直交座標**

$\frac{1}{1+x^2+y^2}$

式 $1 - x^2 - y^2$ をプロットにドラッグします.



7.8.3　全微分

2 変数関数の全微分を計算する場合は, 関数 $u\,(x, y)$ を定義します. そして, 各変数の微分 (du, dx, dy) を**数式名**に登録します. そして次の式に**計算**コマンドを実行します.

$$\mathrm{du} = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\,\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\,\mathrm{dy}$$

3 変数の場合も同様の手順で行います.

► **関数定義 ＋ 新しい定義**
$u\,(x, y) = x^3y^2$

► **関数名** du**,** dx**,** dy **を作成する**

1. **挿入** ＋ **数式名**とします.
2. 数式名のボックスに関数名を入力して OK ボタンをクリックします.

► **計算**
$\mathrm{du} = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\,\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\,\mathrm{dy} = 3x^2y^2\,\mathrm{dx} + 2x^3y\,\mathrm{dy}$

7.8.4　累次積分

累次積分の実行方法について説明します. 仮に $a \le b$, $f(x) \le g(x)$ がすべての区間 $x \in [a, b]$ で成り立ち, 同時に 区間 $x \in [a, b]$ で $k(x, y) \ge 0$ および $y \in [f(x), g(x)]$ ならば, 累次積分は次のようになります.

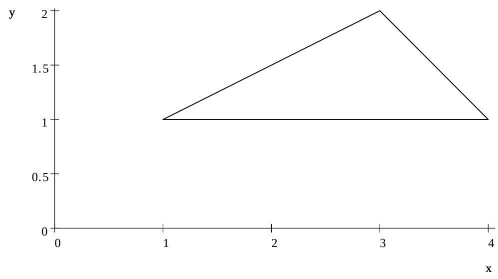
$$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} k(x,y)\,dy\,dx$$

次式で示す空間の体積を示しています.

$$\begin{aligned} &a \le x \le b \\ &f(x) \le y \le g(x) \\ &0 \le z \le k(x,y) \end{aligned}$$

Example 26 曲面 $z = 1 + xy$ の下側にあり, 3 つの頂点 $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(3, 2)$ で示される三角形の上側に存在する部分の面積を求めてください.

1. 3 つの頂点からなる三角形をプロットします.



2. 各辺の方程式を求めます.　$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
   $y = 5 - x$
   $y = 1$
3. 式を x について解きます. 変数を y とします.　$x = 2y - 1$
   $x = 5 - y$
4. 累次積分の式を立て, 計算します.

$$\int_1^2 \int_{2y-1}^{5-y} (1 + xy)\ dx\, dy = \frac{55}{8}$$

空間がパラメトリック曲面として表示されます.

► **積分$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} k(x, y)\, dy\, dx$ を空間の体積として表示する.**

1. 数式 $(x, f(x)(1-s) + g(x)s, k(x, f(x)(1-s) + g(x)s))$ をプロットします.
2. プロットを修正し, プロット範囲を $a \le x \le b$, $0 \le s \le 1$ に設定します.
3. プロットフレームに以下の数式をドラッグします.　$(x, f(x), sk(x, f(x)))$, $(x, g(x), sk(x, g(x)))$, $(a, y, sk(a, y))$, $(b, y, sk(b, y))$
4. プロットを修正し, 4 番目の数式のプロット範囲を $f(a) \le y \le g(a)$, $0 \le s \le 1$, とし, 5 番目の数式のプロット範囲を $f(b) \le y \le g(b)$, $0 \le s \le 1$ に設定します.

以下では, 積分 $\int_1^2 \int_{2y-1}^{5-y} (1 + xy)\ dx\, dy$ を表示するために x, y-座標を置き換えています. この体積は 2 つの視点から表示されています.

► **3D プロット ＋ 直交座標 (範囲: $0 \le s \le 1$, $1 \le x \le 4$, $1 \le y \le 2$)**

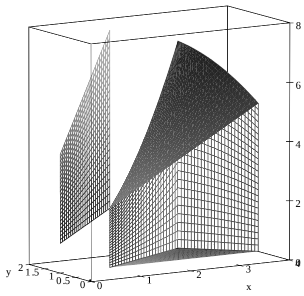
$((5-y)(1-s) + (2y-1)s, y, 1 + y((5-y)(1-s) + (2y-1)s))$

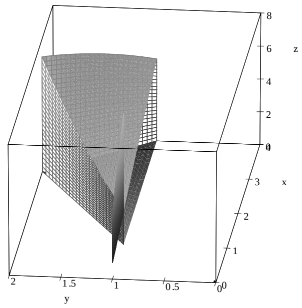
$(2y-1, y, s(1 + y(2y-1)))$

$(5-y, y, s(1 + y(5-y)))$

$(x, 1, s(1+x))$

4 番目の数式のプロット範囲を $1 \le x \le 4$, $0 \le s \le 1$ に変更し, プロットを修正します.





累次積分の例を次に示します.

► **計算, 数値計算**

$$\int_0^1 \int_0^x x^2 \cos y \, dy \, dx \quad = \cos 1 + 2 \sin 1 - 2 \quad = 0.22324$$

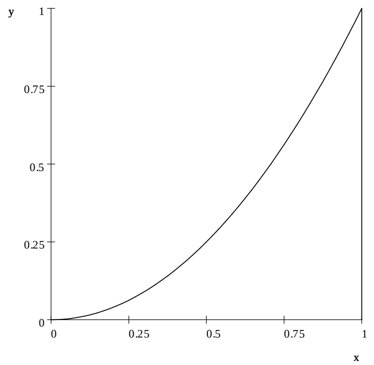
$$\int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2} \, dy \, dx \quad = \tfrac{1}{6} e^9 - \tfrac{1}{6} \quad = 1350.3$$

2 行目と 3 行目は積分の順番を逆にしたものです. 積分の順番を逆にする例を次に示します.

Example 27 2 重積分の計算

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} \, dx \, dy$$

この計算は面倒です. しかし, 積分区間を平面上でよく観察すると, 積分の範囲を逆転できることがわかります.



目的の範囲は上方を $y = x^2$ で, 下方を $y = 0$ で囲まれています. これで, 数式を書き換えると,

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1} \, dy \, dx$$

となります. この式は累次積分のコマンドで解くことができます. 実際, 内側の積分は次のように

なります.

$$\int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\,dy = x^2\sqrt{x^3+1}$$

次に外側の積分計算 $\int_0^1 \sqrt{(x^3+1)}x^2\,dx$ を**微積分**サブメニューの**置換積分**コマンドで計算します. ここで $u^2 = x^3+1$ とします. そして**計算**コマンドと**数値計算**コマンドを使います.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{(x^3+1)}x^2\,dx &= \int_1^2 \frac{1}{3}\sqrt{u}\,du \\ &= \frac{4}{9}\sqrt{2} - \frac{2}{9} \\ &= 0.4063171388\end{aligned}$$

2 重または 3 重の不定積分を行う場合は, 累次積分と重積分の記号のどちらを使ってもかまいません. 1 回の積分計算と同じように, 不定積分の場合は計算結果に任意の定数を記述できます. 例えば, 2 重積分 $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ に対しては $\varphi(x)+\psi(y)$, 3 重積分 $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ の場合は $\varphi(x,y)+\psi(y,z)+\lambda(x,z)$ のように “任意の関数” を追加で記述できます.

▶ 2 重または 3 重積分の入力と計算

1. **挿入** + **オペレータ**とするか, または  をクリックします.
2. 2 重または 3 重の積分記号を選択し, OK ボタンをクリックします.
3. 関数を入力します.
4. カーソルを積分式に移動して, **計算**コマンドを選択します.
5. 2 重積分については $\varphi(x)+\psi(y)$, 3 重積分については $\varphi(x,y)+\psi(y,z)+\lambda(x,z)$ という形で任意の関数を追加します.

▶ 計算コマンドを実行し, 任意の関数を追加する

$\iint xy\,dx\,dy = \frac{1}{4}x^2y^2 + \varphi(x)+\psi(y)$

$\iint x\sin x\cos y\,dx\,dy = (\sin x - x\cos x)\sin y + \varphi(x)+\psi(y)$

$\iiint xy^2z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{12}x^2y^3z^2 + \varphi(x,y)+\psi(y,z)+\lambda(x,z)$

7.9　練習問題

1. 微分の定義式を使って式 $\frac{d}{dx}\left(x^8\right) = 8x^7$ を確認してください. 定義式の演算には**展開**や**簡単化**などのコマンドを利用します.
2. 関数 $f(x) = x^2+1$ でニュートン法を使って近似値を求めてください. $x_0 = 0.5$ とします.
3. 次式の異なる 2 点に接する接線の方程式を求めなさい.

$$f(x) = x(x-1)(x-3)(x-6)$$

4. 区間 $0 < k < 1$ において楕円関数

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k \sin^2 t} dt$$

の計算を行うことはできません. そこで, 級数を代用して積分計算 E を行い, 誤差を確認してください.

5. 式 $x^y = y^x$ を満たすべての解を求めてください. ただし, x と y は異なる値を持つ正の整数とします.

6. 動脈中を流れる血液の速度はその中心で一番早く, 壁面近くで摩擦により遅くなります. 血液の速度は式 $v(r) = \alpha(R^2 - r^2)$ で与えられ, α は定数, R は血管の半径, r は中心からの距離を示します.
血管中を流れる血液の積分式を作成してください. そして, 血管の半径が半分になると, 血液の量が元の $\frac{1}{16}$ になることを示してください.

7. 速度 v で移動する静止質量 m_0 の物質の質量は

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

で与えられます. c は光速です. マクローリン級数の展開式を使って速度が遅い時の質量の増分を示してください.

8. 式 $\int 2^x \cos bx dx$ を計算し, 答えを簡単化してください.

9. 式 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \sin x}{(x - \cos x)^2} dx$ を計算してください.

10. 式 $\lim_{h \to 0^+} \int_0^\infty \sin(x^{1+h})\, dx$ を計算してください.

11. 微積分の基本定理から閉区間 $[a, b]$ で f が連続である場合,
   a. g を区間 $x \in [a, b]$ で $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ と定義すると, $g'(x) = f(x)$ となり,
   b. F を f の逆微分関数とすると $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ となります.

   3 つの関数 $f(x) = x^3$, $f(x) = xe^x$, $f(x) = \sin^2 x \cos x$ に対して上の基本定理が成り立つことを示してください.

12. 2 つの正の数 $a > b$ に対する算術幾何平均はガウスによって次の様に定義されています. $a_0 = a$ および $b_0 = b$ とし, a_n と b_n を利用すると a_{n+1} は a_n と b_n の算術平均となり, b_{n+1} は a_n と b_n の幾何平均となります.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{および} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

数学的帰納法を使って, $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$ であり, $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ はそれぞれ $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$ で, 収束することを示してください.
さらに, 数値 2 と 1 の算術幾何平均を計算してください. 有効数字は 5 桁とします.

13. 範囲 $[0, 1]$ で数値 x と y をランダムに選択したとき, 2 つの数値の平均距離を求めてください.

7.10　練習問題の答え

1. 定義式を利用します.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^8\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^8-x^8}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{8x^7h+28x^6h^2+\cdots+28x^2h^6+8xh^7+h^8}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(8x^7+28x^6h+\cdots+28x^2h^5+8xh^6+h^7\right)\\ &= 8x^7\end{aligned}$$

2. 関数 g を $g(x)=x-f(x)/f'(x)$ と定義し, **微積分**サブメニューから**繰返し計算**を選択します.

$$\begin{bmatrix}0.5\\-0.75\\0.29167\\-1.5684\\-0.4654\\0.84164\end{bmatrix}$$

これでは関数の値の収束点がよく分かりません. この場合は, 関数 f が常に正なのです. つまり, ニュートン法は実在しない点を求めていることになります.

3. 式 y $f'(a)=m$, $f'(b)=m$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m$ を満たす a, b, m を求めます. 3×1 行列に 3 つの式を入力し, **求解**サブメニューから**解**を選択します.

$$\left[a=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}, b=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}, m=-8\right]$$

$$\left[a=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}, b=\frac{1}{2}\sqrt{21}+\frac{5}{2}, m=-8\right]$$

$$\left[a=\frac{1}{2}\sqrt{21}+\frac{5}{2}, b=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}, m=-8\right]$$

$$\left[a=\frac{1}{2}\sqrt{21}+\frac{5}{2}, b=\frac{1}{2}\sqrt{21}+\frac{5}{2}, m=-8\right]$$

$$\left[a=\frac{5}{2}, b=\frac{5}{2}, m=-8\right]$$

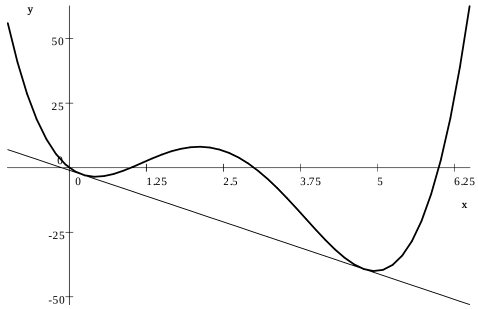
条件 $a\neq b$ を考えますと, 3 つの解は不適切です. 残りの 2 つの解は a と b の条件が合致します. さらに仮定条件 $a<b$ から, 解は $\left[a=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}, b=\frac{1}{2}\sqrt{21}+\frac{5}{2}, m=-8\right]$ となります. 計算して展開すると

$$\begin{aligned}f(a) &= \left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\right)\left(-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\right)\\ &= -21+4\sqrt{21}\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} y &= f(a) + m(x-a) \\ &= -21 + 4\sqrt{21} - 8\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}\right) \\ &= -1 - 8x \end{aligned}$$

2 つの曲線 $x(x-1)(x-3)(x-6)$ と $-1-8x$ をプロットして答えを確認します．定義域を $-1 \le x \le 6.5$ とします．下図のようなプロットが作成されます．



4. 級数展開すると $\sqrt{1-k\sin^2 t} = 1 + \left(-\frac{1}{2}k\right)t^2 + \left(\frac{1}{6}k - \frac{1}{8}k^2\right)t^4 + O\left(t^6\right)$ となります．従って E の近似値は

$$\begin{aligned} E &\approx \int_0^{\pi/2} \left[1 + \left(-\tfrac{1}{2}k\right)t^2 + \left(\tfrac{1}{6}k - \tfrac{1}{8}k^2\right)t^4\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{48}\pi^3 k + \frac{1}{160}\pi^5 \left(\frac{1}{6}k - \frac{1}{8}k^2\right) \end{aligned}$$

誤差を調べます．$k=1$ の時, 近似式で 1.0045 で, 元の式では

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}dt = 1$$

また $k=0$ の時, 近似式で $\frac{1}{2}\pi$, 元の式では

$$\int_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}\pi$$

5. 両辺の自然対数をとると $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ となります．範囲 $1 \le x \le 10$ で $\frac{\ln x}{x}$ をプロットします．そして $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ を解いて極値を求めます．1 から e の間にある整数は 2 で, $2^4 = 4^2$ が成り立ちます．
6. 血液の流れは次式で与えられます．

$$\int_0^R \alpha(R^2 - r^2)2\pi r dr = \frac{1}{2}\alpha\pi R^4$$

ここで R が半分になると, R^4 により血液の量が $\frac{1}{16}$ になります．

7. 級数展開すると

$$m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0+\frac{1}{2c^2}v^2m_0+\frac{3}{8c^4}v^4m_0+O\left(v^5\right)$$

ここで $\frac{v}{c}$ が十分小さいことを考えると

$$m \approx m_0+\frac{1}{2}\frac{m_0}{c^2}v^2$$

となり, 質量の増分は右辺の第 2 項から求められます.

8. **計算**, **簡単化**, カッコの不要な**関数の結合**, **因数分解**, **簡単化**の順番で計算を行ってください.

$$\begin{aligned}\int 2^x\cos bx dx &= \frac{1}{2b^2+2\ln^2 2}\left(b\left(\sin bx\right)2^{x+1}+\left(\cos bx\ln 2\right)2^{x+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(b^2+\ln^2 2\right)^{-1}\left(b\sin bx+\cos bx\ln 2\right)\left(2^{x+1}\right)\\ &= 2^x\frac{b\sin bx+\cos bx\ln 2}{b^2+\ln^2 2}\end{aligned}$$

9. 積分式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\sin x}{\left(x-\cos x\right)^2}dx$$

は非固有積分です. なぜなら $x-\cos x=0$ は $-\pi$ と π の間に解 (≈ 0.73909) を持つからです. **計算**コマンドを実行すると,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{.739}\frac{1+\sin x}{\left(x-\cos x\right)^2}dx &= 7018.2\\ \int_{.7392}^{\pi}\frac{1+\sin x}{\left(x-\cos x\right)^2}dx &= 5201.4\end{aligned}$$

計算結果の表示桁数を 10 にします. 式 $\cos x = x$ を解くと $x = 0.7390851332$ となります. 今度はこの値を使って計算します.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0.73908}\frac{1+\sin x}{\left(x-\cos x\right)^2}dx &= 116400.4055\\ \int_{0.73909}^{\pi}\frac{1+\sin x}{\left(x-\cos x\right)^2}dx &= 122772.6822\end{aligned}$$

よって, この積分計算の値は発散することがわかります.

10. 計算を実行すると

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^{\infty}\sin(x^{1+h})\,dx = 1$$

この結果に問題はありません. なぜなら, 積分 $f(h)=\int_0^{\infty}\sin(x^{1+h})\,dx$ は $h>0$ で収束交代級数で

$$g(y)=\int_0^y \sin x\,dx = 1-\cos y$$

は範囲 0 から 2 の間に存在します. しかも, 平均値は 1 です.

11. 3 つの関数 $f(x) = x^3$, $f(x) = xe^x$, $f(x) = \sin^2 x \cos x$ がそれぞれ (a) と (b) を満たすことを示します.
(a) 関数 g を範囲 $x \in [a, b]$ で $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ ならば, $g'(x) = f(x)$.
(b) F が関数 f の逆微分式ならば $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
$f(x) = x^3$ のとき,

$$g(x) = \int_a^x t^3 dt = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}a^4$$

および

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}a^4\right) = x^3$$

f の逆微分関数は

$$F(x) = \int x^3 dx = \tfrac{1}{4}x^4 + C$$

C は積分定数で,

$$F(b) - F(x) = \left[\tfrac{1}{4}x^4 + C\right]_{x=a}^{x=b} = \tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{4}a^4$$

に対しても同じように

$$\int_a^b x^3 dx = \tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{4}a^4$$

$f(x) = xe^x$ のとき,

$$g(x) = \int_a^x te^t dt = xe^x - e^x - ae^a + e^a$$

そして

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(xe^x - e^x - ae^a + e^a\right) = xe^x$$

f の逆微分式は

$$F(x) = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

微分定数を C とします. よって

$$F(b) - F(x) = \left[xe^x - e^x + C\right]_{x=a}^{x=b} = be^b - e^b - ae^a + e^a$$

次式が成り立ちます.

$$\int_a^b xe^x dx = be^b - e^b - ae^a + e^a$$

ここで $f(x) = \sin^2 x \cos x$ から

$$g(x) = \int_a^x \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin a + \frac{1}{12}\sin 3a - \frac{1}{12}\sin 3x$$

そして

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin a + \frac{1}{12}\sin 3a - \frac{1}{12}\sin 3x\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x \end{aligned}$$

これが $f(x)$ と同じであることを確かめるために, $\sin^2 x \cos x$ に対して, **結合+ 三角関数**を実行した結果は次の通りです.

$$\sin^2 x \cos x = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x$$

f の逆微分式は

$$F(x) = \int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{12}\sin 3x + C$$

微分定数を C とします. よって

$$\begin{aligned} F(b) - F(x) &= \left[\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{12}\sin 3x\right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{1}{4}\sin b - \frac{1}{4}\sin a + \frac{1}{12}\sin 3a - \frac{1}{12}\sin 3b \end{aligned}$$

ただし,

$$\int_a^b \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{4}\sin b - \frac{1}{4}\sin a + \frac{1}{12}\sin 3a - \frac{1}{12}\sin 3b$$

12. 算術幾何平均はすべての n に対して a_n と b_n の間に存在します. 従って, 2 つの数値の有効桁数に応じて, 適切に有効桁数を設定する必要があります.
   - $a_1 = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1.5$ および $b_1 = \sqrt{2*1} = \sqrt{2} = 1.414\,21$
   - $a_2 = \dfrac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1.457\,11$ および $b_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = 1.456\,48$
   - $a_3 = \dfrac{\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4}\sqrt{2} + \dfrac{1}{4}\sqrt{6}\sqrt[4]{2} = 1.456\,79$

     および $b_3 = \sqrt{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{2}}} = 1.456\,79$
13. 平均値は積分計算で求めることができます.　x と y からの距離の平均は式 $\int_0^1\int_0^1 |x-y|\, dy\, dx = \frac{1}{3}$ で与えられます. 計算ステップは次の通りです.

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^1 |x-y|\, dy\, dx &= \int_0^1\int_0^x |x-y|\, dy\, dx + \int_0^1\int_x^1 |x-y|\, dy\, dx \\ &= \int_0^1\int_0^x (x-y)\, dy\, dx + \int_0^1\int_x^1 (y-x)\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

第 8 章

行列と代数

行列は数学だけでなく, 数学に関連する物理, 工学, 経済, 統計の各分野で利用されています. 行列を代数で記述することによってベクトル空間や線形変換の学習モデルを作成することができます.

8.1 はじめに

格子状に記述した四角い式を行列と呼びます. m 個の行と n 個の列を持つ行列を $m \times n$ 行列と呼びます. 行列はまれに配列と呼ばれることもあります. また, $m \times 1$ または $1 \times n$ の配列はベクトルと呼ばれます. この章では行列の記述方法について説明します.
行列要素には実数, 複素数, 実数や複素数の係数を含む数式などを利用できます. **行列**サブメニューにあるほとんどのコマンドは実数と虚数の両方に対して利用できます. この章の後半で解説する QR と特異値分解は実数の要素に対してだけ有効です.
行列は行数と列数によって特徴付けられます. つまり, 行列は正の整数の関数と考えることができます. さらに行列名を付けた場合, 下付き文字を引数として扱うことで, 関数で目的の要素を個別に記述することができます.

▶ **関数定義 + 新しい定義**

$A = \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}$

▶ **計算**

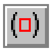
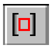
$A_{2,3} = 50$
$A_{3,3} = 49$
下付き文字として記述した行と列を示す番号はコンマで区切ります.

8.1.1 行列のカッコ

表示メニューのコマンドを使うと行列の表示方法を変更することができます. **ヘルパーライン**と**入力ボックス**を試しに操作してください. デフォルトでは両方とも画面表示されるようになっています. ただし, 文書のプレビューや印刷の時, これらの補助線は表示, 印刷されません. ですから,

行列を記述する場合は他と区別する意味で, 必ずカッコを付けてください．カッコはダイアログに表示されるビルトインタイプのデリミタから選択して作成するか, ひとつひとつ手作業で入力します．どちらで入力しても画面表示や数学的なプロパティは同じです．しかし, タイプセット出力した場合, ビルトインタイプのデリミタの方が, 行列をきれいに囲むことができます．
ビルトインタイプのデリミタを利用しない場合は, 自分でカッコを付けてください．行列に演算を実行した時の計算結果である行列には, 元の行列に利用したものと同じカッコが付くことになります．

▶　カッコまたはカギカッコで行列を作成する

1. マウスで行列を選択するか, SHIFT キーを押しながら右矢印を押します．
2. アイコン  または  をクリックします．

または

1. 行列にカーソルを置き, 行列全体を選択します．
2. **編集** + **プロパティ**とするか, または  をクリックします．カッコとして利用するデリミタをダイアログから選択します．

普通のカッコ, カギカッコ, 大カッコのどれを利用しても数学的なプロパティには関係ありません．縦棒は行列式, 2 重の縦棒はノルムを求めるための演算子と認識されますので, これをカッコの代りに使うことは避けてください．
行列内での移動には矢印キーだけでなく, TAB キーも利用できます．また, スペースバーは数式の最後にカーソルを移動します．

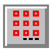
8.1.2　行列の作成

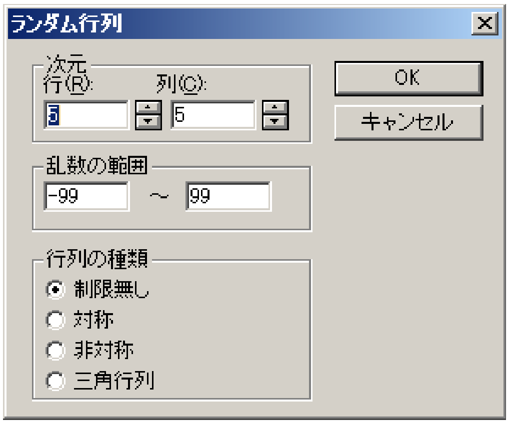
行列の基本的な作成には次のような方法を利用します．

- **挿入**メニューから**行列**を選択する．
- キーボードショートカットを利用する．
- **行列**サブメニューから**ランダム行列**を選択する．
- **行列**サブメニューから**要素の作成**を選択する．

次に, これらの方法で行列を作成するための操作方法を示します．

▶　行列ダイアログを使ってで行列を作成する

1. アイコン  をクリックするか, または**挿入** + **行列**とします．
2. 行数と列数を設定します．
3. デリミタの項目で適当なオプションを選択します．
4. OK ボタンをクリックします．
5. 入力ボックスに入力します．



各要素には, 数式を入力できます．代数式だけでなく, 実数および複素数を入力できます．組込みのデミリタを使うと画面上カッコを拡張するのと同じように表示されますが, タイプセッティングするときには余白を小さくする必要があるかもしれません．

▶ キーボードショートカットで行列を作成する

- CTRL ＋ S ＋ M とします．
  または
- CTRL ＋ S ＋ SHIFT ＋ M とします．

直近に作成した行列と同じ属性の行列を作成する場合は, 最初の方法を選択します．2 番目の方法だと 2×2 行列が作成されます．
要素を既に入力した $m \times n$ 行列を作成する場合は, **行列**サブメニューから**ランダム行列**を選択します．ランダム行列の場合は自動入力する整数の範囲を指定します．

▶ ランダム行列コマンドで行列を作成する

1. **行列**サブメニューから**ランダム行列**を選択します．
2. 行数と列数を設定します．
3. 乱数の範囲を設定します．
4. 行列の種類をクリックします．
5. OK ボタンをクリックします．

カッコ内に目的の行列が作成されます．

▶ 行列 ＋ ランダム行列

(3×3, 乱数の範囲: -10 から 10)

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 10 & -6 & -8 \\ -5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -6 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 1 \\ -10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 8 \\ -7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

無制限　　　　　対称　　　　　非対称　　　　　三角

すでに要素の入力された $m \times n$ 行列の作成方法を紹介します．**行列**サブメニューの**要素の作成**コマンドを利用します．

▶ **要素の作成コマンドで行列を作成する**

1. ペアカッコを作成します．そして適当なコッカを付けます．
2. **行列**サブメニューから**要素の作成**を選択します．行数と列数を設定します．
3. ダイアログボックスから目的の項目を選択します.OK ボタンをクリックします．

この行列はカッコの中に作成されます．要素の作成方法は次の章でも改めて紹介します．

ゼロ行列

全ての要素がゼロである $m \times n$ 行列を作成することができます．ここで m と n は任意の整数とします．

▶ **行列 ＋ 要素の作成 ＋ ゼロ**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

単位行列

任意の n に対する $n \times n$ の単位行列を作成できます．正方行列以外の単位行列も作成できます．

▶ **行列 ＋ 要素の作成 ＋ 単位行列**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

このコマンドは目的の大きさの単位 (正方) 行列を作成し，残りの要素にゼロを代入します．

ランダム行列

-999 から 999 までの範囲にある整数を使って要素を作成します．

▶ **行列 ＋ 要素の作成 ＋ ランダム行列**

$$\begin{bmatrix} -266 & -8 & 765 & 448 & -348 & 470 \\ -608 & -686 & 702 & -61 & -49 & -433 \\ 966 & 902 & -942 & 712 & 761 & -892 \\ -564 & -826 & 251 & -414 & -44 & -214 \\ 235 & -781 & 421 & -340 & 881 & 444 \end{bmatrix}$$

ジョルダンブロック

ジョルダンブロックは対角線上に同じ数式を移動し, その一つ上のセルに 1 を入れ, さらに残りのセルにゼロを入力したものです. ジョルダンブロックを作成する場合, ダイアログで行列の大きさと, 対角線上のセルに入力する値を入力します. ジョルダンブロックを利用して作成されるジョルダン形式については後述します.

► **行列 ＋ 要素の作成 ＋ ジョルダンブロック**

- 対角線上に λ を入れた 2×2 と x を入れた 5×5 行列の例を示します.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

定義関数

2 変数を持つ関数 $f(i,j)$ で行列要素を作成する場合には**定義関数**を選択します. 定義した関数 $f(i,j)$ を利用して $m \times n$ 行列, すなわち, 要素が (i,j) で決まる行列を作成します. もちろん, $1 \le i \le m$ であり, $1 \le j \le n$ です.

Example 28 ヒルベルト行列

1. 次の関数を定義します. $f(i,j) = \dfrac{1}{i+j-1}$.
2. **要素の作成**ダイアログから**定義関数**を選択します.
3. 関数名 f を関数式ダイアログに入力します.
4. 行列数を 2 または 3 とします.
5. OK ボタンをクリックします.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Example 29 ファンデルモンド行列

1. 次の関数を定義します. $g(i,j) = x_i^{j-1}$
2. **要素の作成**ダイアログから**定義関数**を選択します.
3. 関数名 g を関数式ダイアログに入力します.

4. 行列数を 4 とします.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix}$$

Example 30 “任意の” 3×3 行列

1. 次の関数を定義します $a(i,j) = a_{i,j}$.
2. **要素の作成**ダイアログから**定義関数**を選択します.
3. 関数名 a を関数式ダイアログに入力します.
4. 行列数を 3 とします.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

下付き文字はコンマで区切ります. 関数式でコンマを使って $a\,(i,j)$ のようにします. このコンマが無いと, 下付き文字は積 ij と解釈されます.

コンマを使わずに 9×9 までのの行列を作成することができます.

Example 31 “任意の” 3×3 行列を作成する別の方法

1. 次の関数を定義します $a(i,j) = a_{10i+j}$.
2. **要素の作成**ダイアログから**定義関数**を選択します.
3. 関数名 a を関数式ダイアログに入力します.
4. 行列数を 3 とします.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Example 32 定数行列

1. **要素の作成**ダイアログから**定義関数**を選択します.
2. 関数名に 5 と入力します.

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

バンド

バンドオプションを選択すると奇数個の要素を, “a, b, c” のように入力する必要があります. このオプションは対角線上に, 入力した値のバンドを作成します. バンド以外の部分はゼロが自動的に代入されます. 最初に入力した値が対角線上に並びます.

Example 33 バンド行列

1. **要素の作成**ダイアログで**バンド**を選択します.
2. バンドのリストボックスに a を入力します.
3. 行を 2 に設定します.

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

1. **要素の作成**ダイアログで**バンド**を選択します.
2. バンドのリストボックスに a, b, c を入力します.
3. 行数を 2 または 5, そして列数を 2, 5, または 8 とします.

$$\begin{bmatrix} b & c \\ a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Example 34 バンド行列

バンドオプションを選択し“0”, “1”, “$0, \lambda, 1$” を入力すると, それぞれゼロ行列, 単位行列, ジョルダンブロックを作成します.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

8.1.3 行列の編集

行, 列, または複数の行や列を行列から削除することができます. また, 行や列の並びを変更することや, 矩形ブロックごと置換することもできます.

行や列の追加

► **行や列を追加する**

1. 行列中 のセルか, または行列の右隣にカーソルを移動します. 行列を囲むカッコを付けた場合はカッコの内側にカーソルを移動します.
2. **編集**メニューから**行または列の挿入**を選択します.
   または
   マウスの右ボタンをクリックしてメニューから**行または列の挿入**を選択します.
3. ダイアログが表示されたら, 目的の設定を行い OK ボタンをクリックします.

行や列の削除

► **行や列（のブロック）を削除する**

1. マウスまたは SHIFT ＋ 矢印キーを使って、目的の行や列を選択します.
2. DEL キーを押します.

同じ方法で目的の箇所にある行列要素の矩形ブロックを削除できます.
行列を選択している場合だけ, **編集**メニューの**行や列の挿入**コマンドが有効になります. メニューから**挿入**コマンドが選択できない場合は, 行列が正しく選択されていることを, 再度, 確認してください.

► $n \times 1$ **または** $1 \times n$ **行列の形でベクトルを作成する**

1. 最後のセルにカーソルを移動します.
1. ENTER キーを押す.

► $n \times 1$ **または** $1 \times n$ **行列の形にベクトルを減らす**

1. 最後のセルにカーソルを置きます.
1. BACKSPACE を押します.

ディスプレイ環境のボックス, 分数, 無理数, カッコなどを挿入する際の操作もこれと同じです.

位置揃えを変更する

► **要素の位置揃えを変更する**

1. マウスを使って行列全体を選択します. または, 行列の左端から SHIFT キーと右矢印キーを使って選択します.
2. **編集** ＋ **プロパティ**を選択するか, 標準ツールバーのプロパティボタン  をクリックします. または, マウスの右ボタンを使って**プロパティ**を選択します.
3. 表示されるダイアログで位置揃えの設定を変更します.

矩形ブロックを置換する

矩形ブロックの置換には**要素の作成**コマンドを利用します.

► **矩形ブロックをコピーと貼り付けコマンドで置換する**

1. 新しい行列を作成し, **編集** ＋ **コピー**としてクリップボードにコピーします.
2. 目的の行列で置換する矩形ブロックをマウスで選択します.
3. **編集** ＋ **貼り付け**とします.

► **矩形ブロックを要素の作成コマンドで置換する**

1. マウスまたは SHIFT ＋ 矢印キーを使って、目的の要素を選択します.
2. **行列**サブメニューから**要素の作成**を選択します.
3. ダイアログで目的の設定を行います.
4. OK ボタンをクリックします.

行列中の選択したブロックは指定した方法によって作成された値で置換されます.

Example 35 行列の右下ブロック 2×2 を変更する. マウスを使って行列の右下ブロック 2×2 を選択します. **行列**サブメニューから**要素の作成**を選択し, ゼロオプションを指定して OK ボタンをクリックします.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列の右下ブロック 2×2 はゼロによって置換されます. 新しい行列は作られません.

目的箇所の要素だけを削除する場合は, マウスで選択後 DEL キーを押します.

Example 36 行列の右下ブロック 2×2 の要素を削除する. マウスを使って行列の右下ブロック 2×2 を選択します. DEL キーを押します.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \square & \square \\ 7 & \square & \square \end{bmatrix}$$

8.1.4 行列の連結と重ね

行数, または列数が等しい場合, 2 つの行列を結合して 1 つの行列を作成できます.

► **行数の等しい 2 つの行列を連結する**

1. 2 つの行列を横に並べます.
2. どちらかの行列にカーソルを移動します.
3. **行列**サブメニューから**連結**を選択します.

► **連結**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \text{連結:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3y & 4t+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5+w \\ \sqrt{7}z \end{pmatrix}, \text{連結:} \begin{pmatrix} x+1 & 2 & 5+w \\ 3y & 4t+2 & \sqrt{7}z \end{pmatrix}$$

► **列数の等しい 2 つの行列を重ねる**

1. 2 つの行列を横に並べます.
2. どちらかの行列にカーソルを移動します.
3. **行列**サブメニューから**重ね**を選択します.

▶ **重ね**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$, 重ね: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

▶ **重ね**

$\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3y & 4t+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w+5 & z\sqrt{7} \end{pmatrix}$, 重ね: $\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3y & 4t+2 \\ w+5 & z\sqrt{7} \end{pmatrix}$

8.1.5 リストと行列の変形

数式モードで入力した数値列（コンマ区切り）から行列を作成することができます. 先頭は左上のセルに入り, 最後の要素は右下のセルに入ります.

▶ **リストから行列を作成する**

1. リストにカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから**変形**を選択します.
3. 列数を指定します.

行数は数値列の長さによって決まります. 最後の行の余分なセルには入力ボックスだけが入ります.

▶ **変形**

$45, 21, 8, 19, 0, 5, 15, 6$ を 3 列の行列に変形: $\begin{bmatrix} 45 & 21 & 8 \\ 19 & 0 & 5 \\ 15 & 6 & \square \end{bmatrix}$

すでに要素の入っている行列を変形することもできます.

▶ **行列を変形する**

1. 行列にカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから**変形**を選択します.
3. 新たな列数を指定します.

▶ **変形**

$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \end{bmatrix}$ 3 列に変形: $\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & \square \end{bmatrix}$

395 ページに例題が掲載されています.

8.2 行列の演算

行列の加算, 減算, 乗算などは普通に数式を入力し, **計算**コマンド使って計算します.

8.2.1 行列の加算とスカラーの乗算

同じ次元の行列を加算すると, 対応する各要素同士が加算されます. 行列を構成する行列要素の数値や数式を**スカラー**と呼びます. 行列に対してあるスカラーを掛けると, 行列の各要素に対してスカラーの乗算が行われます. 行列に対する加算, 乗算, およびスカラーを使った計算には**計算**コマンドを利用します. 数式にカーソルを移動します.

▶ **計算**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$$

行列に利用したカッコで計算結果の行列も囲まれます.

▶ **計算**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 4a & 3a \end{bmatrix}$$

$$a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-5b & 2a-6b \\ 4a-8b & 3a-7b \end{bmatrix}$$

8.2.2 内積と行列の積

$1 \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列の積（2 つのベクトルの積）を内積またはドット積と呼びます. $m \times k$ 行列と $k \times n$ 行列の積は $m \times n$ 行列となり, 行と列の内積で表されます. つまり, 積 AB の要素 ij は A の i 行と B の j 列の内積となります.

▶ **計算**

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac+bd \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 20 \\ 44 & 45 \end{pmatrix}$$

▶ **計算**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd \\ uc+vd \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 941 & 942 \\ 1256 & 1255 \end{bmatrix}$$

行列に指数を記述する場合は, 行列の右隣にカーソルを移動して  をクリック, または, **挿入** + **上付き文字**とします. そして入力ボックスに指数を入力します.

8.2.3　行と列

行列 A に対して 関数 $\operatorname{row}(A,n)$ and $\operatorname{col}(A,n)$ を利用することによって, 行列の n 行または, n 列目をベクトルとして書き出すことができます. 数式モードでこれらの関数を入力すると自動的に灰色で表示されます. 灰色で表示されない場合は, **挿入** + **数式名**としてダイアログから入力します.

▶ **計算**

$$\operatorname{row}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{col}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

8.2.4　単位行列と逆行列

$n \times n$ の単位行列 I の対角線要素には 1 が入り, それ以外のセルにはゼロが入ります. 例として 3×3 の単位行列を次に示します.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$ 行列 A の逆行列 B は $n \times n$ 行列で $AB = I$ を満たします. 行列 A の逆行列を求める場合は A に上付き文字 “–1” を付けて, **計算**コマンドを実行します. または, 行列 A にカーソルを移動して, **行列**サブメニューから**逆行列**を選択して求めることができます.

▶ **計算**

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \text{逆行列:} \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

▶ **計算**

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

逆行列が定義を満たしていることを確認する場合は積を計算します.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

数値計算コマンドを実行すると, 逆行列の要素は近似値で表示されます. 近似値の精度は**設定**メニューの内容と同様, 行列のプロパティによって左右されます (参照 28 ページ).

▶ **数値計算**

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.538\,46 & 0.461\,54 \\ 0.615\,38 & -0.384\,62 \end{pmatrix}$$

逆行列と元の行列の積を計算すれば誤差がどの程度のものか良く分かります.

▶ **計算**
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.53846 & 0.46154 \\ 0.61538 & -0.38462 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999\,98 & -0.000\,02 \\ -0.000\,02 & 0.999\,98 \end{pmatrix}$
$(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$ から, 行列によっては負の累乗計算を行うことができます.

▶ **計算**
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1255}{2197} & \frac{942}{2197} \\ \frac{1256}{2197} & -\frac{941}{2197} \end{pmatrix}$
すべての行列要素がゼロである $m \times n$ 行列を加算の単位行列と呼びます. 任意の $m \times n$ 行列 A に対して次の式が成り立ちます.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

行列 A の加算の逆行列は $(-1)\,A$ となります.

▶ **計算**
$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ -a_{4,1} & -a_{4,2} & -a_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8.2.5 **行列と多項式**

1 変数の多項式と行列の演算は次のように行います.

Example 37 多項式 $x^2 - 5x - 2$ と行列の計算を行います.

1. 式 $x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ にカーソルを移動します. **関数定義**サブメニューから**新しい定義**コマンドを選択します.
2. 多項式に**計算**コマンドを実行します.

▶ 計算
$x^2 - 5x - 2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad x^2 - 5x - 2x^0 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$
関数 $f(x) = x^2 - 5x - 2x^0$ を定義します. そして**計算**コマンドを実行します.

▶ **関数定義 + 新しい定義**
$f(x) = x^2 - 5x - 2x^0$

▶ **計算**
$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

式 $-5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2$ は数学的に正しい記述方法とは言えません．しかし，**計算**コマンドを実行する場合，2 は $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，または 2×2 の単位行列を 2 倍するものとして扱われます．

8.2.6　行列要素の数式処理

行列中の任意の要素に対して数式処理を実行する場合は最初に要素を選択し，CTRL キーを押しながら，目的のコマンドを選択します．**部分計算**によって選択箇所が計算され，残りの要素は元のままとなります．ここで，コピーや貼り付けなどの編集機能を活用して，目的の要素を自由に編集することができます．
次の例のように，**数式処理**メニューの多くのコマンドを行列に適用すると，行列の要素を直接操作します．

▶ **因数分解**

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \times 3 \\ 2^3 & 7 \end{bmatrix}$$

▶ **計算**

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \sin x & \int 6x^2 dx \\ \frac{d^2}{dx^2} \ln x & x + 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & 2x^3 \\ -\frac{1}{x^2} & 4x \end{bmatrix}$$

▶ **数値計算**

$$\begin{bmatrix} \sin^2 \pi & e \\ \ln 5 & x + 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 2.718\,3 \\ 1.609\,4 & 4.0x \end{bmatrix}$$

▶ **結合 ＋ カッコ不要な関数**

$$\begin{bmatrix} \sin^2 x + \cos^2 x & 6x^2 \\ 4 \sin 4x \cos 4x & \sin x \cos y + \sin y \cos x \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 6x^2 \\ 2 \sin 8x & \sin (x + y) \end{bmatrix}$$

▶ **計算**

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x + 1 & 2x^3 - 3 \\ \sin 4x & 3 \sec x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6x^2 \\ 4 \cos 4x & \frac{3}{\cos^2 x} \sin x \end{bmatrix}$$

8.3　行の操作と階段形

線形方程式を解く場合に，その係数を行列による配列でまとめることにより，効率的に問題を解くことができます．線形方程式における消去法では，色々な計算を段階毎に行います．

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

この線形方程式からスカラーである係数を行列形式で記述します.

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}
$$

この行列に対して基本操作を行います. 行列の基本操作を行うことによって, 行列を行の階段形など, 特別な形に変形します. この形は行番号が増えるに従って, ゼロの数が増えるものです. 行の階段形を作成する場合にはいくつかの方法がありますが, 行数を減らしていく階段法は次のような条件を満たす必要があります.

- 行が下に下がるほど, ゼロの数が増える.
- ゼロ以外の数値が入る行の先頭には必ず 1 が入る.
- 各列の最初のゼロ以外の成分を含む列では, その成分の上下にはゼロが入る.

8.3.1 ガウス消去法と階段形

階段形を求めるには 3 つの方法があります. それらを次に示します.

► **行列 + ガウス消去法 (整数値)**

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ガウス消去法 (整数値): $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}$, ガウス消去法 (整数値): $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & -44 & 58 \end{bmatrix}$

► **行列 + ガウス消去法 (整数値)**

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ガウス消去法 (整数値): $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a}(ad-bc) \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}$, ガウス消去法 (整数値): $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{29}{4} \end{bmatrix}$

► **行列 + 階段行列**

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 階段行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}$, 階段行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{22} \end{bmatrix}$

8.3.2 行列の基本操作

行列の基本操作は目的の行列の左側から基本行列を掛けて行います．この左側から掛ける行列は，単位行列に対して目的の基本操作を行って作成します．その方法を次に示します．
基本行列を作成する場合，**行列**サブメニューから**要素の作成**を選択します．要素の作成ダイアログで目的の次元の単位行列を作成します．そして単位行列を編集して基本行列を作成します．次に基本行列との計算例を示します．

▶ **3 行目を λ 倍して 1 行目に加える**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-5 & 4\lambda-2 & \lambda-1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

▶ **2 行目と 3 行目を入れ替える**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -50 & -12 & -18 \\ 31 & -26 & -62 \\ 1 & -47 & -91 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & -12 & -18 \\ 1 & -47 & -91 \\ 31 & -26 & -62 \end{bmatrix}$$

▶ **2 行目を λ 倍する**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 & -2 & -18 \\ 33 & -26 & 82 \\ 14 & -47 & -91 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & -2 & -18 \\ 33\lambda & -26\lambda & 82\lambda \\ 14 & -47 & -91 \end{bmatrix}$$

MuPAD にはこれ以外にも行や列の操作を行うためのライブラリが用意されています．その例を次に示します．

▶ **MuPAD 関数 swapRow にアクセスする関数名をS として登録する**

1. **関数定義**サブメニューから **MuPAD 関数の定義**を選択します．
2. ダイアログに次のように入力します．
   - MuPAD 名: **linalg::swapRow(x,i,j)**
   - Scientific Notebook (WorkPlace) 名: $S(x,i,j)$
   - MuPAD **名プロシージャの位置で**，MuPAD **に内蔵されているか自動的にロードされるを選びます**．
3. OK ボタンをクリックします．

行列 x の要素 i,j に対して回転を実行する関数 $S(x,i,j)$ が定義できました．

Example 38 次の式

$$x = \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \end{bmatrix}$$

を定義して $S(x,1,2)$ を計算すると次の行列が得られます.

$$S(x,1,2) = \begin{bmatrix} 97 & 50 & 79 & 56 \\ -85 & -55 & -37 & -35 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \end{bmatrix}$$

8.4　方程式

連立方程式については既に 65 ページで解説しました. 線形の連立方程式を解く場合, ここで紹介する行列を使う方法も大変有効です.

8.4.1　連立方程式

連立方程式を $n \times 1$ 行列の各行に個々に入力します. 変数の数と方程式の数が等しければ解を求められます. 入力した連立方程式にカーソルを移動します. **求解**サブメニューから**解**コマンドを選択します. 次の例に示すように変数の解が自動的に求められます.

▶　**求解 + 解**

$$\begin{array}{l} x+y-2z=1 \\ 2x-4y+z=0 \\ 2y-3z=-1 \end{array}, \text{解：} \left\{x=\frac{17}{8}, y=\frac{11}{8}, z=\frac{5}{4}\right\}$$

2 つの連立方程式中に 3 つの変数がある場合, 目的とする変数を指定するダイアログがコマンド選択後に表示されます. 行列の任意の位置にカーソルを移動して**求解**サブメニューから, **解**コマンドを選択します. ダイアログボックスが表示されたら, 目的の変数を入力します. 複数の変数名を入力する場合はコンマで区切ります.

▶　**求解 + 解**

目的の変数：x, y

$$\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ x+3z=4 \end{array}, \text{解：} \{y=-6z+7, x=-3z+4\}$$

目的の変数：x, z

$$\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ x+3z=4 \end{array}, \text{解：} \left\{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y, z=\frac{7}{6}-\frac{1}{6}y\right\}$$

8.4.2　行列方程式

連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

は行列を使って次のように記述できます.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

この行列は**求解**サブメニューの**解**コマンドで解くことができます. 連立方程式をこの方法で解くにはいくつかの利点があります. 実際, 殆どの線形連立方程式はこの方法によって解くことができます. 前述の 2 つの例題を, この方法を使って解きます. 両者の計算結果を比べてみましょう.

Example 39 係数行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ にベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を掛けて連立方程式

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= \ 1 \\ 2x - 4y + z &= \ 0 \\ 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

を行列で表します.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y - 2z \\ 2x - 4y + z \\ 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

► **求解 + 解**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{解}: \begin{bmatrix} \frac{17}{8} \\ \frac{11}{8} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{解}: \begin{bmatrix} -3\hat{t}_3 + 4 \\ -6\hat{t}_3 + 7 \\ \hat{t}_3 \end{bmatrix}$$

最初の例題で行列の両辺に逆行列を掛け, **計算**コマンドを実行することで解を求めることもできます.

► **計算**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{8} \\ \frac{11}{8} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

連立方程式を行列に, 行列を連立方程式に変換する場合は**書換え** + **方程式から行列**コマンドを利用します.

► **連立方程式を行列に変換する**

1. リスト, または一列の行列に, 連立方程式を入力してカーソルを移動します.

2. **書換え** + **方程式から行列**コマンドを選択します.
3. ダイアログボックスに変数をコンマ区切りで入力します.
4. OK ボタンをクリックします.

▶ **書換え** + **方程式から行列**

$\{x+2y-3, 3x-5y=0\}$ (変数: x, y),

対応する行列: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x+y-2z=1 \\ 2x-4y+z=0 \\ 2y-3z=-1 \end{bmatrix}$ (変数: x, y, z),

対応する行列: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

▶ **行列を連立方程式に変換する**

1. $m \times n$ 行列にカーソルを移動します.
2. **書換え** + **行列から方程式**コマンドを選択します.
3. ダイアログボックスに変数をコンマ区切りで入力します.
4. OK ボタンをクリックします.

▶ **書換え** + **行列から方程式**

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (変数: x, y),

対応する方程式: $\{x+y=-1, 2x-3y=1\}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,

対応する方程式: $\{x+y-2z=1, 2x-4y+z=0, 2y-3z=-1\}$

リスト形式の計算結果が出力されます. このリストを 1 列の行列に変換する場合は**行列**+ **変換**コマンドを利用します.

▶ **行列** + **変形**

$\{x+y=-1, 2x-3y=1\}$, $\left\{ \begin{array}{c} x+y=-1 \\ 2x-3y=1 \end{array} \right\}$

8.5　行列演算子

行列演算子は行列同士の計算を行う場合に利用します．行列演算子は**行列**メニューに用意されています．

8.5.1　トレース

$n \times n$ 行列のトレースとは対角要素の合計を求める演算機能のことです．この機能は正方行列の場合にだけ利用できます．

▶ **正方行列のトレースを行う**

1. 行列にカーソルを移動します．
2. **行列**サブメニューから**トレース**を選択します．

▶ **トレース**

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, トレース: $a+d$　　$\begin{pmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{pmatrix}$, トレース: 61

8.5.2　転置とエルミート転置行列

$m \times n$ 行列の転置は $n \times m$ 行列となります．転置行列は元の行列の行と列を入れ替えたものです．

▶ **転置行列を求める**

1. 行列にカーソルを移動します．
2. **行列**サブメニューから**転置**を選択します．

▶ **行列 ＋ 転置**

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 転置: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

上付き文字に T を付けることで転置行列を求めることもできます．

▶ **計算**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$$

エルミート転置行列とは転置と同時に共役複素数で置換を行います．

この機能は単に随伴行列, またはエルミート随伴行列とも呼ばれます．しかし, これらは後述する古典的隣接行列とは異なりますので注意してください．

▶ **エルミート転置行列を求める**

1. 行列にカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから**エルミート転置行列**を選択します.

$\begin{pmatrix} 2+i & -i \\ 4-i & 2+i \end{pmatrix}$, エルミート転置行列: $\begin{pmatrix} 2-i & 4+i \\ i & 2-i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{pmatrix}$, エルミート転置行列: $\begin{pmatrix} a-ib & e-if \\ c-id & g-ih \end{pmatrix}$

上付き文字に H を付けることでエルミート転置行列を求めることもできます.

▶ **計算**

$\begin{pmatrix} i & 2+i \\ 4i & 3-2i \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} -i & -4i \\ 2-i & 3+2i \end{pmatrix}$

8.5.3　行列式

$n \times n$ 行列 (a_{ij}) の行列式は行列要素の加算と減算によって求められます. 一般に,

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma} (-1)^{sgn(\sigma)}\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

で表すことができます. ここで σ は $\{1, 2, \ldots, n\}$ の全ての順列を示し, $(-1)^{sgn(\sigma)} = \pm 1$ を満たします. 符号は順列数 σ が奇数か偶数かによって決ります.
この機能は正方行列の場合にだけ利用できます.

▶ **正方行列の行列式を求める**

1. 行列にカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから**行列式**を選択します.

▶ **行列 ＋ 行列式**

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 行列式: $ad - bc$　　$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}$, 行列式: -121529

$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$, 行列式: $\begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} \\ +a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{1,3}a_{2,2} \end{array}$

行列式は関数 det を使って, 次のように記述することもできます.

$$\begin{vmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 49 \end{vmatrix} \quad \text{または} \quad \det \begin{bmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 49 \end{bmatrix}$$

垂直なカッコはペアカッコのボタン をクリックしてダイアログから選択します.

数式モードで関数 det の最後の t を入力すると灰色に変わります. この関数は をクリックして表示されるダイアログから選択することもできます.

▶ **計算**

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{bmatrix} -8 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & -1 \\ 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -304 \qquad \begin{vmatrix} -85 & -55 & 82 \\ -35 & 97 & -17 \\ 42 & 33 & -65 \end{vmatrix} = 223\,857$$

8.5.4 随伴行列

行列 A の随伴行列, または古典的隣接行列とは行列 A の余因子を転置したものです. 行列 A の i, j 余因子 A_{ij} はスカラー $(-1)^{i+j}\det A\,(i|j)$ です. ここで, $A\,(i|j)$ は行列 A から i 行と j 列を削除したものです.

▶ **行列 ＋ 随伴行列**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{随伴行列:} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

▶ **行列 ＋ 随伴行列**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}, \text{随伴行列:} \begin{pmatrix} ej - fh & -bj + ch & bf - ce \\ -dj + fg & aj - cg & -af + cd \\ dh - eg & -ah + bg & ae - bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 & -5 \\ 4 & -8 & -3 & 92 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \\ 5 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{随伴行列:} \begin{bmatrix} 3384 & 469 & -3183 & 7130 \\ 3329 & 301 & -3200 & -8153 \\ 4068 & -261 & 6896 & -2976 \\ 275 & 840 & 85 & -1116 \end{bmatrix}$$

元の行列と随伴行列を掛けると対角行列になります. この時の要素は行列式と同じものになります.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

逆行列を持つ行列 A の逆行列は次のように求めることもできます.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adjugate}\,A$$

▶ **計算**

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 & -5 \\ 4 & -8 & -3 & 92 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \\ 5 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3384 & 469 & -3183 & 7130 \\ 3329 & 301 & -3200 & -8153 \\ 4068 & -261 & 6896 & -2976 \\ 275 & 840 & 85 & -1116 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 77531 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 77531 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 77531 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77531 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 & -5 \\ 4 & -8 & -3 & 92 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \\ 5 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 77531$$

8.5.5　パーマネント

$n \times n$ 行列 (a_{ij}) のパーマネントは行列要素の積の総和として求められます．一般的に，

$$\mathrm{permanent}(a_{ij}) = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ここで σ は $\{1, 2, \ldots, n\}$ の全ての順列を示します．この機能は正方行列の場合にだけ利用できます.

▶ **行列のパーマネントを求める**

1. 行列にカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから**パーマネント**を選択します.

▶ **行列 + パーマネント**

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, パーマネント: $ad + bc$

$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$, パーマネント: $\begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} \\ +a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} + a_{3,1}a_{1,3}a_{2,2} \end{array}$

8.5.6　行列要素の最大値と最小値

関数 max と min を整数を行列要素とする行列に実行すると, 行列要素の最大, または, 最小値を表示します.

▶ **計算**

$$\max \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 & 97 \\ 50 & 79 & 56 & 49 & 63 \\ 57 & -59 & 45 & -8 & -93 \end{bmatrix} = 97$$

$$\min \begin{bmatrix} 92 & 43 & -62 & 77 & 66 \\ 54 & -5 & 99 & -61 & -50 \\ -12 & -18 & 31 & -26 & -62 \\ 1 & -47 & -91 & -47 & -61 \end{bmatrix} = -91$$

8.5.7 ノルム

行列サブメニューから**ノルム**を選択するとベクトル, または行列の 2 ノルムを求めることができます. ベクトルの 2 ノルム, またはユークリッドノルムはベクトルのユークリッド長と考えることができます.

$$\left\| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \left\| \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

行列 A の 2 ノルム, またはユークリッドノルムは次式で定義でき, これは特異値の最大のものと考えられます.

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

また, $\max\left\{\sqrt{|E_i|}\right\}$ のように求めることもできます. ここで E_i は AA^H の固有値とします.

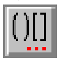
▶ **行列 + ノルム**

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, 2 ノルム: 9. 326 8　　$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 2 ノルム: 3. 414 2

$\begin{pmatrix} 2+3i & 5 \\ 6 & -7+2i \end{pmatrix}$, 2 ノルム: 9.

2 ノルムは 2 重カッコを使って求めることもできます.

▶ **行列にノルム記号を付ける**

1. マウスまたは SHIFT キーを押しながら右矢印キーで行列を選択します.
2. アイコン  をクリックするか**挿入**+ **ペアカッコ**とします. または, CTRL キーと SHIFT キーを押しながら縦棒の記号を入力します. ノルムの記号を選択し,OK ボタンをクリックします.

▶ **計算**

$\left\| \begin{matrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 \end{matrix} \right\| = 0.932\,68$　　$\left\| \begin{matrix} 5 & 7 \\ -13 & 6 \end{matrix} \right\| = 14.\,454$

$\left\| \begin{matrix} 2+3i & 5 \\ 6 & -7+2i \end{matrix} \right\| = 9.\,937\,8$

行列の 1 ノルムとは各列の絶対値の総和として求められます.

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

1 ノルムを求めるには, ノルムカッコに下付き文字で 1 と入力します.

▶ **計算**

$$\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|_1 = \max\left(|a|+|c|, |b|+|d|\right) \qquad \left\|\begin{matrix} 0.2234 & 0.3158 \\ -0.5624 & 0.7111 \end{matrix}\right\|_1 = 1.0269$$

$$\left\|\begin{matrix} 5 & 7 \\ -13 & 6 \end{matrix}\right\|_1 = 18 \qquad \left\|\begin{matrix} 5+3i & 7 \\ -13 & 6-5i \end{matrix}\right\|_1 = \sqrt{34}+13$$

行列の ∞ ノルムとは各列の絶対値の総和から選ばれる, 最大の総和として求められます.

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

▶ **計算**

$$\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|_\infty = \max\left(|a|+|b|, |c|+|d|\right) \qquad \left\|\begin{matrix} 0.2234 & 0.3158 \\ -0.5624 & 0.7111 \end{matrix}\right\|_\infty = 1.2735$$

$$\left\|\begin{matrix} 5 & 7 \\ -13 & 6 \end{matrix}\right\|_\infty = 19 \qquad \left\|\begin{matrix} 5+3i & 7 \\ -13 & 6-5i \end{matrix}\right\|_\infty = 13+\sqrt{61}$$

行列 A のヒルベルト-シュミットノルム (またはフロベニウスノルム) $\|A\|_F$ は行列 A の平方和のルートとして求められます. また, 2 ノルムとは同じではありませんが, ユークリッドノルムとも呼ばれます. (314 を参照してください).

$$\|A\|_F = \left(\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq n}}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

▶ **計算**

$$\left\|\begin{matrix} 5+3i & 7 \\ -13 & 6-5i \end{matrix}\right\|_F = \sqrt{313} \qquad \left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|_F = \sqrt{\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\right)}$$

$$\left\|\begin{matrix} 5 & 7 \\ -13 & 6 \end{matrix}\right\|_F = 3\sqrt{31} \qquad \left\|\begin{matrix} 0.2234 & 0.3158 \\ -0.5624 & 0.7111 \end{matrix}\right\|_F = 0.98569$$

8.5.8 **スペクトル半径**

正方行列のスペクトル半径は固有値の絶対値の最大値として求められます.

► **行列 + スペクトル半径**

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1.0 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \text{スペクトル半径: } 7.7627$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3.0 \end{bmatrix}, \text{スペクトル半径: } 8.1231$$

► **行列 + 固有値**

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1.0 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \text{固有値: } \{-4.3801, 5.6174, 7.7627\}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3.0 \end{bmatrix}, \text{固有値: } \{-0.12311, 8.1231\}$$

8.5.9 コンディションナンバー

逆行列の存在する行列 A のコンディションナンバーは A の 2 ノルムと A^{-1} の 2 ノルムの積として求められます．コンディションナンバーとは A と b の各要素に対して線形方程式 $Ax = b$ が示す感度の値です．コンディションナンバーが 1 である行列を“パーフェクトコンディション”と言います．

► **行列 + コンディションナンバー**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{コンディションナンバー: } 1.0 \qquad \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{コンディションナンバー: } 4.0315$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, \text{コンディションナンバー: } 15514.0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{bmatrix}, \text{コンディションナンバー: } 4.0 \times 10^5$$

最後の 2 つの行列の感度はとても悪いものと考えられます．線形方程式 $Ax = b$ を構成する行列 A または b で，その要素に僅かな変動があっただけで，線形方程式の解に大きな影響を与えてしまうことになります．

8.5.10 指数関数

e^M を定義する場合，e^x のベキ級数を利用します．

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$
$$e^M = 1 + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{6}M^3 + \frac{1}{24}M^4 + \cdots$$

これを一般化すると,

$$e^{tM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tM)^k}{k!}$$

行列 M に対して e^M (または $\exp(M)$) を計算する場合, 式 e^M にカーソルを移動して**計算**コマンドを実行します. 計算例を次に示しますが, 最初に, つぎの値を関数として定義します.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

► **計算**

$$e^A = \begin{bmatrix} e & -e + e^3 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \qquad e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & -e^t + e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e & -e + e^3 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \qquad \exp(tA) = \begin{bmatrix} e^t & -e^t + e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{A+B} = \begin{bmatrix} e^2 & -2e^2 + 2e^4 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix} \qquad e^A e^B = \begin{bmatrix} e^{2\times 1} & 2e^{2\times 1} + e\left(-e + e^3\right) \\ 0 & ee^3 \end{bmatrix}$$

$$De^{tC}D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & t & 3t + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad e^{DtCD^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2\left(\frac{3}{t} + \frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 & t\left(\frac{3}{t} + 1\right) - 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

指数関数と実数を組合せた時に成立する関係が, 行列では成立しない場合があります. つまり, 等号 $e^{A+B} = e^A e^B$ では $AB = BA$ が成り立つ必要がありますが, これは上のような行列の場合は成立しません. しかし, $De^{tC}D^{-1} = e^{DtCD^{-1}}$ のように類似性を示す式が成り立つことが分かります.

8.6 行列と結合した多項式とベクトル

正方行列には特性多項式および最小多項式, 固有値, 固有ベクトルが存在します. 特性多項式は行列の固有値と固有ベクトルを決める数式です. そして固有値はダイナミックな系の性質を示す重要な値です. 連立常微分方程式の解を求める場合に, 特性多項式と最小多項式を利用することになります.

8.6.1 特性多項式と最小多項式

正方行列 A の特性多項式は特性行列 $xI - A$ の行列式として与えられます.

▶ **行列 ＋ 特性多項式**

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 特性多項式: $X^3 - 12X^2 + 48X - 64$

▶ **計算 (, 因数分解)**

$$X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+X & -1 & 0 \\ 0 & -4+X & 0 \\ 0 & 0 & -4+X \end{pmatrix}$$

▶ **計算, 因数分解**

$$\det\begin{pmatrix} -4+X & -1 & 0 \\ 0 & -4+X & 0 \\ 0 & 0 & -4+X \end{pmatrix} = 48X - 12X^2 + X^3 - 64 = (X-4)^3$$

正方行列 A の最小多項式は, 例えば, $p(A) = 0$ を満たす一番低い次数の単位多項式 $p(x)$ として与えられます. ケイレイ-ハミルトンの定理から, $f(x)$ を A の特性多項式した場合, $f(A) = 0$ が成り立ちます. A の最小多項式は A の特性多項式の因数となります.

▶ **行列 ＋ 最小多項式, 因数分解**

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 最小多項式: $X^2 - 8X + 16$

Example 40 ケイレイ-ハミルトンの定理に従って計算してみましょう.

式 $p(X) = X^2 - 8X + 16X^0$ と $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ を定義します.

計算コマンドを実行します.

$$p(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最小多項式, 特性多項式ともに多項式を変数で表示します. 上の例では行列 X を表示しています. 表示される変数は入力した行列に依存します. 従って, 行列で X を使っても, それを考慮しますので, X の使用を回避する必要はありません. コマンドの実行時に多項式の変数名を求めるダイアログが表示されます.

▶ **行列 ＋ 最小多項式, 多項式の変数** λ

$\begin{pmatrix} 3X & x \\ 5 & y \end{pmatrix}$ (多項式の変数 λ),

最小多項式: $\lambda^2 + (-3X - y)\lambda + (-5x + 3Xy)$

8.6.2 固有値と固有ベクトル

行列 A に対して**行列**サブメニューの**固有ベクトル**または**固有値**を選択するとスカラー c が計算されます. この時, ベクトル v がゼロでないとすると $Av = cv$ が成り立ちます. 行列要素に小数点を付ければ, 数値解を求めることができます. 小数点を付けなければ, 代数形式や分数形式で値が表示されます.

これらの操作によって計算されるスカラーやベクトルは特性値とか特性ベクトルと呼ばれることもあります. 特性多項式の解のことを固有値や特性値と呼びます.

▶ **行列 + 固有値**

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, 固有値: $\{\cos\alpha - i\sin\alpha, \cos\alpha + i\sin\alpha\}$

この行列の特性多項式は $X^2 - 2X\cos\alpha + 1$ です. さらに X に固有値 $\cos\alpha + i\sin\alpha$ を代入し, **簡単化**コマンドを実行すると

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 - 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cos\alpha + 1 = 0$$

となり, 固有値が特性多項式の解であることが確認できます. 行列要素に整数と小数点形式の値を使った場合, 計算結果が異なることに気をつけましょう.

▶ **行列 + 固有値**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 固有値: $\left\{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}, \frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{5}{2}\right\}$

$\begin{pmatrix} 1.0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 固有値: $\{-0.372\,28, 5.372\,3\}$

行列サブメニューから**固有ベクトル**を選択すると, 固有ベクトルと一緒に固有値も算出されます. 固有ベクトルは固有値によってグループ化され, 対応関係を明確に表示されます.

▶ **行列 + 固有ベクトル**

$$\begin{pmatrix} 49 & -69 & 99 \\ 23 & -81 & 20 \\ 48 & 1.0 & -87 \end{pmatrix}, \text{固有ベクトル: } \left\{\begin{pmatrix} 0.937\,33 \\ 0.186\,22 \\ 0.294\,51 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 66.398, \left\{\begin{pmatrix} 0.159\,9 \\ 0.887\,94 \\ 0.431\,27 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -67.144, \left\{\begin{pmatrix} 0.540\,43 \\ 0.113\,89 \\ -0.833\,64 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -118.25$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \text{固有ベクトル: } \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$$

この例で 1 は重複度 1 の固有値であり, 2 は重複度 2 の固有値です. 下に示すように行列 A に対する固有ベクトル v と, その固有値 c は $Av = cv$ を満たします.

► **計算**

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

8.6.3 対称行列の正値と負値の判定

正方行列がその共役転置行列と同じ場合, エルミート行列といいます. 実数の要素を持つエルミート行列は, 対称行列と同じです. エルミート行列 A は, A のすべての固有値が正であれば, 正定値対称行列となります. そうでなくれば, 計算エンジン MuPAD は A を不明と判断します.
A のすべての固有値が負値でなければ, 不定エルミート行列 A は半正値と判断されます. すべての固有値が負値ならば負値, すべての固有値が正値でなければ, 半負値と判断します.

► **行列 ＋ 正負値判定**

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ は正値　　$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ は不明

$\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ は正値　　$\begin{bmatrix} -2 & i \\ -i & -2 \end{bmatrix}$ は不明

► **行列 ＋ 固有値**

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, 固有値: $1, 3$　　$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 固有値: $0, 2$

$\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$, 固有値: $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}$　　$\begin{bmatrix} -2 & i \\ -i & -2 \end{bmatrix}$, 固有値: $-3, -1$

8.7 行列と結合したベクトル空間

普通, $m \times n$ 行列 A と結合する 4 つのベクトル空間を考えることができます. 4 つの空間とは行空間, 列空間, そして左右の解空間です. ベクトル空間の基底とは空間に張られた, 線形独立ベクトルのことです. **行列**サブメニューにはベクトル空間の基底を求めるコマンドが用意されています. 基底は唯ひとつ存在するものではなく, 異なる方法を使えば, それだけ異なる基底が見つかります.

8.7.1 行空間

行空間は A の行ベクトルによって作成されるベクトル空間です. 任意の行ベクトルを採用しても, その結果求められる行の基底は同じ数のベクトルを持ち, 同じベクトル空間を作成します. 実際, 行の基底を作成するベクトルの決った選択方法はありません. また, **行列**サブメニューの**行の基底**コマンドを選択すると, 行列の形式によって算出される答えが異なります. 別の基底を求める場合は, **行列**サブメニューから**階段行列**を選択するか, または**ガウス消去法 (整数値)** を実行し, ゼロとなっていない行を選択します.

▶ **行空間の基底を求める**

1. 行列にカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから**行の基底**を選択します.

▶ **行列 + 行の基底**

$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ -36 & 8 & 20 & -94 \end{bmatrix}$, 行の基底:

$\left[\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 97 & 50 & 79 & 56 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 49 & 63 & 57 & -59 \end{bmatrix}\right]$

▶ **行列 + 階段行列**

$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ -36 & 8 & 20 & -94 \end{bmatrix}$, 階段行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{133337}{68264} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{74049}{34132} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3085}{9752} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

この例でゼロを含まない行によって行の基底を求められます.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{133\,337}{68\,264} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{74\,049}{34\,132} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{3085}{9752} \end{bmatrix}.$$

▶ **行列 + ガウス消去法 (整数値)**

$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ -36 & 8 & 20 & -94 \end{bmatrix}$, ガウス消去法 (整数値):

$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 0 & 1085 & -3126 & -1365 \\ 0 & 0 & 136\,528 & -43\,190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

この例でゼロを含まない行によって行の基底を求められます.

$$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1085 & -3126 & -1365 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 136528 & -43190 \end{bmatrix}.$$

▶ **行列 + ガウス消去法**

$$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ -36 & 8 & 20 & -94 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 0 & -\frac{217}{17} & \frac{3126}{85} & \frac{273}{17} \\ 0 & 0 & \frac{19\,504}{155} & -\frac{1234}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この例でゼロを含まない行によって行の基底を求められます.

$$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{217}{17} & \frac{3126}{85} & \frac{273}{17} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{19\,504}{155} & -\frac{1234}{31} \end{bmatrix}$$

8.7.2　列空間

列空間とは A の列によって張られるベクトル空間のことです.

▶ **列空間の基底を求める**

1. 行列にカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから**列の基底**を選択します.

▶ **行列 + 列の基底**

$$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ -36 & 8 & 20 & -94 \end{bmatrix}, \text{列の基底：} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -85 \\ 97 \\ 49 \\ -36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -55 \\ 50 \\ 63 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -37 \\ 79 \\ 57 \\ 20 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

A の列空間の基底は A^T の列空間と同じものになりますから, 先に解説した様々な手法を使って転置行列を求めることができます.

8.7.3　左右の解空間

右側の解空間は $AX = 0$ を満たす $n \times 1$ ベクトル X です. 解空間の基底は**行列**サブメニューにコマンドが用意されています.

▶ **行列 + 解空間の基底**

$$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ -36 & 8 & 20 & -94 \end{bmatrix}, \text{行列 + 解空間の基底:} \begin{bmatrix} -\frac{133337}{68264} \\ \frac{74049}{34132} \\ \frac{3085}{9752} \\ 1 \end{bmatrix}$$

左側の解空間は $YA = 0$ を満たす $n \times 1$ ベクトル Y です. A の転置行列を計算し, その行列の解空間の基底を求めることで左側の解空間が求められます.

► **計算**

$$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ -36 & 8 & 20 & -94 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -85 & 97 & 49 & -36 \\ -55 & 50 & 63 & 8 \\ -37 & 79 & 57 & 20 \\ -35 & 56 & -59 & -94 \end{bmatrix}$$

► **行列 + 解空間の基底**

$$\begin{bmatrix} -85 & 97 & 49 & -36 \\ -55 & 50 & 63 & 8 \\ -37 & 79 & 57 & 20 \\ -35 & 56 & -59 & -94 \end{bmatrix}, \text{解空間の基底:} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

左側の解空間の基底を確認する場合, 転置行列を求めて積を計算します.

► **計算**

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \\ -36 & 8 & 20 & -94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.7.4 直交行列

直交行列とは任意の 2 列の内積がゼロで, さらに任意の列自身の内積が 1 となる実数行列のことです. 直交行列には直交する列が存在します. 直交行列には, 当然, 直交する行も存在します.

► **行列 + 直交行列テスト**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{直交行列? 真}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{直交行列? 偽}$$

8.7.5　QR 分解と直交行列

多くの行と列を持つ実数行列 A は, 積 QR に書き換えられます. ここで,Q は直交行列です. つまり, Q の列は基底です.(任意の 2 つの列の内積は 0 であり, ある列自身の内積は 1 となります.) 次に R は A と同じ階数の, 右上の三角行列です. 仮に元の行列 A が正方行列だとすると, R も正方行列となります. また, A が線形独立の正方行列の場合, R の 逆行列を求めることができます.

► QR **分解を行う**

1. 行列にカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから **QR 分解**を選択します.

► **行列 ＋ QR 分解**

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{17}\sqrt{17} & -\frac{1}{612}\sqrt{17}\sqrt{72} & \frac{1}{18}\sqrt{18} \\ \frac{1}{17}\sqrt{17} & -\frac{1}{153}\sqrt{17}\sqrt{72} & \frac{2}{9}\sqrt{18} \\ 0 & \frac{1}{36}\sqrt{17}\sqrt{72} & \frac{1}{18}\sqrt{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{17} & -\frac{9}{17}\sqrt{17} \\ 0 & \frac{1}{17}\sqrt{17}\sqrt{72} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A が線形独立の列を有する正方行列の場合, 二つの行列 Q と $A = QR$ は同じ列空間を持つことになります.

Example 41 上記の積は, 次に示す線形的な組合せによって作成されたものです.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

および

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

A の列は Q の列の線形的に組合わせたものです. 両方の列空間の次元はともに 2 で, 一方が他方を含む形になっていますから, 両方の列空間が同じであることが分かります.

A の列を Q の基底列に変換することをグラム-シュミットの直交化と呼びます. 一般的に R は右上の三角行列です. 行列 $A = QR$ の最初の k 列によって張られるサブ空間は, 行列 Q の最初の k 列によって張られるサブ空間と同じものになります.

8.7.6　階数と次元

列空間の次元を行列の階数と呼びます. これは行空間の次元や, ゼロ以外の特異値の数と同じです.

► **行列 ＋ 階数**

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \text{階数: } 2$$

► **行列 ＋ 行の基底**

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \text{行の基底: } \left[\begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}\right]$$

► **行列 ＋ 列の基底**

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \text{列の基底: } \left[\begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right]$$

8.8 行列の標準的な形式

行列の集合上の任意の同値関係は, その集合を同値類の集まりに分割します. 行列の正規形あるいは標準形というのは, その同値類に対してある不変量を表示するような, 別の行列を選び出すということで, 通常与えられた行列から, その標準形を具体的に求めるアルゴリズムを伴います.
そのような同値関係として相似と同値があります. 2 つの $n \times n$ 行列 A と B は, $n \times n$ の可逆行列 C があって $B = C^{-1}AC$ となるとき, 相似と呼ばれます. 次に 2 つの $m \times n$ 行列 A と B は一方がもう片方から行, および列の基本形によって得られる時, すなわち, ある可逆行列 $B = QAP$ が成り立つ時, 同値と呼ばれます.
整数上の行列の場合, "可逆" はユニモジュラ, すなわち行列とその逆行列がともに整数であることを意味します. 特に, ユニモジュラ行列の行列式は 1 であることが知られています. 体 F に対する多項式環 $F[x]$ 上の行列の場合, "可逆" は行列のその逆行列の成分がともに $F[x]$ に属することを意味しています.

8.8.1 スミス標準形

PID に存在する行列 A は次の形式の対角行列に等しいと考えられます.

$$diag(1, \ldots, 1, p_1, p_2, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0)$$

ここで各 i, p_i は p_{i+1} の因子とします. 行列 A によって決るこの行列は A のスミス標準形と呼ばれます. A のスミス標準形における対角要素を A の不変要因と呼びます. A のスミス標準形は, 例えば, 行列 $S = QAP$ から得られます. ここで Q と P は PID で逆変換可能なものとします.

整数行列

整数行列 A のスミス標準形は行列 $S = QAP$ で表すことができます．ここで, Q と P はユニモジュラ行列です．つまり, 逆行列の要素も整数となるような行列で, 特異値行列にはなりません．特に, Q と P の行列式は 1 となります．

▶ 行列 ＋ スミス標準形

$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, スミス標準形: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{pmatrix}$

次の行列の積は同値性をよく示しています．2 つの正方行列はユニモジュラ行列です．

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ 3 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 56 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & 27 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F[x]$ 上の行列

体 F 上の 2 つの $n \times n$ 行列 A と B は, その特性行列 $xI - A$ と $xI - B$ が同値である時, 相似でもあります．これらの 2 つの特性行列は単項イデアル整域 $F[x]$ 上の行列であり, 2 つの多項式上の正方行列は, それらが同じスミス標準形を持つ時に限り, 同値であると言えます．行列の要素には多項式を利用できますが, 小数点形式の係数は利用できません．

▶ 行列 ＋ スミス標準形

$\begin{pmatrix} x^2 & -2i\left(x^3+x^2\right)+2x^2 \\ 0 & \sqrt{2}i\left(x^3+x^2\right) \end{pmatrix}$, スミス標準形: $\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2+x^3 \end{pmatrix}$

2 つの行列が相似であるか否かを判定するのにスミス標準形を利用します．フィールドは有理数や, 有理数の有限フィールド拡張としてもかまいません．次にその例を示します．

Example 42 行列の相似性を調べます．$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{61}{31} & -\frac{319}{31} \\ -\frac{24}{31} & \frac{94}{31} \end{bmatrix}$$

特性行列は次のようになります．

$$xI - A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{bmatrix}$$

$$xI - B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{61}{31} & -\frac{319}{31} \\ -\frac{24}{31} & \frac{94}{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-\frac{61}{31} & \frac{319}{31} \\ \frac{24}{31} & x-\frac{94}{31} \end{bmatrix}$$

スミス標準形は両方とも次のようになります．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2-5x-2 \end{bmatrix}$$

328 ページにも例題があります.

8.8.2 エルミート行列

ある PID に値をとる行列 A が与えられた時, A のエルミート行列は行階段行列 $H = QA$ のことで, Q はその PID 上の行列環における可逆行列です. 各行の, 最初のゼロでない成分は同伴でない元の, 予め指定されたある集合の要素であり, その上の成分は, 最初のゼロでない成分を法とする, 環の代表元からなる集合から, 取り出すことができます. PID が有理整数環である場合, 各行の最初がゼロでない成分は, ある正整数 n_{ij} であり, その上の成分はしばしば集合 $\{0, 1, 2, ..., n_{ij} - 1\}$ から選ばれます.

▶ **行列 + エルミート形式**

$\begin{pmatrix} 7 & 34 & 46 \\ 4 & 20 & 27 \end{pmatrix}$, エルミート形式: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, エルミート形式: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

8.8.3 コンパニオン行列と有理標準形

ある n 次の単位多項式 $a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ のコンパニン行列とは $n \times n$ 行列で, 対角成分のひとつ下が 1, 最終列が

$$\begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}^T$$

となります. 他の入力要素はゼロとなります.

▶ **多項式 + コンパニオン行列**

$x^4 + 3x^2 - 2x + 1$, コンパニオン行列: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$x^3 + ax^2 + bx + c$, コンパニオン行列: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -c \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -a \end{bmatrix}$

次に示す最初の行列は, それ自身の特性および最小多項式のコンパニン行列です.

▶ **行列 + 最小多項式**

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -e \end{pmatrix}$, 最小多項式: $X^5 + sX^4 + dX^3 + cX^2 + bX + a$

有理標準形はフロベニウス形とも呼ばれます．これは各ブロックがその最小および特性多項式のコンパニオン行列になっているのを，対角線上に並べたものです．各ブロックの最小多項式は，元の行列の特性多項式の因数になっています．有理標準形のブロックを決定する多項式は，順に次の多項式を割りきることができます．

行列サブメニューから**有理標準形**を選択すると，正方行列の分解と B を有理標準形として PBP^{-1} の形で与えることができます．行列 B の成分は，元の行列の成分を含む複素数の最小部分環から作成されます．可逆行列 P と P^{-1} の成分は元の行列の成分を含む複素数の最小部分体から作成できます．例えば，元の行列の成分が整数ならば，有理標準形の成分も同じであり，可逆行列の成分は有理数となります．

► **行列 ＋ 有理標準形**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 30 \\ 0 & 4 & 66 \\ 0 & 7 & 102 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{17}{9} & \frac{11}{9} \\ 0 & \frac{7}{54} & -\frac{2}{27} \end{bmatrix}$$

上記の有理標準形は最小多項式 $X^3 - 15X^2 - 18X$ のコンパニオン行列です．同じ行列からコンパニオン行列を求めてみます．

► **計算**

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -4 & x-5 & -6 \\ -7 & -8 & x-9 \end{bmatrix}$$

► **行列 ＋ スミス標準形**

$$\begin{bmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -4 & x-5 & -6 \\ -7 & -8 & x-9 \end{bmatrix}, \text{スミス標準形:} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18x - 15x^2 + x^3 \end{bmatrix}$$

上記，スミス標準形の多項式の係数は，先程，計算した有理標準形と同じものになっています．

► **行列 ＋ 有理標準形**

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

有理標準形には 2 つのブロックが存在します．

1. $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ のコンパニオン行列 $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
2. $X - 2$ のコンパニオン行列 $[2]$．

► **行列 ＋ 特性多項式，因数分解**

$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$, 特性多項式:

$$X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$$

► **行列 ＋ 最小多項式, 因数分解**

$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$, 最小多項式: $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

先の行列 A の特性行列 $xI - A$ は

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{bmatrix}$$

► **行列 ＋ スミス標準形**

$\begin{bmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{bmatrix}$, スミス標準形: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-3x+2 \end{bmatrix}$

► **因数分解**

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-3x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x-2) & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)(x-2) \end{bmatrix}$

この例からスミス標準形, 特性行列, 有理標準形の関係が分かります.

Note　A の特性行列のスミス標準形は, A の有理標準形を決定する特性多項式の因数となっています.

8.8.4　ジョルダン行列

行列サブメニューから**ジョルダン行列**を選択すると正方行列 PJP^{-1} の因数分解を行います. ここで J はジョルダン行列と呼ばれます. この行列は基本ジョルダン行列から作成されるブロック対角行列です. $n \times n$ 行列 A のジョルダン行列は次の通りです.

$$J(A) = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

ここで, $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, そして対角ブロック $J_{n_i}(\lambda_i)$ は $n_i\times n_i$ の基本ジョルダン行列です. 次にその形式を示します.

$$J_{n_i}(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$P^{-1}AP$ の形式のすべての行列では, 行列 $J(A)$ が A に似ており, 形式がほぼ対角行列となります.

▶ 行列 + ジョルダン形式

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

よって

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

のジョルダン形式は

$$J\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}+2 \end{bmatrix}$$

ここで $J(A)$ は対角行列です. 従って, 各 $J_{n_i}(\lambda_i)$ は 1×1 行列となります. 行列 A の特性および, 最小多項式は

$$-4+10X-6X^2+X^3=(X-2)\left(X-2-\sqrt{2}\right)\left(X-2+\sqrt{2}\right)$$

ここで解 $\left\{2,\ 2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}\right\}$ はジョルダン行列の対角要素となっています.

▶ 行列 + ジョルダン行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ジョルダン行列は

$$J\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ここで $J_{n_1}(\lambda_1) = J_{n_2}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 最小多項式のコンパニオン行列は

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

行列 A の特性多項式 $(X-2)^4$ の解は $\{2,\ 2,\ 2,\ 2\}$, 最小多項式は $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.

► **行列 ＋ ジョルダン行列**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

この行列はジョルダン行列です．最小多項式は $X-2$ で, 特性多項式は $(X-2)^4$ です．これは前述の特性多項式と同じです．しかし, 最小多項式とジョルダン行列は異なっています．

► **行列 ＋ ジョルダン行列**

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & -i \end{bmatrix}$$

ここで $J_{n_1}(\lambda_1) = [i]$ と $J_{n_2}(\lambda_2) = [-i]$ は 1×1 行列です．行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ の特性および最小多項式は $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ です．

8.9 行列の分解

行列をシンプルな形式の行列の積に変換する, 分解という機能にはいくつかの種類があります．これらは数値行列の計算に有用です．

8.9.1 特異値分解 (SVD)

$m \times n$ の実数行列 A は積 $A = UDV$ の形に分解することができます．ここで, U と V は実数の直交 $m \times m$ および $n \times n$ 行列です．さらに D は主対角の最初の階数 A に正数が入り, 残りの要素がゼロである対角行列です．D の主対角の入力要素は A の特異値と呼ばれます．この分解 $A = UDV$ を A の特異値分解と呼びます．

► **行列 ＋ 特異値**

$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1.0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, 特異値: $[10.053, 4.6119, 3.5588]$

$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 特異値: $[8.8882, 3.7417]$

► **行列 + 特異値分解**

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72152 & 0.19119 & 0.66547 \\ -0.45504 & -0.59348 & 0.66387 \\ -0.52187 & 0.78181 & 0.34121 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 10.053 & 0 & 0 \\ 0 & 4.6119 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5588 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.44273 & -0.61841 & -0.64927 \\ 0.76285 & 0.64032 & -8.9706 \times 10^{-2} \\ 0.47122 & -0.45558 & 0.75525 \end{bmatrix}$$

これらの 2 つの計算結果には近似値が含まれているので, 直交行列テストを行うことはできません. このような場合は列の内積を求めて直行の度合いを観察します.

► **行列 + 特異値, 行列 + 特異値分解**

$\begin{pmatrix} 1 & 2.0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 特異値: $[5.4650, 0.36597]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40455 & -0.91451 \\ 0.91451 & 0.40455 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.4650 & 0 \\ 0 & 0.36597 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.57605 & 0.81742 \\ 0.81742 & -0.57605 \end{pmatrix}$$

8.9.2　PLU 分解

$m \times n$ の実数行列または虚数行列 A は積 $A = PLU$ に分解することができます. ここで L と U は $m \times m$ および $m \times n$ 行列の下三角, 上三角行列です. L の主対角は 1 で, P は置換行列です. この分解 $A = PLU$ を A の PLU 分解と呼びます. 行列 P と L には逆行列があり, 行列 U は行列 A の階段行列です.

► **行列 + PLU 分解**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .532 & 1.95 \\ 1.5 & .0013 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.8195 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.532 & 1.95 \\ 0 & -5.4968 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5i & \sqrt{2} \\ -7 & 2\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{5}i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5i & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{2}{3}\pi - \frac{7}{5}i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

最初の例の上三角行列は次のように求めることもできます.

► **行列 + ガウス消去法 (整数値)**

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, ガウス消去法 (整数値): $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

一般的に PLU 分解における上三角行列はガウス消去法によって計算した元の行列の階段行列になります.

8.9.3 QR 分解

$m \geq n$ であるような実数 $m \times n$ の行列 A は積 QR に書き換えられます. ここで, Q は, 直交の $m \times m$ 行列 (Q の列は直交です. —つまり QQ^T は, $m \times m$ となる行列です.) で, R は A と同じ階数の, 右上の三角行列です. 仮に元の行列 A が正方行列だとすると, R も正方行列となります. また, A が線形独立の正方行列の場合, R の逆行列を求めることができます.

▶ QR **分解を行う**

1. 行列にカーソルを移動します.
2. **行列**サブメニューから **QR 分解**を選択します.

▶ **行列 + QR 分解**

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{70}\sqrt{5}\sqrt{28} & \frac{3}{14}\sqrt{14} \\ 0 & -\frac{1}{14}\sqrt{5}\sqrt{28} & \frac{1}{7}\sqrt{14} \\ \frac{3}{10}\sqrt{10} & -\frac{1}{70}\sqrt{5}\sqrt{28} & -\frac{1}{14}\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & -\frac{1}{5}\sqrt{10} \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{28} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.9.4 コレスキ分解

対称 $(A = A^T)$ であり, かつ, 正値 (全ての固有値が正) である実数正方行列に対しては, 効率的に三角分解を実行できる機能, コレスキ分解が用意されています. 他の分解機能に比べ線形方程式をいち早く解くことができます.
$n \times n$ の実数対称正値行列 A は $A = GG^T$ のように積の形に変換できます. ここで G は実数正値の下三角 $n \times n$ 行列です. この $A = GG^T$ に変換するすることを A のコレスキ分解と呼びます.

▶ **行列 + コレスキ分解**

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 \\ -1.0 & 2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4142 & 0 \\ -0.70711 & 1.2247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4142 & -0.70711 \\ 0 & 1.2247 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{30}\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{30}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

8.10　練習問題

1. ベクトル $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ と $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ が $\mathbb{R}^3$ で平面を張っています．平面に対する投影行列 P を求めてください．また, ゼロに投影される非ゼロベクトル b を求めてください.
2. 次の行列の特性多項式, 最小多項式, 固有値, 固有ベクトルを求めてください．また, これらの関係と固有値の重複関係について調べてください.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$
3. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とする場合, 方程式 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ のすべての解 $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は A の列空間, A の行空間, A の解空間, 平面, 直線, 点のどれになるか調べてください.
4. xy 平面を回転させる行列を $A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とします．この時 $A(\theta)\,A(\varphi) = A(\theta+\varphi)$ および $A(-\theta) = A(\theta)^{-1}$ であることを確認してください．行列の積と三角恒等式を利用してください.
5. 4×4 のファンデルモンド行列
$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix}$$
の行列式が $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_4-x_3)$ となることを確認してください．ファンデルモンド行列の詳細は 295 ページを参照してください.

8.11　練習問題の答え

1. ベクトル $u = [1,1,0]$ と $v = [1,1,1]$ によって張られた $\mathbb{R}^3$ における平面への投影行列 P は積 $P = A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$ となります．ここで u と v は A の列です.
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Pw は $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル $w = (x,y,z)$ に対する u と v の線形結合です．従って P は u と v によって張られる平面上に $\mathbb{R}^3$ を作成します.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ z \end{bmatrix} = \left(\frac{x+y}{2} - z \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ゼロに投影される非ゼロベクトル b を求める場合, 行列 P にカーソルを移動して**行列**サブメニューから**解空間の基底**を選択します.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{解空間の基底:} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

2. 行列 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ の特性多項式は $(X-2)^4$, 最小多項式は $4 - 4X + X^2 = (X-2)^2$, 固有値と固有ベクトルは

$$\left\{ 2, 4, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

最小多項式は特性多項式の因数です. 固有値 2 は特性多項式 $(X-2)^4$ の 4 重複解であり, 2 つの線形独立固有ベクトルを持っています.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. この方程式の解は $\mathbb{R}^3$ に存在し, A の列空間は $\mathbb{R}^2$ のサブセットです. 従って, 解は A の列空間にはなりえません. 解は解空間の定義によって A の解空間となります. 結果的に $\mathbb{R}^3$ のサブスペースとなります. A の最初の 2 行の積は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ であり, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ではありません. よって, A の行空間にもならないことが分かります.

目的とする $\mathbb{R}^3$ のサブ空間が点, 線, 平面のどれであるかを調べます. **求解**サブメニューから**解**コマンドを選択します.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{解:} \begin{bmatrix} -2t_1 \\ t_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

よって, サブ空間は直線です. この直線は原点と点 $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を通過します.

4. 順番に次の操作を行ってください.
   - **新しい定義**: $A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
   - **計算**:

$$A(\theta)\,A(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix}$$

   - 行列にカーソルを移動し, **結合**サブメニューから**三角関数**を選択します.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix}$$

これにより最初の恒等式が証明できました. 2 番目の式を確認するために次の操作を行ってください.

   - **計算**

$$A(\theta)\,A(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   - **計算**

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

   - 行列にカーソルを移動し, **簡単化**, または**結合**サブメニューから**三角関数**を選択します.

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. **計算**コマンドを実行し, さらに**因数分解コマンド**を実行します.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_4 - x_3)$$

第 9 章

ベクトル解析

ベクトル解析とは空間で点の集合を作成する関数の微積分計算を行うことです．この考え方は, 曲線に沿って移動する物体を動かす仕事量や, 曲面を流れる流体量を計算することに応用できます．ここではベクトルと, 微積分におけるベクトルの利用方法について解説します．

9.1　ベクトル

ベクトルとは大きさと, その方向を示す量のことです．方向は矢印で, 大きさは線分の長さで表します．二本の同じ長さの矢印が並行に並んでいる場合, これらのベクトルは全く同じものであると考えます．ですから, ベクトル $\mathbf{v}$ は, 小さな同じベクトルの集合であるとも言えます．2 次元ベクトルは $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ という実数のペアで構成されます．同様に, 3 次元ベクトルは $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と言う 3 つの実数の組合せです．ですから, n 次元ベクトルといえば, 実数による組合せ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ となります．ここで, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ をベクトル a の成分と呼びます．

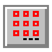
9.1.1　ベクトルの表記

ベクトルの表記方法には次のような方法があります．

- カッコを使った n 次元ベクトル: $(2, -1, 0)$, (x_1, x_2, x_3), $[3, 2, 1]$, $[x_1, x_2, x_3]$
- $1 \times n$ 行列: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 & 17 & -8 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$
- $n \times 1$ 行列: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 35 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

計算結果の表示方法は入力時の記述方法に依存します．ベクトルの入力時に利用したカッコが出力の時も利用されます．数式の記述を明確にする意味で, 自分なりにベクトルの記述方法は統一しましょう．ベクトルに行った操作の結果は行列に反映されます．

► **行列形式でベクトルを記述する**

1. アイコン  をクリック, または**挿入** + **行列**とします．
2. 行数を (または列数) を 1 にし, 列数 (または行数) をベクトルの次元と同じ数にします．

3. 入力ボックスにベクトル成分を入力します.
4. マウスでベクトルを選択し, ペアカッコのアイコンをクリックします.

9.1.2　ベクトルの和とスカラーの乗算

2 つのベクトル $[x_1, x_2, ..., x_n]$ と $[y_1, y_2, ..., y_n]$ の和は次のようになります.

$$[x_1, x_2, ..., x_n] + [y_1, y_2, ..., y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n]$$

スカラー a とベクトル $[x_1, x_2, ..., x_n]$ の乗算は次のようになります.

$$a\,[x_1, x_2, ..., x_n] = [ax_1, ax_2, ..., ax_n]$$

▶ **ベクトルの和を計算する**

- 数式モードで式を入力し, **計算**を実行します.

▶ **計算**

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \end{bmatrix}$

$(6, -1 + i) + (2 - 3i, 3) = \begin{bmatrix} 8 - 3i & 2 + i \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$　　$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

▶ **ベクトルにスカラーを掛ける**

- 数式モードで式を入力し, **計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

$a\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 & ax_2 & ax_3 \end{bmatrix}$　　$6\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & -30 \end{bmatrix}$

$i\sqrt{3}\begin{bmatrix} 2 & -6i & 5 - 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i\sqrt{3} & 6\sqrt{3} & (3 + 5i)\sqrt{3} \end{bmatrix}$

9.1.3　ドット積

ドット積に利用するドット記号は, 記号キャッシュツールバーと二項演算子のドロップダウンパネル  に用意されています. 2 つの実数ベクトル $(a_1, a_2, ..., a_n)$ と $(b_1, b_2, ..., b_n)$ の**ドット積**(または**内積**) は次のように求めることができます.

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot (b_1, b_2, ..., b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

複素数ベクトルの標準的な内積は次のようになります.

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot (b_1, b_2, ..., b_n) = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \cdots + a_n b_n^*$$

ここで $b^* = x - iy$ で，これは $b = x + iy$ の共役複素数です．実数 b に対しては $b^* = b$ ですから，この 2 つの定義は両方とも成り立ちます．内積は次のように行列の積として計算することもできます．

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot (b_1, b_2, ..., b_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{bmatrix}$$

ドット積を求める場合は数式を入力して**計算**コマンドを実行します．

► **計算**

$(1, 2, 3) \cdot (3, 2, 1) = 10$ 　　　$[3x, -1, 5] \cdot [1, 1, 1] = 3x + 4$

$(1 + 2i, -3i) \cdot (5, 1 - i) = 8 + 7i$ 　　　$\begin{pmatrix} 1 + 2i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ (1 - i)^* \end{pmatrix} = 8 + 7i$

デフォルトで複素数解を返します．関数 assume (参照 109 ページ) を使って，このデフォルトを変更できます．

► **計算**

assume (complex) $= \mathbb{C}$

$(u, v, w) \cdot (x, y, z) = ux^* + vy^* + wz^*$

assume (real) $= \mathbb{R}$

$(u, v, w) \cdot (x, y, z) = ux + vy + wz$

次に $n = 3$ の時のドット積の例を示します．最初に次のように定義します．

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c = [3, 2, 1], d = (2, -1, 0)$$

関数定義サブメニューから**新しい定義**コマンドを選択します．

► **計算**

$a \cdot c = 10$ 　　　$a \cdot b = -2$ 　　　$c \cdot d = 4$

9.1.4 外積

3 次元ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$ と $b = (b_1, b_2, b_3)$ の外積は次のように定義されます．

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

乗算の記号を入力する場合は記号キャッシュツールバーか，またはドロップダウンパネル  を利用します．

ここで，ベクトル $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = [3, 2, 1]$, $d = (2, -1, 0)$ と定義した外積の計算例を示します．

► **計算**

$a \times b = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$　$a \times c = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$　$c \times d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.35 \\ -0.73 \\ 1.2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.32 \\ -0.77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1781 \\ 1.2895 \\ 0.7325 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

3 次元ベクトルを次の基底を使って表記することがあります.

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$
$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$
$$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

2 つのベクトル $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ と $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ の外積は行列式を使って次のように求められます.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}\,(a_1b_3 - b_1a_3) + \mathbf{k}\,(a_1b_2 - a_2b_1)$$

ベクトル 3 重積

ベクトルの外積からは新たなベクトルが作成されます. 従って, 複数の乗算を繰返し行うことが可能です. ベクトル a, b, c, d を使ったベクトル 3 重積の計算方法を紹介します. カッコの利用方法によって, それぞれ異なった値が算出されます.
ドット積は普通, 左から右に向かって順番に計算されます.

► **計算**

$a \times b \times c = [8, -4, -16]$　　$c \times a \times b = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

$a \times (b \times c) = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -8 \end{pmatrix}$　　$(a \times b) \times c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -16 \end{pmatrix}$

$a \times ((b \times c) \times d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$(a \times (b \times c)) \times d = \begin{pmatrix} -8 & -16 & -24 \end{pmatrix}$

カッコ内の計算結果だけを求める場合は目的箇所を選択し, CTRL キーを押しながら**計算**コマンドを実行します. これは**部分計算**と呼ばれる機能です. 次にその使用例を示します.

► CTRL + **計算, 計算**

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} -7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -5 & 30 & 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 214 & -51 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 & 2 & 8 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 34 & -5 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37 & 139 & 63 \end{bmatrix}$$

Tip　カッコの利用方法には十分気を付けてください. いつも, 同じルールに従ってカッコを使うようにしてください. 数式に不明瞭な記述が存在することの無いように, できるだけカッコを付けて数式を記述します.

3 重スカラー積

トッド積とスカラー積を組合せる場合は, カッコを使って乗算の関係を明確に記述します.

▶ **計算**

$(1,0,1)\cdot((1,2,3)\times(3,2,1)) = -8$　　$((1,0,1)\times(1,2,3))\cdot(3,2,1) = -8$

$(1,0,1)\cdot(1,2,3)\times(3,2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$(1,0,1)\times(1,2,3)\cdot(3,2,1) = -8$　　$(1,2,3)\times(3,2,1)\cdot(1,0,1) = 64$

Note　3 重スカラー積には幾何学的関係が存在します. つまり, 3 つのベクトル A, B, C によって構成される平行六面体の体積は $|A\cdot(B\times C)|$ となります.

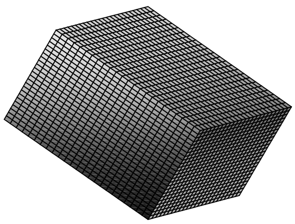
Example 43　ベクトル $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ による平行六面体の体積は

$$|(1,1,0)\cdot[(1,0,1)\times(0,1,1)]| = 2$$

この場合, 体積は 3 重スカラー積の順番に関係しません.

$$|(1,0,1)\cdot[(1,1,0)\times(0,1,1)]| = 2$$
$$|(0,1,1)\cdot[(1,1,0)\times(1,0,1)]| = 2$$

平行六面体は次のようにプロットできます. 最初に $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ をプロットしプロット範囲を $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$ に変更してプロットを修正します. そこに次のベクトル $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と $s\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ をドラッグします.



横回転: 70　　**縦回転**: 80

3 重積 $(a_1, a_2, a_3) \cdot [(b_1, b_2, b_3) \times (c_1, c_2, c_3)]$ は次のように行列で表すことができます.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

この例からも分かるように, 平行六面体の頂点の座標値が整数なら, 体積も整数となります.

9.1.5　ベクトルノルム

正の整数 n および ∞ に対するベクトルノルム $\|v\|_n$ は次にようになります.

$$\|v\|_n = \left(\sum |v_i|^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \|v\|_\infty = \max(|v_i|)$$

ここで v_i は実数または複素数です.

▶　**ベクトルノルムを計算する**

1. 数式オブジェクトツールバーのカッコボタン  をクリック, または, **挿入** + **カッコ**としてノルム記号を選択します. OK をクリックします.
2. アイコン  をクリックするか, **挿入** + **下付き文字**として, 正の整数または記号 ∞ を入力します.
3. ベクトルにマウスカーソルを置き, **計算**コマンドを実行します.

▶　計算

$\|(a,b,c)\|_1 = |a| + |b| + |c|$　　$\|(-1,2,1)\|_5 = \sqrt[5]{34}$

$\|(a,b,c)\|_3 = \sqrt[3]{|a|^3 + |b|^3 + |c|^3}$　　$\|(5,-1.9,7)\|_8 = 7.0576$

$\|(a,b,c)\|_\infty = \max(|a|, |b|, |c|)$　　$\|[8,-10,2+i]\|_\infty = 10$

$\left\|\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\right\|_4 = \sqrt[4]{|a|^4 + |b|^4 + |c|^4}$　　$\left\|\begin{pmatrix} 2+3i & 4-i \end{pmatrix}\right\|_4 = \left\|\sqrt[4]{458}\right\|$

デフォルト $\|v\|$ は 2 ノルムであり, これはユークリッドノルムとも呼ばれます. このノルムは下付き文字を必要としません.

行列サブメニューのコマンドから 2 ノルムを作成できます.

▶　**行列** + **ノルム**

$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, 2 ノルム: $\sqrt{aa^* + bb^* + cc^*}$　　$[8,-10,2+i]$, 2 ノルム: 13

結果は, 設定により, 実数環境と複素数環境で異なります. デフォルトでは複素数の結果となります.

▶　**計算**

$\text{assume}(\text{real}) = \text{real}$

$\left\|\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$　　$\left\|\begin{pmatrix} 2+3i & 4-i \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{30}$

assume (complex) = complex

$\left\|\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{aa^* + bb^*}$ $\left\|\begin{pmatrix} 2+3i & 4-i \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{30}$

最初に定義を作成してから, 例題を計算してください.

► **関数定義 + 新しい定義**

$v = [3, 2, 1]$

► **計算, 数値計算**

$\|v\|_1 = 6$ $\|v\|_2 = \sqrt{14} = 3.7417$ $\|v\|_6 = \sqrt[6]{794} = 3.043$

$\|v\|_{10} = \sqrt[10]{60\,074} = 3.005\,2$ $\|v\|_{20} = \sqrt[20]{34878\,32978} = 3.000045103$

$\|v\|_\infty = 3$

これらの計算例から, ベクトル v について次のことが予測できます.

$$\lim_{n\to\infty} \|v\|_n = \|v\|_\infty$$

Example 44 頂点を $(0,0)$, (a_1, a_2), (b_1, b_2), $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ とする平行六面体の平面内の面積は次にようになります.

$$\|\,(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0)\,\|$$

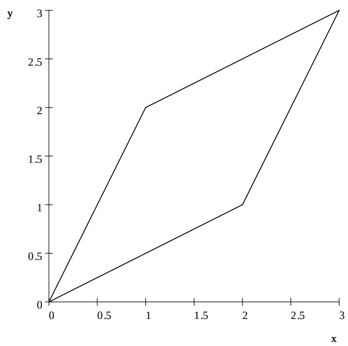
よって, ベクトル $(1,2)$ と $(2,1)$ によって張られる平面上の面積は

$$\|(1,2,0) \times (2,1,0)\| = 3$$

この様子をプロットしたものを次に示します.

► **2D プロット + 直角座標, 各軸で同じスケーリングを採用する**

$(0, 0, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 0)$



ここで θ をベクトル A と B の角度とする時, $A \cdot B = \|A\|\,\|B\|\cos\theta$ となります. したがって, 2 つのベクトルの角度を調べるときにドット積を利用できます.

► **計算**

$(1,2,-3)\cdot(-2,1,2)=-6$ $\qquad$ $\|(1,2,-3)\|\,\|(-2,1,2)\|\cos\theta = 3(\cos\theta)\sqrt{14}$
ベクトル $(1,2,-3)$ と $(-2,1,2)$ の間の角度は $-6 = 3(\cos\theta)\sqrt{14}$ の基本的な解によって求められます. この場合, **ツール + 計算エンジン設定**で一般タブを表示し, 基本的な解だけをチェックします.

► **求解 + 解**

$-6 = 3(\cos\theta)\sqrt{14}$, 解: $\left\{\pi + 2X_2\pi - \left(\arccos\frac{1}{7}\sqrt{14}\right) \mid X_2 \in \mathbb{Z}\right\} \cup$
$\left\{2X_4\pi - \pi + \left(\arccos\frac{1}{7}\sqrt{14}\right) \mid X_4 \in \mathbb{Z}\right\}$
よって, 2 つのベクトル間の角度はおおよそ 2.1347 ラジアンとなります.

9.1.6　空間 $\mathbb{R}^3$ における平面と直線

点 (x_0,y_0,z_0) を通過し, ベクトル (a,b,c) と直交する平面のベクトル方程式は次のようになります.

$$[(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)]\cdot(a,b,c)=0$$

► **点 (x_0,y_0,z_0), (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) を通過する平面の方程式を求める**

1. ベクトルの差 $u=(x_0,y_0,z_0)-(x_1,y_1,z_1)$ と $v=(x_0,y_0,z_0)-(x_2,y_2,z_2)$ を計算します.
2. 外積 $n=u\times v$ を計算します.
3. 方程式 $[(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)]\cdot n=0$ を簡単化します.

Example 45 点 $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ を通過する平面の方程式を求めます. ベクトルの差を計算します.

$$\begin{aligned} u &= (1,1,0)-(1,0,1) = (0,1,-1) \\ v &= (1,1,0)-(0,1,1) = (1,0,-1) \end{aligned}$$

外積を求めます.

$$n = (0,1,-1)\times(1,0,-1) = (-1,-1,-1)$$

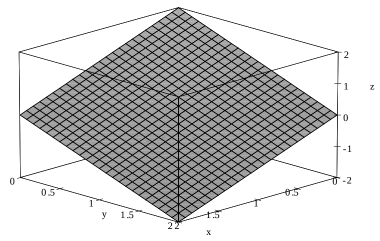
方程式を簡単化します.

$$\begin{aligned} [(x,y,z)-(1,1,0)]\cdot(-1,-1,-1) &= 0 \\ -x+2-y-z &= 0 \\ x+y+z &= 2 \end{aligned}$$

z の最初の解で平面をプロットします.

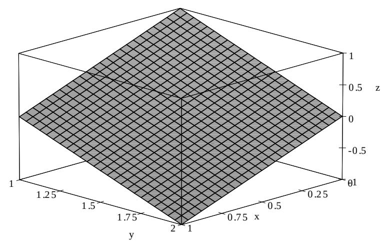
► **求解 + 解, 変数:** z
$x+y+z=2$, 解: $2-y-x$

► **3D プロット + 直交座標**
$2-y-x$ (表示範囲: $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 2$)



この平面のベクトル形式は $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ によって求められます.

► **3D プロット ＋ 直交座標**
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (表示範囲: $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$)



点 (a, b, c) を通過し, 方向ベクトルが $m = (u_1, u_2, u_3)$ である直線の方程式は次のようになります.

$$(x, y, z) = (a, b, c) + t\,(u_1, u_2, u_3)$$

これは次のパラメトリック方程式と同値です.

$$\begin{aligned} x &= a + tu_1 \\ y &= b + tu_2 \\ z &= c + tu_3 \end{aligned}$$

Example 46 2 点 $(1, 2, 3)$ と $(2, 1, 2)$ を通過する直線の方程式を求めます. はじめに, 直線に平行なベクトル

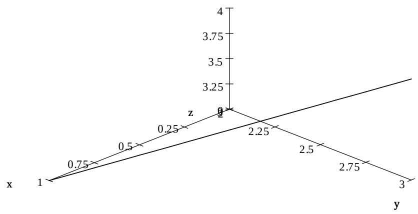
$$m = (1, 2, 3) - (2, 1, 2) = (-1, 1, 1)$$

を計算し, 方程式を簡単化します.

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t\,(-1, 1, 1) = (1 - t, 2 + t, 3 + t)$$

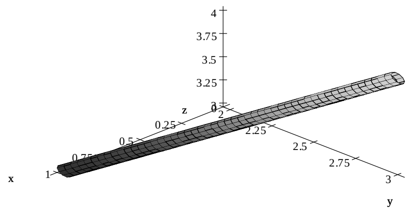
これをプロットしたものを次に示します.

▶ **3D プロット ＋ 直角座標**
$(1-t, 2+t, 3+t)$



太さのある環を使ってプロットすると次のようになります.

▶ **3D プロット ＋ 環 (半径**$= 0.05$**)**
$(1-t, 2+t, 3+t)$



9.2　勾配, 発散, 回転

ベクトル計算には特に重要な 3 つの操作があります.

- 勾配: スカラー場に対して定義され、場の各方向への変化率を記述します. スカラー場の勾配がベクトル場です.
- 発散: 、ベクトル場の各点における量の変化の傾向を記述します.
- 回転: 各点の周りでベクトル場が回転しようとする傾向を記述します.

勾配, 発散, 回転はそれぞれ “∇”, “∇·”, “∇×” と記述され, 計算を実行する場合は**計算**コマンドを利用します. 従って, これらの計算機能は**ベクトル解析**メニューには用意されていません. 記号 ∇ はその**他の記号**パネル  にあるナブラ  をクリックするか, または, **記号キャッシュ**ツー

ルバーから直接クリックします.

9.2.1 勾配

いま $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が n 個の変数を持つスカラー関数とすると, ベクトル

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2, \ldots, c_n), \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n1}}(c_1, c_2, \ldots, c_n)\right)$$

は点 $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ における f の勾配であり, ∇f と記述します. ここで $n = 3$ とすると, 点 (a, b, c) におけるベクトル ∇f は点 (a, b, c) における平面 $f(x, y, z) = f(a, b, c)$ に垂直なベクトルになります.

► **関数** $f(x, y, z) = xyz$ **の勾配を求める**

- 式 $\nabla f(x, y, z)$ にマウスカーソルを置き, **計算**コマンドを実行します.
  または
- 式 $f(x, y, z)$ にマウスカーソルを置き, **ベクトル解析** + **勾配** とします.

► **計算**

$$\nabla xyz = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

► **ベクトル解析** + **勾配**

xyz, 勾配 $\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

定義した関数に対しても勾配の演算子を実行することができます. 例えば, 関数 f を $f(x, y, z) = xyz$ を定義します. そして, $\nabla f(x, y, z)$ に対して**計算**コマンドを実行すれば勾配が求められます.

► **計算**

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}$$

デフォルトの基底変数は x, y, z です. 別の基底変数を利用する場合は, **ベクトル解析** + **基底変数の設定**とします. そして目的の変数名を入力します. 基底変数は数式モードを示す赤い色で, さらに, 赤いコンマで区切って入力します.
基底変数を変更する場合は新たな変数でリセットします.

► **ベクトル解析** + **基底変数の設定**

- u, v, w

次の例で u, v, w を基底変数として設定すると数式処理エンジンは c を定数として処理します.

▶ **計算**

$$\nabla\left(cuv+v^2w\right)=\begin{bmatrix} cv \\ cu+2vw \\ v^2 \end{bmatrix}$$

次の例では, xy を 3 変数関数の値として処理します.

▶ **ベクトル解析 ＋ 基底変数の設定**

- x, y, z

▶ **計算**

$$\nabla xy=\begin{bmatrix} y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note　物理学では f はポテンシャルエネルギーを, ∇f は力を表します.

9.2.2 **発散**

ベクトルフィールドはベクトルの値を持つ関数で表します. いま,

$$F(x,y,z)=[p(x,y,z),q(x,y,z),r(x,y,z)]$$

がベクトルフィールドだとすれば, 次のスカラー

$$\nabla\cdot F=\frac{\partial p}{\partial x}(a,b,c)+\frac{\partial q}{\partial y}(a,b,c)+\frac{\partial r}{\partial z}(a,b,c)$$

を点 (a,b,c) における F の発散と呼ばれます. 記号 ∇ はベクトル演算子なので, ドット積の表記と同じように利用できます.

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

▶ **ベクトルフィールド**$F(x,y,z)$ **の発散を求める**

- 式 $\nabla\cdot F(x,y,z)$ にマウスカーソルを置き, **計算**コマンドを実行します.

フィールド変数にはデフォルトでアルファベット順に x, y, z を使います. フィールドラベルに他の変数名を利用する場合は, **ベクトル解析**サブメニューの**基底変数の設定**コマンドを利用します. 次の例題では**関数定義**+ **新しい定義**コマンドを利用してベクトルフィールドを定義します.

$$F=[yz,2xz,xy] \qquad G=(xz,2yz,z^2)$$

$$H=\begin{bmatrix} yz & 2xz & xy \end{bmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ 2xz \end{pmatrix}$$

ここで F と G は 3 つの頂点で, H は 1×3 行列, J は 3×1 行列です. **計算**コマンド, または, **ベクトル解析 + 発散**として発散を求めます.

▶ **計算**

$\nabla \cdot F = 0$　　$\nabla \cdot G = 5z$　　$\nabla \cdot \left(xz, 2iyz + x, z^2\right) = (3 + 2i)\, z$

$\nabla \cdot (xy, x, 0) = y$　　$\nabla \cdot H = 0$　　$\nabla \cdot J = 5x$

$\nabla \cdot (a, b, c) = 0$　　$\nabla \cdot \left[ax, bxy, cz^2\right] = a + bx + 2cz$

▶ **ベクトル解析 + 発散**

$[yz, 2xz, xy]$, 発散 0　　$\begin{bmatrix} yz & 2xz & xy \end{bmatrix}$, 発散 0

$(xz, 2yz, z^2)$, 発散 $5z$　　$\begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ 2xz \end{pmatrix}$, 発散 $5x$

9.2.3　回転

いま $F(x, y, z) = (p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z))$ をベクトルフィールドとすれば, F の回転は

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

となります. フィールド変数にはデフォルトでアルファベット順に x, y, z を使います. フィールドラベルに他の変数名を利用する場合は, **ベクトル解析**サブメニューの**基底変数の設定**コマンドを選択します. 次の例題では**発散**のセクションで定義したベクトルフィールド F を利用します. 回転を計算する場合は**計算**コマンド, または**ベクトル解析 + 回転**とします.

▶ **計算**

$$\nabla \times \begin{pmatrix} yz & 2xz & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad \nabla \times F = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ 2xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ y \end{pmatrix} \qquad \nabla \times \begin{bmatrix} ax^2 \\ bxy \\ 2icxz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2icz \\ by \end{bmatrix}$$

▶ **ベクトル解析 + 回転**

$(yz, 2xz, xy)$, 回転 $\begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$　　$\begin{pmatrix} yz & 2xz & xy \end{pmatrix}$, 回転 $\begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ 2xz \end{pmatrix}$, 回転 $\begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ y \end{pmatrix}$　　$\begin{bmatrix} ax^2 \\ bxy \\ 2cxz \end{bmatrix}$, 回転 $\begin{bmatrix} 0 \\ -2cz \\ by \end{bmatrix}$

基底を次のようにすると

$$\mathbf{i} = (1,0,0)$$
$$\mathbf{j} = (0,1,0)$$
$$\mathbf{k} = (0,0,1)$$

F の回転は行列式を使って次のようになります.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p(x,y,z) & q(x,y,z) & r(x,y,z) \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

9.2.4　ラプラシアン

スカラーフィールド $f(x,y,z)$ のラプラシアンは ∇f の発散であり, 次式のようになります.

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

この演算子の名前は, ラプラスの式からとられたものです.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

フィールド変数にはデフォルトでアルファベット順に x, y, z を使います. フィールドラベルに他の変数名を利用する場合は, **ベクトル解析**サブメニューから**基底変数の設定**コマンドを選択します. 発散を計算する場合は**計算**コマンド, または**ベクトル解析 + ラプラシアン**とします.

▶ **計算**

$$\nabla^2\left(x + y^2 + 2z^3\right) = 12z + 2 \qquad \nabla\left(x + y^2 + 2z^3\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2y \\ 6z^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \nabla\left(x + y^2 + 2z^3\right) = 12z + 2 \qquad \nabla \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2y \\ 6z^2 \end{bmatrix} = 12z + 2$$

▶ **ベクトル解析 + ラプラシアン**

$x + y^2 + 2z^3$, ラプラシアン $12z + 2$

$1 - 2y + 6z^2$, ラプラシアン 12

9.2.5　方向微分

ある方向 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ における点 (a, b, c) での関数 f の方向微分は, 点 (a, b, c) における ∇f と $\mathbf{u}$ の内積として与えられます. 単位長ベクトルを $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, スカラー関数を f とすれば, 次の式で表すことができます.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f\,(a,b,c) &= \nabla f\,(a,b,c) \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\,(a,b,c)\,u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\,(a,b,c)\,u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\,(a,b,c)\,u_3 \end{aligned}$$

▶　**ある方向における**$f(x, y, z) = xyz$ **の方向微分を求める**

$$\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{9}, \cos\frac{\pi}{9}\right)$$

1. 内積 $(\nabla xyz) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{9}, \cos\frac{\pi}{9}\right)$ を入力します. ∇xyz はカッコで囲みます.
2. 式にカーソルを配置して**計算**, または, **数値計算**コマンドを実行します.

▶　**計算, 数値計算**

$(\nabla xyz) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{9}, \cos\frac{\pi}{9}\right) = xy\cos\frac{1}{9}\pi + \frac{1}{2}yz\left(\sin\frac{1}{9}\pi\right)\sqrt{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{2}xz\left(\sin\frac{1}{9}\pi\right)\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$= 0.939\,69xy + 0.130\,89xz + 0.315\,99yz$

9.3　ベクトルフィールドと勾配のプロット

2 次元または 3 次元空間でベクトルによって, ある範囲の点を指し示す関数を**ベクトルフィールド**と呼びます. 2 変数を持つスカラー関数の勾配は**ベクトルフィールド**です.

9.3.1　2 次元ベクトルフィールドのプロットとアニメーション表示

2D プロット + ベクトルフィールドのコマンドを実行する場合は, ベクトルフィールドの水平, および垂直成分を示す 2 変数の数式が 2 つ必要です.

▶　**2 次元のベクトルフィールドをプロットする**

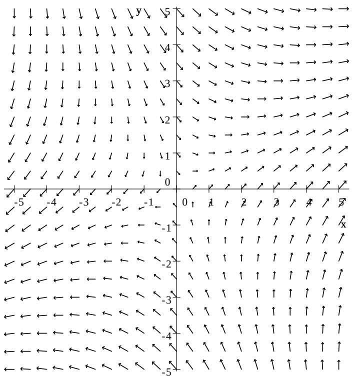
1. ベクトルフィールドの水平および垂直成分を示す 2 変数の数式を 2 つ入力します.
2. ベクトルにカーソルを配置して, **2D プロット**サブメニューから**ベクトルフィールド**を選択します.

Example 47　ベクトルフィールド $F(x, y) = [x + y, x - y]$ をプロットする

カーソルをベクトル $[x+y, x-y]$ に配置します．そして，**2D プロット**サブメニューから**ベクトルフィールド**を選択します．プロットプロパティダイアログのプロットした数式タブでプロット範囲ボタンをクリックし，ポイント数を 20×20 に設定します．

▶ **2D プロット ＋ ベクトルフィールド**

$[x+y, x-y]$



微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ の解における，点 (x,y) での傾きは $f(x,y)$ となります．このグラフの様子は，微分方程式の解を方向フィールド表示することによって具体的に把握できます．上図のように点 (x,y) における傾き $f(x,y)$ を短い矢印の線分で表すことができます．**2D プロット ＋ ベクトルフィールド**コマンドで，次のベクトル値関数をプロットします．

$$F(t,y) = \frac{\left(1, \frac{dy}{dt}\right)}{\left\|\left(1, \frac{dy}{dt}\right)\right\|}$$

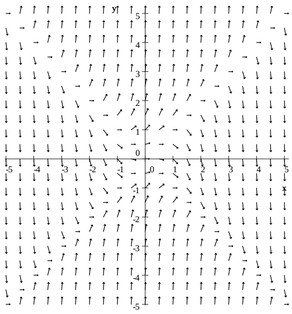
これは点 (t,y) における，ある方向を持ったベクトルを均一のベクトル長で示してします．

Example 48 微分方程式 $\frac{dy}{dt} = y^2 - t^2$ のベクトルフィールドは次のベクトル関数の 2 次元ベクトルフィールドになります．

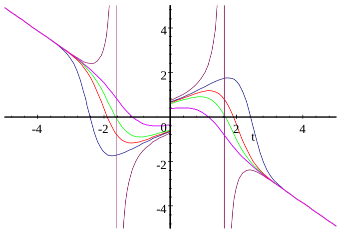
$$F(t,y) = \frac{\left(1, y^2 - t^2\right)}{\left\|\left(1, y^2 - t^2\right)\right\|}$$

▶ **2D プロット ＋ ベクトルフィールド**

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left|y^2-t^2\right|^2\right)}}, \frac{y^2-t^2}{\sqrt{\left(1+\left|y^2-t^2\right|^2\right)}}\right)$$



次の図のような解の曲線が得られます.



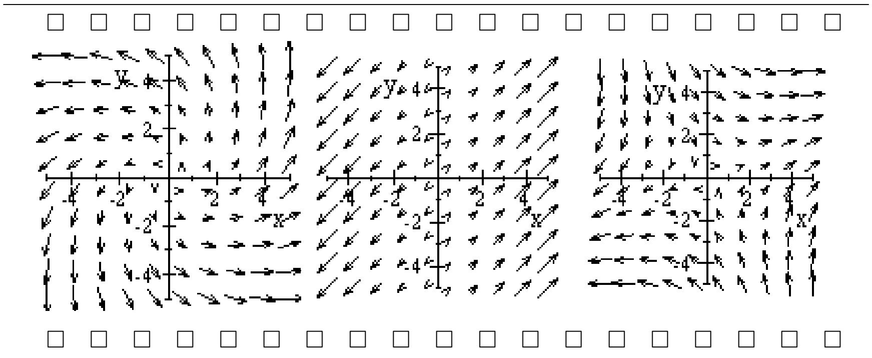
► **2 次元ベクトルフィールドのアニメーション表示する**

1. ベクトルフィールドの水平, 垂直成分を表す, 3 変数の数式を二組入力します.
2. 数式にカーソルを配置し, **2D アニメーションのプロット**サブメニューから**ベクトルフィールド**を選択します.

Example 49 ベクトルフィールド $F(x,y) = [x+ty, x-ty]$ を視覚化するには, ベクトル $[x+ty, x-ty]$ にカーソルを配置し, **2D アニメーションのプロット**サブメニューから**ベクトルフィールド**を選択します. プロットプロパティダイアログのプロットした数式タブから, 表示範囲を $-1 \le t \le 1$ に設定します.

► **2D アニメーションのプロット ＋ ベクトルフィールド**

$[x+ty, x-ty]$



9.3.2　3 次元ベクトルフィールドのプロットとアニメーション表示

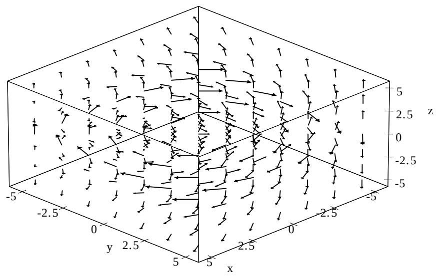
3D プロット+ **ベクトルフィールド**を実行するには, ベクトルフィールドの直交成分で表される 3 変数の 3 次元の数式が必要です.

▶　**3 次元のベクトルフィールドにプロットする**

1. ベクトルの x, y, z 成分からなる 3 次元の数式を入力します.
2. ベクトルの式にカーソルを配置します.
3. **3D プロット**サブメニューから**ベクトルフィールド**を選択します.

▶　**3D プロット ＋ ベクトルフィールド**

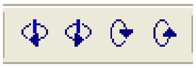
$[-y/z, x/z, z]$



3D プロットは時として, 把握の難しい画像になる場合があります. そのような場合は 3D プロットを回転させてより良い視点を探してみましょう.

▶　**ビューを変更する**

1. フレームをクリックし, フレームの右下隅にある VCAM アイコンをクリックします.

2. 回転アイコン  をクリックして，アニメーション表示を開始したり，停止します

アニメーション表示やボックスフレームはベクトルフィールドを見やすくします．

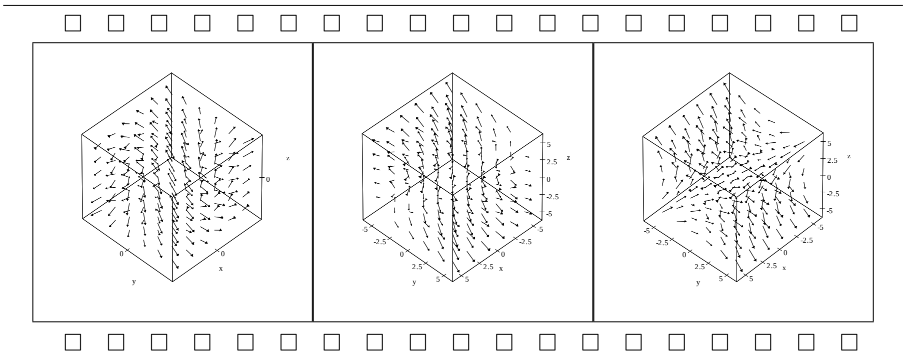
▶ **3D ベクトルフィールドのアニメーションをプロットする**

1. ベクトルフィールドの 3 成分にアニメーション変数を加えた 4 変数の数式を 3 組入力します．
2. ベクトルにカーソルを配置し，3D アニメーションのプロットからベクトルフィールドを選択します．

ベクトルフィールド $F(x,y) = [x+ty+z, x+y-tz, tx-y+z]$ を t 変数の表示範囲を -1 から 1 でアニメーション表示させるには，ベクトルにカーソルを配置し，**3D アニメーションのプロット**サブメニューから**ベクトルフィールド**を選択します．プロットプロパティダイアログのプロットした数式タブで，プロット範囲とアニメーションを選択します．表示範囲を $-1 \le t \le 1$ に設定します．

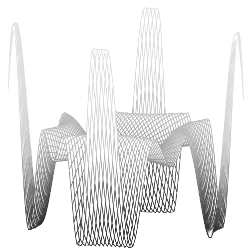
▶ **3D アニメーションのプロット ＋ ベクトルフィールド**

$[x+ty+z, x+y-tz, tx-y+z]$

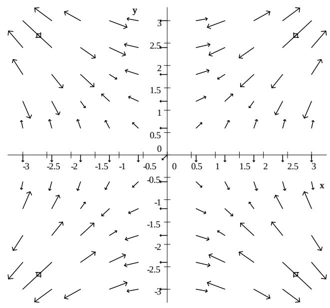


9.3.3　2 次元勾配フィールドのプロットとアニメーション表示

2 変数のスカラー関数のプロットにはいくつかの方法があります．関数 $f(x,y) = xy\sin xy$ に対して **3D プロット**サブメニューから**直交座標**のコマンドを実行すると，その関数を示す曲面がプロットされます．一方，**2D プロット**サブメニューから**勾配**を選択すると，やはりプロットが作成されます．後者は数式の勾配を示すベクトルフィールドを作成します．グリッド点におけるベクトルの方向と大きさは，勾配の方向と変化の大きさを示すものです．点 (x,y) において f の勾配を示すベクトルフィールドを，関数 (x,y) と結合した勾配フィールドと呼びます．



$xy \sin xy$



$xy \sin xy$ の勾配フィールド

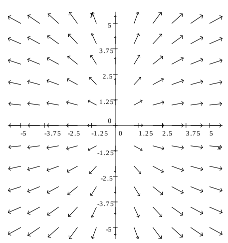
▶ **勾配フィールドをプロットする**

1. 式 $f(x, y)$ を入力します.
2. 数式にカーソルを配置し, **2D プロット**サブメニューから**勾配**を選択します.

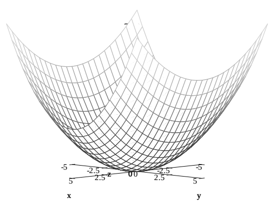
例えば, 式 $x^2 + 2y^2$ を入力します. そして **2D プロット**サブメニューから**勾配**を選択します. 数式の勾配を示すベクトルフィールドをプロットします. 左図は比較的, 変化の急な様子を示し, 中央は丸みのある曲面, 右図は等高線を利用して作成しました。

▶ **2D プロット ＋ 勾配, 3D プロット ＋ 直交座標, 3D プロット ＋ 直交座標**

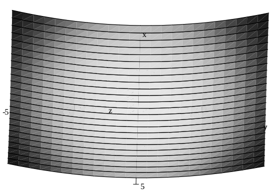
$x^2 + 2y^2$



勾配フィールド



メッシュ: メッシュ
横回転: 45　縦回転: 45



メッシュ: 等高線
横回転:1　縦回転:1

▶ **勾配フィールドのアニメーションを作成する**

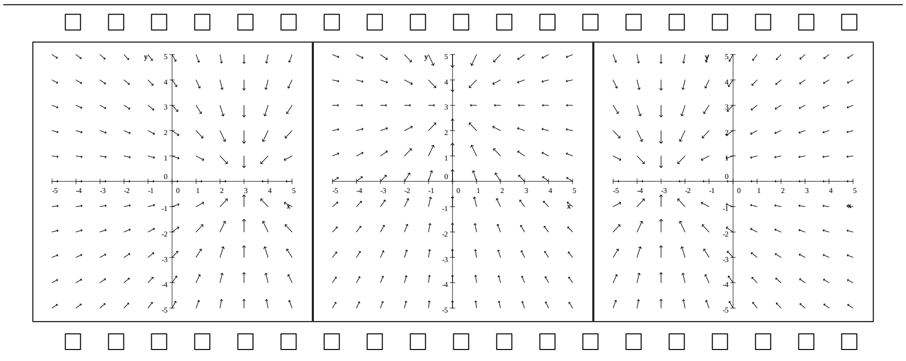
1. 数式 $f(x, y, t)$ を入力します.
2. 数式にカーソルを配置し, **2D アニメーションのプロット**サブメニューから**勾配**を選択します.

例えば, 数式 $x^2 + 2y^2$ を入力して, **2D アニメーションのプロット**サブメニューから**勾配**を選択します. これにより, 数式の勾配であるベクトルフィールドのプロットが作成されます. 以下

のアニメーションは半径 3 の円周を移動する引力の点を表しています．プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブからプロット範囲とアニメーションを選択し，表示範囲を $-3.1416 \le t \le 3.1416$ とします．

▶　**2D アニメーションのプロット ＋ 勾配**

$1/\left(10+(x+3\cos t)^2+(y+3\sin t)^2\right)$

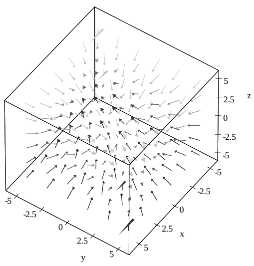


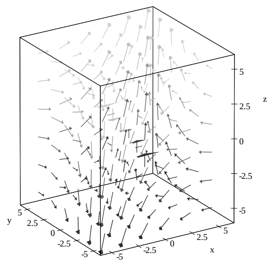
9.3.4　3 次元勾配フィールドのプロットとアニメーション表示

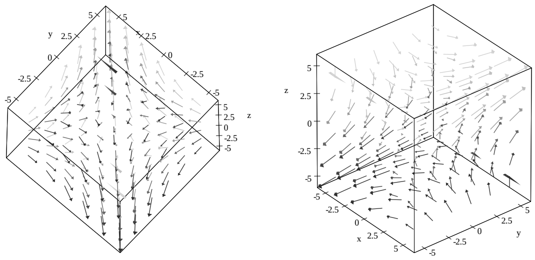
3 変数を持つスカラー値関数 $f(x,y,z)$ の勾配フィールドは，各ベクトルが最大に増加する方向を示す 3D のベクトルフィールドとなります．関数によって作成される曲面に 4 次元目の情報を表示させることができます．つまり，4 次元目の情報を視覚的に捕らえるためには勾配フィールドをプロットするなど，間接的な手法が必要になります．

▶　**3D プロット ＋ 勾配**

$xz+xy+yz$



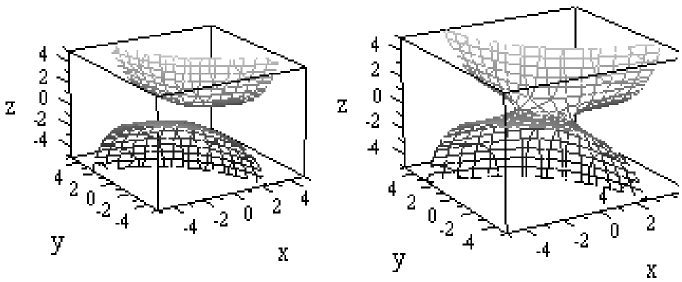




定数を持つ複数の曲面を陰関数プロットすることによって, 関数 $f(x, y, z)$ をプロットすることもできます. 勾配フィールドは小さな定数を持つ曲面から, 大きな定数を持つ曲面に向かって方向を示します.

► **3D プロット ＋ 陰関数**

$xz + xy + yz = 1$



$xz + xy + yz = 1$　　　　$xz + xy + yz = -1$

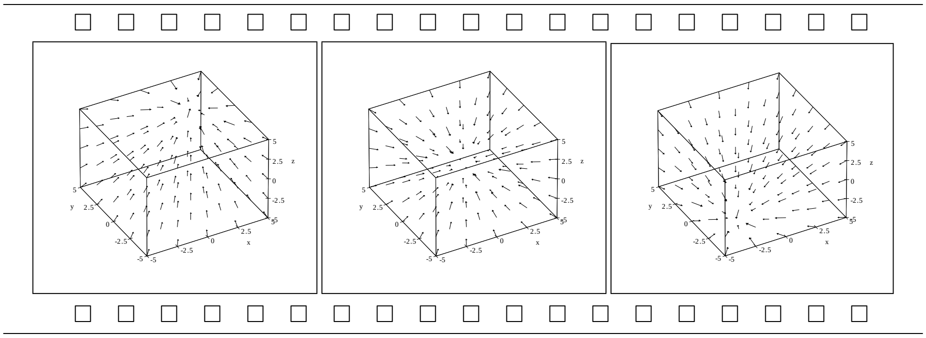
► **勾配フィールドのアニメーションをプロットする**

1. 数式 $f(x, y, z, t)$ を入力します.
2. 数式にカーソルを配置します. **3D アニメーションのプロット**サブメニューから**勾配**を選択します.

例えば, 数式 $1/\left(10 + (x+t)^2 + (y+t)^2 + (z+t)^2\right)$ を入力して, **3D アニメーションのプロット**サブメニューから**勾配**を選択するとします. これにより, この数式の勾配であるベクトルフィールドが作成されます. 次に示すアニメーションは魚のエサが一方の隅から反対の隅へ移動しているかのように, 水槽内に生成される関心の向きを表しています

► **3D アニメーションのプロット ＋ 勾配**

$$\frac{1}{10 + (x+t)^2 + (y+t)^2 + (z+t)^2}$$



9.4　スカラーとベクトルのポテンシャル

ベクトル解析メニューの**スカラーポテンシャル**コマンドは, 与えられたベクトルフィールドの勾配から元のスカラー関数を見つける, 勾配の逆変換を行うコマンドです. もちろん, 目的の関数が存在しない場合もあります. ベクトルポテンシャルは回転と同じような意味を持つ値です.

9.4.1　スカラーポテンシャル

次の式が成り立つとき, ベクトルフィールド F のスカラーポテンシャルが存在します.

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F = 0$$

スカラーポテンシャルはベクトルフィールドと, 対になった関係にあります.

標準的な基底変数を持つスカラーポテンシャルの例を次に示します.

▶　**ベクトル解析 ＋ スカラーポテンシャル**

(x, y, z), スカラーポテンシャル $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z$

(x, z, y), スカラーポテンシャル $yz + \frac{1}{2}x^2$

(y, z, x), スカラーポテンシャルは存在しません

回転が 0 でないので, ベクトルフィールド (y, z, x) は, スカラーポテンシャルを持ちません.

▶　**計算**

$$\nabla \times (y, z, x) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

次の例では**計算**コマンドの後で**ベクトル解析**メニューから**スカラーポテンシャル**を選択します. なぜなら, ベクトルフィールドは勾配ですから, スカラーポテンシャルである元の関数を求めることができます.

▶　**計算, ベクトル解析 ＋ スカラーポテンシャル**

$$\nabla \left(xy^2 + yz^3\right) = \begin{bmatrix} y^2 \\ 2xy + z^3 \\ 3yz^2 \end{bmatrix}, \text{ スカラーポテンシャル } xy^2 + yz^3$$

ベクトルフィールド $\left(cv, cu+2vw, v^2\right)$ のスカラーポテンシャルは, c を定数とすれば $ucv+v^2w$ になります. ベクトルフィールドで変数の数が成分数と異なる場合, 表示されるダイアログボックスでフィールド変数を指定します. ここでは u, v, w をフィールド変数として指定します.
逆にベクトルフィールドのスカラーポテンシャルが 3 変数よりも少ない場合, 例えば $(y, x, 0)$ の場合もダイアログが表示されます. そのような場合, 表示されたダイアログで x, y, z と入力し, このベクトルフィールドのスカラーポテンシャル xy を求めることができます.

9.4.2 ベクトルポテンシャル

次式が成り立つとき, ベクトルフィールド $\vec{F}$ のベクトルポテンシャルが存在します.

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = 0$$

この時のベクトルフィールドを管状ベクトルと呼びます.
特に制約条件がなければ, 回転とベクトルポテンシャルの演算子は, スカラーや 3 つの標準的な基底変数を持つ関数に対して実行可能です. デフォルトの基底変数は x, y, z ですが, **ベクトル解析**サブメニューの**基底変数の設定**コマンドで, 任意の変数名に変更することができます.

最初に $\nabla \times (xy, yz, zx) = \begin{bmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{bmatrix}$ として, 次のように操作します.

▶ **ベクトル解析 ＋ ベクトルポテンシャル**

$\begin{bmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{bmatrix}$, ベクトルポテンシャル $\begin{bmatrix} xy - \frac{1}{2}z^2 \\ yz \\ 0 \end{bmatrix}$

回転のベクトルポテンシャルを求める場合, 元のベクトルフィールドをわざわざ求めることはしません. なぜなら, ベクトルポテンシャルは回転がゼロであるベクトルフィールドに存在するからです. このことを確認してみましょう. 最初に 2 つのベクトルの差を計算します.

▶ **計算**

$\begin{bmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} xy - \frac{1}{2}z^2 \\ yz \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z^2 \\ 0 \\ xz \end{bmatrix} \qquad \nabla \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z^2 \\ 0 \\ xz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ベクトル解析 ＋ **基底変数の設定**で, 基底変数を u, v, w に変更して, 同じように計算してください. ベクトルフィールドは (v, w, u) または列行列として記述します.

▶ **ベクトル解析 ＋ ベクトルポテンシャル**

$\begin{bmatrix} -v \\ -w \\ -u \end{bmatrix}$, ベクトルポテンシャル $\begin{bmatrix} uv - \frac{1}{2}w^2 \\ vw \\ 0 \end{bmatrix}$

(v, w, u), ベクトルポテンシャル $\begin{bmatrix} -uv + \frac{1}{2}w^2 \\ -vw \\ 0 \end{bmatrix}$

9.5 行列演算子

行列演算子としてヘッセ, ヤコビアン, ロンスキアン行列が用意されています.

9.5.1 ヘッセ

ヘッセは次の $n \times n$ 行列として表せます.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

これは n 個の変数からなるスカラー関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を 2 回, 偏微分したものです.
基底変数の順番はヘッセ行列の行と列の並びに影響を与えます. 次の例では基底変数を x, y, z とします.

▶ **ベクトル解析 ＋ ヘッセ**

xyz, ヘッセ $\begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$ $x^2 + y^3$, ヘッセ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$wxyz$, ヘッセ $\begin{bmatrix} 0 & wz & wy \\ wz & 0 & wx \\ wy & wx & 0 \end{bmatrix}$ $a^3 + b^3$, ヘッセ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

他の変数を利用する場合は, 変数をリセットします.

▶ **ベクトル解析 ＋ 基底変数の設定**

a, b, c

▶ **ベクトル解析 ＋ ヘッセ**

$a^3 + b^3$, ヘッセ $\begin{bmatrix} 6a & 0 & 0 \\ 0 & 6b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

▶ **ベクトル解析 ＋ 基底変数の設定**

a, b

▶ **ベクトル解析 ＋ ヘッセ**

$b^3 + a^3$, ヘッセ $\begin{bmatrix} 6a & 0 \\ 0 & 6b \end{bmatrix}$

▶ **ベクトル解析 ＋ 基底変数の設定**

x, y, z, w

▶ **ベクトル解析 ＋ ヘッセ**

$x^2 z + y^3 w$, ヘッセ $\begin{bmatrix} 2z & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 6wy & 0 & 3y^2 \\ 2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

▶ **ベクトル解析 ＋ 基底変数の設定**: y, x

▶ **ベクトル解析 ＋ ヘッセ**

$x^2 + y^3$, ヘッセ $\begin{bmatrix} 6y & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

関数 $f(x, y, z) = 3xy^2z$ を定義し, 次の操作で式 $f(x, y, z)$ のヘッセ行列式を求めることもできます.

▶ **ベクトル解析 ＋ 基底変数の設定**: x, y, z

▶ **ベクトル解析 ＋ ヘッセ**

$f(x, y, z)$, ヘッセ $\begin{bmatrix} 0 & 6yz & 3y^2 \\ 6yz & 6xz & 6xy \\ 3y^2 & 6xy & 0 \end{bmatrix}$

9.5.2 ヤコビアン

ヤコビアンの $n \times n$ 行列は

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

であり, これはベクトルフィールドにおける偏微分によって得られます.

$$\left(f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \ldots, f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right)$$

変数リストに入力した順番によって行列式の要素の並び方が決る点で, ヤコビアンとヘッセは良く似ています. 次に示す例の変数は x, y, z とします. ここでは, ベクトルフィールドの式にカーソルを配置してヤコビアンを実際に計算します.

▶ **ベクトル解析 + ヤコビアン**

(yz, xz, xy), ヤコビアン $\begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$

$(x^2z, x+z, xz^2)$, ヤコビアン $\begin{bmatrix} 2xz & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ z^2 & 0 & 2xz \end{bmatrix}$

$(x^2z, y+c, yz^2)$, ヤコビアン $\begin{bmatrix} 2xz & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{bmatrix}$

変数をリセットして他の基底変数を利用します.

▶ **ベクトル解析 + 基底変数の設定**

a, b, c

▶ **ベクトル解析 + ヤコビアン**

$(x^2z, y+c, yz^2)$, ヤコビアン $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.5.3 ロンスキアン

区間 I で定義された関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ に対するロンスキアンは普通 $W(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ で表し, 次式で計算します.

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1^{(1)}(x) & f_2^{(1)}(x) & \cdots & f_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

従って, $W(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ もまた, 区間 I で定義された関数となります. ロンスキアンを計算する場合は, ロンスキアン行列の行列式を求めます.

▶ **ベクトル解析 + ロンスキアン**

$(x^3 - 3x^2, 3x^2 - 7, x^4 + 5x^2)$,

ロンスキアン行列 $\begin{bmatrix} -3x^2 + x^3 & 3x^2 - 7 & 5x^2 + x^4 \\ -6x + 3x^2 & 6x & 10x + 4x^3 \\ 6x - 6 & 6 & 12x^2 + 10 \end{bmatrix}$

▶ **行列 ＋ 行列式**

$\begin{bmatrix} -3x^2+x^3 & 3x^2-7 & 5x^2+x^4 \\ -6x+3x^2 & 6x & 10x+4x^3 \\ 6x-6 & 6 & 12x^2+10 \end{bmatrix}$, 行列式: $84x^4-336x^3-210x^2-6x^6$

次の関数のロンスキアンを計算してみると,

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2$$
$$f_2(x) = 3x^2 - 7$$
$$f_3(x) = x^4 + 5x^2$$

次のように, 同じ結果が得られます.

$$W\left(x^3-3x^2, 3x^2-7, x^4+5x^2\right) = -6x^6 + 84x^4 - 210x^2 - 336x^3$$

いま, 2 つの汎用関数 f_1 と f_2 を定義して次の計算を行います.

▶ **関数定義 ＋ 新しい関数**

$f_1(x)$

$f_2(x)$

▶ **ベクトル解析 ＋ ロンスキアン**

$(f_1(x), f_2(x))$, ロンスキアン行列 $\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \end{bmatrix}$

▶ **行列 ＋ 行列式**

$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \end{bmatrix}$, 行列式: $f_1(x)\frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - f_2(x)\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}$

つまり, 次の式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right) = \frac{f_1(x)\frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - f_2(x)\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}}{(f_1(x))^2}$$

において二つの関数が比例関係にある場合, $f_2(x)/f_1(x)$ が定数となりますから, $\frac{d}{dx}(f_2(x)/f_1(x)) = 0$ です. すなわち, ロンスキアンはゼロとなります.

9.6　複素関数のプロット

複素関数 $F(z)$ (z と $F(z)$ は共に複素数) には基本的に 4 つの次元があるので, プロットには工夫が必要です. このような関数を視覚化するのに等角写像を利用するのも一つの方法です.

9.6.1　等角写像

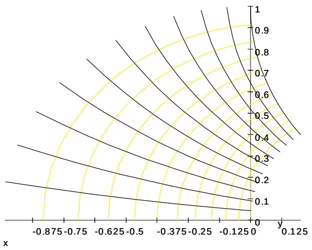
複素関数 $F(z)$ の等角写像は水平と垂直の線分によって描画される 2 次元の直角座標におけるプロットです. このプロットには 11 対 11 のグリッド線があり, その範囲は $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$ および

$0 \le \mathrm{Im}\,(z) \le 1$ です．グリッド線により，この範囲は 10 等分されます．今，$F(z)$ が解析的であるとすれば，$F'(z) \ne 0$ となる各点で角度を求めることができます．プロットを構成する 2 組のグリッドは各点で直角に交差します．

式 $F(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ の等角写像を作成します．カーソルを式に配置します．そして **2D プロット**サブメニューから**等角写像**を選択します．グリッド線の数とビュー範囲はプロットプロパティダイアログで変更します．

▶ **2D プロット ＋ 等角写像**

$$\frac{z-1}{z+1}$$

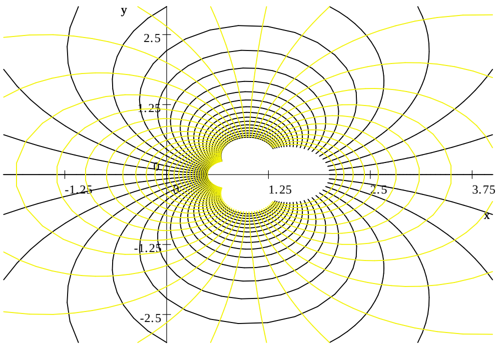


次の例で

- $\mathrm{Re}(z)$ と $\mathrm{Im}(z)$ は両方とも範囲 -3 から 3 です．
- 表示範囲は $-2 \le \mathrm{Re}\,(z) \le 4$ および $-3 \le \mathrm{Im}\,(z) \le 3$ です．
- グリッドサイズは 40 対 40 です．
- 水平グリッド線上，および垂直グリッド線上のポイント数は 60 です．

▶ **2D プロット ＋ 等角写像**

$$\frac{z-1}{z+1}$$



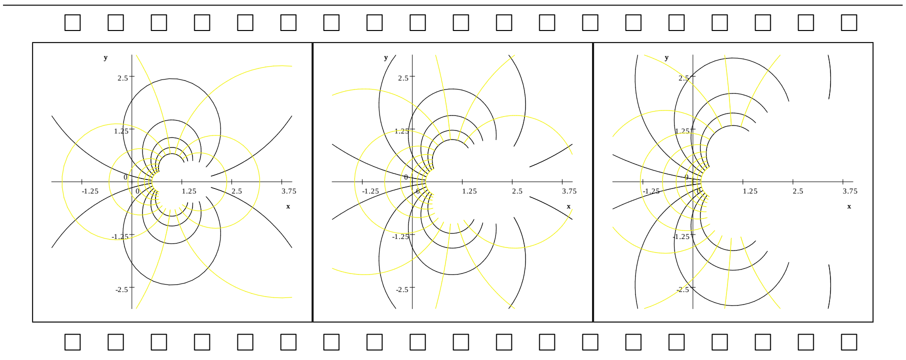
9.6.2　等角写像のアニメーション表示

数式 $F(z) = \dfrac{z-t}{z+t}$ を変数 t の表示範囲を 1 から 2 にしたアニメーションをプロットするには，数式内にカーソルを配置し，**2D アニメーションのプロット**サブメニューから**等角写像**を選択します．グリッド線の数や表示方法はプロットのプロパティダイアログで変更することができます．

- $\mathrm{Re}(z)$ と $\mathrm{Im}(z)$ は両方とも範囲は -3 から 3 です．
- 表示範囲は $-2 \le \mathrm{Re}\,(z) \le 4$ および $-3 \le \mathrm{Im}\,(z) \le 3$ です．
- グリッドサイズは 40 対 40 です．

▶ **2D アニメーションのプロット ＋ 等角写像**

$$\frac{z-t}{z+t}$$



9.7　練習問題

1. 関数 $f(x,y,z) = 3x - 5y + 2z$ の $(2,2,1)$ における，球面 $x^2+y^2+z^2=9$ に垂直な方向微分を求めてください．
2. 曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2} + \left(x^2+y^2\right)^{3/2}$ の点 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ における垂直ベクトル v を求めてください．
3. 式 $f(x,y,z) = \dfrac{mM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ はニュートンの重力ポテンシャルを示しています．勾配は次の式で与えられることを示してください．

$$\nabla f(x,y,z) = -\frac{mM}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

4. 3 つの関数 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ に 3 次微分式が存在するものとします．ロンスキアンの微分 $W(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ が次の行列式で与えられることを示してください．

$$\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \\ \frac{d}{dt}u_1(t) & \frac{d}{dt}u_2(t) & \frac{d}{dt}u_3(t) \\ \frac{d^3}{dt^3}u_1(t) & \frac{d^3}{dt^3}u_2(t) & \frac{d^3}{dt^3}u_3(t) \end{vmatrix}$$

関数 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ のロンスキアン行列の最後の行における要素を微分することによって $W(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ の行列式が得られることを利用してください.

5. 関数 $f(x,y) = \sin xy$ とした場合, 曲面 $z = f(x,y)$, $f(x,y)$ の勾配, $\nabla f(x,y)$ のベクトルフィールドとの関係を調べてください.
6. 式 $(\sin xy, \cos xy)$ のベクトルフィールドを求めてください. 勾配が $g(x,y)$ となる関数 $(\sin xy, \cos xy)$ は存在しますか?

9.8 練習問題の答え

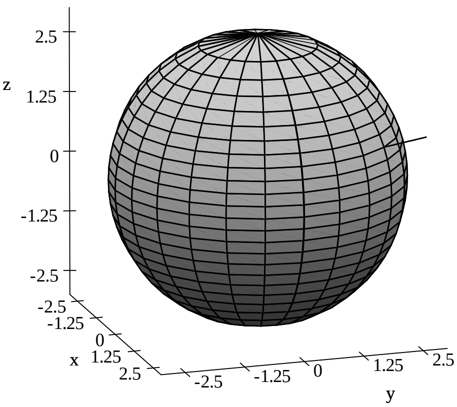
1. 方向微分は $D_u f(x,y,z)) = \nabla f(x,y,z) \cdot u$ となります. ここで u は球面 $x^2+y^2+z^2=9$ の外側に垂直な単位ベクトルです. 次のベクトル

$$\nabla\left(x^2+y^2+z^2\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

は, 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ に垂直で, 点 $(2,2,1)$ における法線は $(4,4,2)$ です. 同じ方向の単位ベクトルは

$$u = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \div \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

となり, この時のプロットは次の通りです.



$\nabla f(x,y,z) = (3,-5,2)$ より $\nabla f(x,y,z) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$ となります.

2. 法線ベクトルは次のようになります.

$$\begin{aligned}
&\nabla\left(\sqrt{x^2+y^2}+\left(x^2+y^2\right)^{3/2}-z\right)\\
&\qquad=\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}x+3\sqrt{(x^2+y^2)}x,\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}y+3\sqrt{(x^2+y^2)}y,-1\right)\\
&\qquad=\left(x\frac{1+3x^2+3y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}},y\frac{1+3x^2+3y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}},-1\right)\\
&\qquad=\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\left(x\left(1+3x^2+3y^2\right),y\left(1+3x^2+3y^2\right),-\sqrt{(x^2+y^2)}\right)
\end{aligned}$$

したがって, スカラー倍は

$$\left[x\left(1+3x^2+3y^2\right),y\left(1+3x^2+3y^2\right),-\sqrt{(x^2+y^2)}\right]$$

やはり, 曲面に対して垂直になります.

3. 式 $\nabla\left(\dfrac{mM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ に**計算**コマンドを実行します．そこで, m と M は定数ですから最初の 2 項を消去します．その式を次に示します.

$$\begin{aligned}
&\nabla\left(\frac{mM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\
&\qquad=\left(-m\frac{M}{\left(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\right)^3}x,-m\frac{M}{\left(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\right)^3}y,-m\frac{M}{\left(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\right)^3}z\right)\\
&\qquad=-\frac{mM}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\left(x,y,z\right)
\end{aligned}$$

これは質量 m と M の 2 つの物体の間のニュートンの引力を示しています．ここで, 一方の物質の位置を原点とし, 他方を (x,y,z) 座標に存在するものとします.

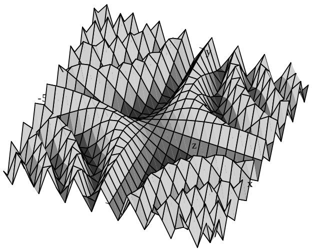
4. 次の式に**計算**コマンドをそれぞれ実行します.

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t)\\ \frac{d}{dt}u_1(t) & \frac{d}{dt}u_2(t) & \frac{d}{dt}u_3(t)\\ \frac{d^2}{dt^2}u_1(t) & \frac{d^2}{dt^2}u_2(t) & \frac{d^2}{dt^2}u_3(t)\end{vmatrix}\quad\text{および}\quad\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t)\\ \frac{d}{dt}u_1(t) & \frac{d}{dt}u_2(t) & \frac{d}{dt}u_3(t)\\ \frac{d^3}{dt^3}u_1(t) & \frac{d^3}{dt^3}u_2(t) & \frac{d^3}{dt^3}u_3(t)\end{vmatrix}$$

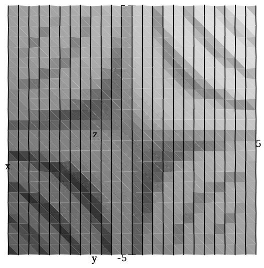
その結果,

$$\begin{gathered}
u_1(t)\frac{\partial u_2(t)}{\partial t}\frac{\partial^3 u_3(t)}{\partial t^3}-u_1(t)\frac{\partial u_3(t)}{\partial t}\frac{\partial^3 u_2(t)}{\partial t^3}-\frac{\partial u_1(t)}{\partial t}u_2(t)\frac{\partial^3 u_3(t)}{\partial t^3}+\\
\frac{\partial u_1(t)}{\partial t}u_3(t)\frac{\partial^3 u_2(t)}{\partial t^3}+\frac{\partial^3 u_1(t)}{\partial t^3}u_2(t)\frac{\partial u_3(t)}{\partial t}-\frac{\partial^3 u_1(t)}{\partial t^3}u_3(t)\frac{\partial u_2(t)}{\partial t}
\end{gathered}$$

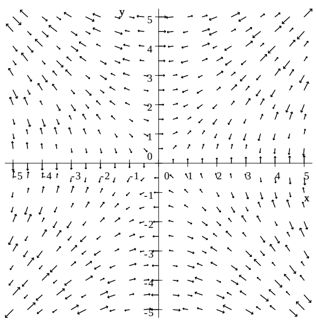
5. 曲面 $z=\sin xy$ の第一象限には双曲線 $xy=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ に従う山が存在し, 双曲線 $xy=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$ に従う谷間が存在します．ここで勾配 $\nabla\sin xy=(y\cos xy,x\cos xy)$ によって作成されるベクトルフィールドには曲面 $z=\sin xy$ の山と谷の変化の度合いがはっきり表れます．$f(x,y)$ の勾配をプロットすることと, $\nabla f(x,y)$ のベクトルフィールドをプロットすることは同じことです．山と谷間は長さがゼロのベクトルによって示されます.



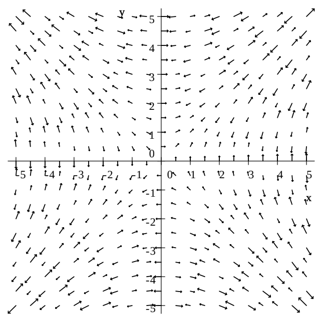
メッシュ: メッシュ
横回転: -66　　縦回転: 43



メッシュ: 縦方向
横回転: -90　　縦回転: 1

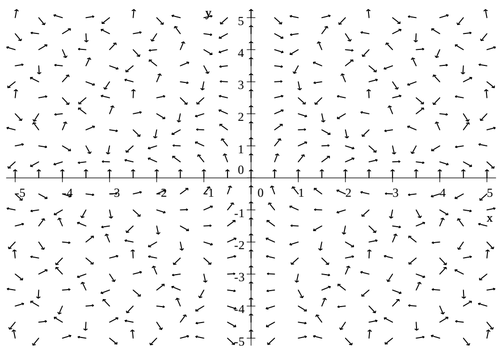


$\sin xy$ の勾配



$(y\cos xy, x\cos xy)$ のベクトルフィールド

6. ベクトルフィールド $(\sin xy, \cos xy)$ のプロットには様々な方向を向いたベクトルが存在しますが, スカラーポテンシャルを求めることはできません.



第 10 章

微分方程式

微分方程式とは元の関数が不明である微分や導関数を含んだ方程式です．また，微分方程式の解は，与えられた方程式を満たす任意の関数です．例えば，$y = \sin x$ は微分方程式 $y'' + y = 0$ の解です．つまり，$y = \sin x$ とすれば，$y' = \cos x$ であり，$y'' = -\sin x$ であるが故に，$y'' + y = \sin x - \sin x = 0$ となるからです．微分方程式は純粋な数学や応用数学の分野だけでなく，科学，工学，ビジネス，社会科学の分野で利用されています．

10.1　常微分方程式

常微分方程式サブメニューコマンドを実行すると，微分方程式に対する閉じた解を求めることができます．解は一般的に $y(x)$ と x，また，任意の定数 C_1, C_2, ..., C_n による方程式として算出されます．もちろん，他の変数を使うこともできます．

► **常微分方程式を解く**

1. 標準的な記述方法で微分方程式を入力します．
2. カーソルを数式に移動して，**常微分方程式**サブメニューから**解**コマンドや**ラプラス**コマンドを選択します．
   または
   微分方程式を初期条件とともにベクトル形式で記述します．カーソルを数式に移動したら，**常微分方程式**サブメニューから**数値解**を選択します．

両者の利用方法に関する詳細は後述します．

10.1.1　解コマンドを利用する

解コマンドと**ラプラス**コマンドのどちらを選択しても正確な解が求まります．**ラプラス**コマンドとはその名の通り，解を求めるためにラプラス変換を実行します．これらのコマンドは定数係数を持つ，同次または非同次線形微分方程式初期条件は解と一緒に表示されます．**解**コマンドはいくつかの非線形微分方程式にも利用できる，一般的なコマンドです．これらのコマンドを使ってかなり複雑な微分方程式を解くことができます．

解コマンド
独立変数 x を使った微分方程式の場合, 変数を指定するダイアログは表示されません.

▶ **常微分方程式 ＋ 解**

$\dfrac{dy}{dx} = xy$, 方程式の解：$C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}$
答えを確認します. 関数 $y\left(x\right) = e^{\frac{1}{2}x^2} C_1$ を定義します. 微分方程式の y を $y(x)$ で置換します. そして両辺に**計算**コマンドを実行します.

▶ **計算**

$\dfrac{dy\left(x\right)}{dx} = xe^{\frac{1}{2}x^2} C_1$　　　　$xy\left(x\right) = xe^{\frac{1}{2}x^2} C_1$
いま C_1 が与えられれば, 解となる曲線を描くことができます. C_1 は普通, 任意の値なので解となる曲線は無限に存在することになります. または, この微分方程式の解は 1 つのパラメータに依存した解とも言えます.

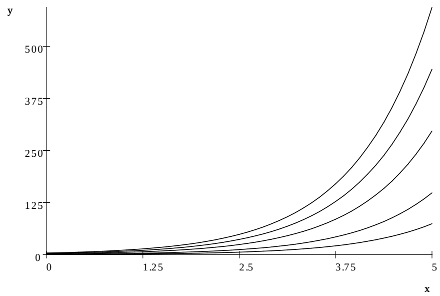
ダッシュ記号で数式の微分を表している時, 独立変数を明確にするために独立変数を指定する必要があります. 式 $y' = y$, $y' = \sin x$ や $y' = \sin x + t$ では, 独立変数名が明確ではありません. ダイアログボックスが表示されますので, そこに独立変数名を入力します.

▶ **常微分方程式 ＋ 解**

$y' = \sin x$ (独立変数 x), 方程式の解: $C_1 - \cos x$

$y' = \sin x$ (独立変数 t), 方程式の解: $C_1 + (\sin x)\, t$

$y' = y$ (独立変数 t), 方程式の解: $C_1 e^t$
定数 C_1 による方程式の解の集合が存在することになります. 次の図は微分方程式 $y' = y$ の解で C_1 を 1/2, 1, 2, 3, 4 とした時の曲線です. このようなプロットを作成する場合は最初のプロットに, 他の式をドラッグします.



$y' = y$: $\frac{1}{2}e^t$, e^t, $2e^t$, $3e^t$, $4e^t$　の解

微分方程式の記述方法には何通りかの方法があります. 次にその例をいくつか示します. ライプニッツの記述法 $\frac{dy}{dx}$ や D_x の記述法ならば, 独立変数がはっきりしていますのでダイアログは表示されません. 微分方程式の主要な記述方法では, 独立変数を入力するためのダイアログが表示されます.

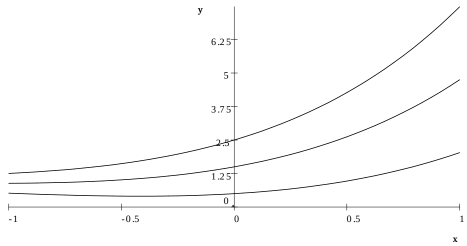
▶　**常微分方程式 ＋ 解**

$\dfrac{dy}{dx} = y + x$, 方程式の解: $e^{x-C_1} - x - 1$
$D_x y - y = \sin x$, 方程式の解: $C_1 e^x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$
$y' + xy = ax$ (独立変数: x), 方程式の解: $\begin{pmatrix} a \\ a + e^{-C_2 - \frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}$
微分方程式 $D_x y - y = \sin x$ で $C_1 = 1, 2, 3$ として時の解を次にプロットしました．解となる 2 つ目以降の式をプロットしたら, プロットプロパティダイアログの数式情報タブで適当に曲線の色を変更しましょう．

▶　**2D プロット ＋ 直交座標**

$e^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

- 数式 $2e^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ および $3e^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ を選択し, フレームへドラッグします．



$D_x y - y = \sin x$ の 3 つの解

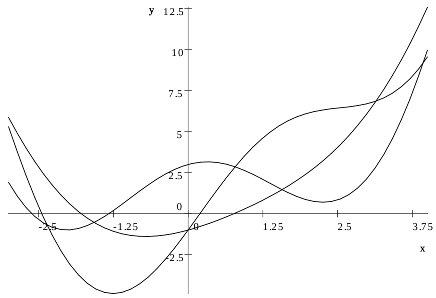
3 つの曲線を判別する場合は原点 0 における値を調べます．例えば $C_1 = 1$ とした時, 式は $y = \frac{1}{2}$ で y 軸と交わります．

▶　**常微分方程式 ＋ 解**

$y'' + y = x^2$ (独立変数 x), 方程式の解: $C_1 \cos x - C_2 \sin x + x^2 - 2$
定数を $(C_1, C_2) = (1, 1)$, $(C_1, C_2) = (5, 1)$, $(C_1, C_2) = (1, 5)$ とした時の解をプロットしたものを次に示します．このようなプロットを作成する場合は最初のプロットに他の式をドラッグします．そして, プロットプロパティダイアログの数式情報タブで適当に曲線の色を変更します．

▶　**2D プロット ＋ 直交座標**

$\sin x + \cos x + x^2 - 2$
数式 $5\sin x + \cos x + x^2 - 2$ と $\sin x + 5\cos x + x^2 - 2$ を選択し, フレームへドラッグします．



$y'' + y = x^2$ の 3 つの解

解の方程式の一つ $y(x) = x^2 - 2 + \sin x + 5\cos x$ は $y = 3$ で y 軸と交わります.

► **常微分方程式 ＋ 解**

$xy' - y = x^2$ (独立変数 x), 方程式の解: $C_1 x + x^2$
$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = x + y$, 方程式の解: $C_1 e^{x\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)} - x + C_2 e^{x\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)} - 1$

簡単に解くことの出来ない微分方程式の場合は, 次に示すように式を書き換えてから解く方法もあります.
例えば, 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2 \sin y - xy}$ は式を逆数にしてから, 解きます.

► **常微分方程式 ＋ 解**

$\dfrac{dx}{dy} = x^2 \sin y - xy$, 解: $x\,(y) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}y^2}\left(-\int e^{-\frac{1}{2}y^2}\sin y\,dy + C_1\right)}$

常微分方程式 $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$ では, 変数の置換を行ってから解きます. ここで, $\sqrt{y} = z$ とすれば, $2z\frac{dz}{dx} + \frac{xz^2}{1-x^2} = xz$ となります.

► **常微分方程式 ＋ 解, 簡単化**

$2z\frac{dz}{dx} + \frac{xz^2}{1-x^2} = xz$, 解: $z\,(x) = 0$, $z\,(x) =$
$\frac{1}{3}\frac{-(x-1)^{\frac{3}{4}}(x+1)^{\frac{3}{4}} + x^2(x-1)^{\frac{3}{4}}(x+1)^{\frac{3}{4}} - 3C_1 + 3C_1x^2}{(x-1)^{\frac{3}{4}}(x+1)^{\frac{3}{4}}} = \frac{-\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{4}} + x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{4}} - 3C_1 + 3C_1x^2}{3(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}$
よって, $y(x) = \left(\frac{-\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{4}} + x\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{4}} - 3C_1 + 3C_1x^2}{3(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}\right)^2$

ラプラス法

ラプラス変換を使ってすべての係数が定数である同次線形微分方程式や 非同次線形微分方程式を解くことができます. 初期条件は陰関数の形式で解に表示されます.

► **常微分方程式 ＋ ラプラス**

$\dfrac{dy}{dx} = y$, ラプラス変換の解: $y\,(x) = e^x y\,(0)$
$y' + y = x + \sin x$ (独立変数 x),
ラプラス変換の解: $x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + e^{-x}\left(y\,(0) + \frac{3}{2}\right) - 1$

ラプラス変換の解はラプラス変換の式で表させる場合があります. 詳細は 377 ページを参照してください.

▶ **常微分方程式 ＋ ラプラス**

$(y')^3 - 3(y')^2 + 2y' = 0$, ラプラス変換の解:

$$\left\{y(0) + \tfrac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s_{11}}\mathcal{L}\left(\frac{\partial y(x)}{\partial x}^2\right)\right) - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s_{11}}\mathcal{L}\left(\frac{\partial y(x)}{\partial x}^3\right)\right)\right\}$$

同じ微分方程式を計算した実解と比較してみてください.

▶ **常微分方程式 ＋ 解**

$(y')^3 - 3(y')^2 + 2y' = 0$, 解: $\{C_1, C_2 + 2x, C_3 + x\}$

次に**解**コマンドと**ラプラス**コマンドの実行結果を表示します.

方程式	**解**	**ラプラス**
$y' = \sin x$	$y(x) = C_1 - \cos x$	$y(x) = y(0) - \cos x + 1$
$D_x y = x + t$	$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + tx + C_1$	$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + tx + y(0)$
$\frac{dy}{dx} = y$	$y(x) = C_1 e^x$	$y(x) = e^x y(0)$
$y' = y^2 + 1$	$-i, i, \tan\left(\frac{1}{2}\pi - C_1 + x\right)$	Fails

10.1.2　級数解

多くの微分方程式の場合, テイラー展開による項を少し求めれば十分です. 常微分方程式の級数解を求める場合, ダイアログボックスで項の数を決めることができます. 次の例では項の数を 6 とします.

▶ **級数解の項の数を決める**

1. **数式処理 ＋ 設定**から**一般**のタブを表示します.
2. 常微分方程式の解として表示される級数項の数を設定します.
3. OK ボタンをクリックします.

次の例では初期条件 $y(0)$ が解の中に現れています. **常微分方程式**サブメニューから**級数**を選択すると, 次の解が表示されます.

▶ **常微分方程式 ＋ 級数**

$D_x y = y$, 級数解 : $y(x) = y(0) + y(0)x + \left(\frac{1}{2}y(0)\right)x^2 + \left(\frac{1}{6}y(0)\right)x^3 + \left(\frac{1}{24}y(0)\right)x^4 + \left(\frac{1}{120}y(0)\right)x^5 + O\left(x^6\right)$

$y' = \dfrac{\sin x}{x}$ (独立変数 x), 級数解 : $y(x) = y(0) + x - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{600}x^5 + O\left(x^6\right)$

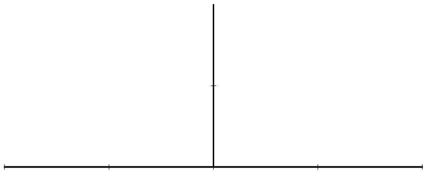
10.1.3　ヘビサイドとディラックの関数

ラプラス変換とフーリエ変換は, ヘビサイドの単位ステップ関数 $\operatorname{Heaviside}(x)$ とディラックの単位インパルス関数 $\operatorname{Dirac}(x)$ と密接に結びついています. ディラックとヘビサイド関数は次のような関係にあります.

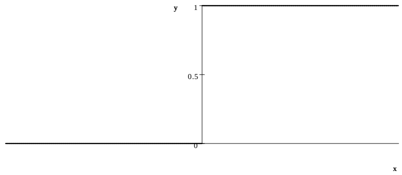
$$\int_{-\infty}^{x} \operatorname{Dirac}(t)\,dt = \operatorname{Heaviside}(x) \quad \text{および} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Heaviside}(x) = \operatorname{Dirac}(x)$$

ディラック関数は, 通常の関数とは少し異なります. つまり, これは無限に短い関数で, しかも, 単位面積を持つ, 無限の高さの関数です. 関数 $\operatorname{Dirac}(x) = 0$ です. ただし, $x \neq 0$ で, 関数 $f_n(x)$

の面積は $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\ dx = 1.0$ を満たすものとします．ヘビサイド関数は, $x < 0$ で 0 であり, $x \geq 0$ で 1 です.



$\mathrm{Dirac}\,(x)$



$\mathrm{Heaviside}\,(x)$

▶ **計算**

$\mathrm{Heaviside}\,(\pi) = 1$　　$\mathrm{Heaviside}\,(-e) = 0$　　$\mathrm{Heaviside}\,(i) = \mathrm{undefined}$

$\mathrm{Dirac}\,(2) = 0$　　$\mathrm{Dirac}\,(0) = \mathrm{Dirac}\,(0)$　　$\mathrm{Dirac}\,(i) = \mathrm{undefined}$

▶ **ディラックまたはヘビサイド関数を入力する**

1. **挿入** + **数式名**とするか, または,  をクリックします.
2. 数式名のテキストボックスに, ここに示すように大文字と小文字の区別を付けて関数名を入力します．そして OK ボタンをクリックします.

ヘビサイドとディラック関数は assume 関数や additionally 関数 (これらの関数に関しては 109 を参照してください) によって設定されている条件に重みを置きます.

▶ **計算**

$\mathrm{assume}\,(\mathrm{positive}) = (0, \infty)$

▶ **計算**

$\mathrm{Heaviside}\,(x) = 1$

▶ **計算**

$\mathrm{assume}\,(x, \mathrm{real}) = \mathbb{R}$　　$\mathrm{additionally}\,(x \neq 0) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

▶ **計算**

$\mathrm{Dirac}\,(x) = 0$

関数名を短縮して使いたいときは, 次の要領で関数を定義します．ただし, 関数の計算結果ウィンドウには元の長い関数名が表示されます.

▶ **関数定義** + **新しい定義**

$\delta(x) = \mathrm{Dirac}\,(x)$　　$H(x) = \mathrm{Heaviside}\,(x)$

適当な積分計算を実行して $\delta(x)$ の定義を確認します.

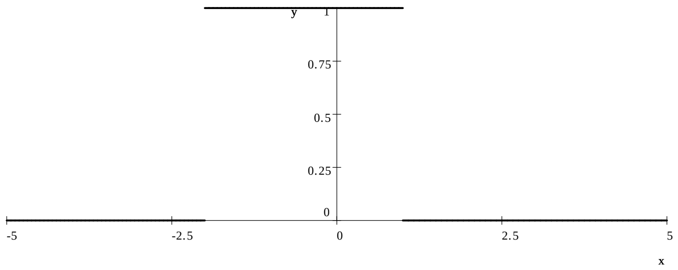
▶ **計算**

$\int_{-1}^{1} \delta(x)\ dx = 1$

適当な微分計算を行って $H(x)$ の定義を確認します.

▶ **計算**

$\frac{d}{dx}H(x) = \mathrm{Dirac}(x)$
ヘビサイド関数を使って, 特性関数を作成できます. 例えば, $\mathrm{Heaviside}(1-x)\,\mathrm{Heaviside}(2+x)$ は, 区間 $[-2,1]$ で 1 となり, それ以外の区間で 0 となるような関数になります.



$\mathrm{Heaviside}(1-x)\,\mathrm{Heaviside}(2+x)$

10.1.4　ラプラス変換

いま, f が区間 $[0,\infty]$ に存在する関数で, 関数$\mathcal{L}(f) = \hat{f}$ が次式の積分式で定義される場合,

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t), t, s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

積分計算された s を持つ関数を f のラプラス変換と呼びます. ラプラス変換は関数 f と s に依存します. 上式で定義される$\mathcal{L}$をラプラス演算子と呼びます.
$f(t)$ による線形微分方程式は, 演算子$\mathcal{L}$を利用することによって代数方程式 $\hat{f}(s)$ に変換できます. 微分方程式はその代数方程式を解き $\hat{f}(s)$ を求め, そこからラプラス逆変換によって $f(t)$ を求めます.
指数, 多項式, 線形な引数を持つ三角関数 (sin, cos, sinh, cosh) とベッセル関数 (BesselJ, BesselI) などを含む式を変換することもできます. ラプラス変換は微分式, 積分式, ヘビサイド単位ステップ関数 $\mathrm{Heaviside}(x)$ とディラックのデルタ単位インパルス関数 $\mathrm{Dirac}(x)$ を変換することもできます.

ラプラス変換の実行
変数 t による数式のラプラス変換を実行する場合は, **変換**サブメニューを利用します.

▶　**変換 ＋ ラプラス**

t, ラプラス変換: $\frac{1}{s^2}$
$t^{\frac{3}{2}} - e^t + \sinh at$, ラプラス変換: $\frac{a}{s^2-a^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}}$
$te^{-\alpha t}\,\mathrm{Heaviside}(t)$, ラプラス変換: $\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
記号$\mathcal{L}$を使ってラプラス変換を計算することもできます.

▶　**記号 $\mathcal{L}$ を使ってラプラス変換を計算する**

1. アイコン にあるその他の記号パネルから，$\mathcal{L}$をクリックして，さらに，この記号を数式モードに切替えます．
2. **挿入** + **カッコ**で ( ) を選択するか， をクリックします．
3. カッコ内に変数 t を使った数式を入力します．
   または
   コンマ区切りで次の項目を入力します．
   (a) 目的の関数
   (b) 積分変数
   (c) 変換する変数
4. **計算**コマンドを実行します．

デフォルトの積分変数は t，また，デフォルトの変換変数は s です．ラプラス変換は t で表現される式を自動的に変換します．

▶ **計算**

$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$　　$\mathcal{L}(t^3) = \frac{6}{s^4}$　　$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

$\mathcal{L}(3\sin t) = \frac{3}{s^2+1}$　　$\mathcal{L}(t^5) = \frac{120}{s^6}$　　$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s}$

積分変数や変換変数に他の記号を利用することもできます．その例を次に示します．

▶ **計算**

$\mathcal{L}(x, x, y) = \frac{1}{y^2}$　　$\mathcal{L}(e^{-\alpha t}H(t), t, s) = \frac{1}{s+\alpha}$

$\mathcal{L}(3\sin x, x, s) = \frac{3}{s^2+1}$　　$\mathcal{L}(te^{-\alpha t}H(t), t, s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$

逆ラプラス変換の実行

変数 s による数式の逆ラプラス変換を実行する場合は，**変換**サブメニューを利用します．

▶ **変換 + 逆ラプラス**

$\frac{2}{s^3}$，逆ラプラス変換 t^2　　$\frac{1}{s+\alpha}$，逆ラプラス変換 $e^{-t\alpha}$

1，逆ラプラス変換 $\mathrm{Dirac}(t)$　　$\frac{120}{s^6}$，逆ラプラス変換 t^5

▶ **記号$\mathcal{L}$ を使って逆ラプラス変換を求める**

1. アイコン にあるその他の記号パネルから$\mathcal{L}$をクリックして，さらに，この記号を数式モードに切替えます．
2. 上付き文字に -1 を付けます．
3. アイコン をクリックするか，**挿入** + **ペアカッコ**を選びます．
4. カッコの中に，変数 s の数式を入力します．
   または
   次の 3 つの要素をカンマで区切って入力します．
   (a) 変換する数式

　　(b) 変換変数
　　(c) 目的関数の変数
5. 計算コマンドを選びます.

デフォルトの変換変数は s, デフォルトの目的関数の変数は t です. 3 つの要素を正しく入力すれば, 逆ラプラス変換は正しく計算されます.

▶ **計算**

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$　　$\mathcal{L}^{-1}(1) = \mathrm{Dirac}(t)$　　$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+1}\right) = 3\sin t$

他の変数名を使う場合は, 積分変数, 変換変数を次の例のように正確に記述してください.

▶ **計算**

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x+\alpha}, x, y\right) = e^{-\alpha y}$　　$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}, s, x\right) = x^2$　　$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{120}{y^6}, y, x\right) = x^5$

パラメータの範囲を制限する場合, 関数 assume や additionally を使います. 詳細は 254 ページを参照してください.

次の 2 つの例は, ラプラス変換を使って微分方程式を解く方法です.

Example 50 次の微分方程式を解きます.

$$f' + af = 0,\ f(0) = b$$

関数定義サブメニューの**新しい定義**コマンドで $f(t)$ を汎用の関数として, a と b を汎用の定数として定義します. ここで方程式の両辺に**計算**コマンドを実行します.

$$\mathcal{L}(f' + af) = \mathcal{L}(0)$$

次のようになります.

$$s\mathcal{L}(f) - f(0) + a\mathcal{L}(f) = 0$$

これを$\mathcal{L}(f)$ について解きます.

$$\mathcal{L}(f) = \frac{b}{s+a}$$

ここで逆ラプラス変換を実行します.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{s+a}\right) = be^{-ta}$$

式 $f(t) = be^{-ta}$ を定義して $f'(t) + af(t)$ と $f(0)$ に**計算**コマンドを実行して上の解を確認してください.

$$f'(t) + af(t) = 0$$
$$f(0) = b$$

Example 51 次の 2 階微分方程式

$$y'' + y = 0$$

の初期条件を $y(0) = 1$ および $y'(0) = -2$ とします．汎用関数として $y(t)$ を定義し，式 $\mathcal{L}(y''(t) + y(t), t, s)$ に**計算**コマンドを実行すると

$$\mathcal{L}(y''(t) + y(t), t, s) = s\left(s\mathcal{L}(y) - y(0)\right) - y'(0) + \mathcal{L}(y) = 0$$

次の式を解きます．

$$s\left(s\mathcal{L}(y) - y(0)\right) - y'(0) + \mathcal{L}(y) = 0$$

ここで$\mathcal{L}(y)$ に対して**求解**サブメニューから**解**コマンドを選択します．

$$\mathcal{L}(y) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + 1}$$

$y(0)$ に 1 を，$y'(0)$ に -2 を代入します．

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s - 2}{s^2 + 1}$$

ここで逆ラプラス変換の式 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2+1}\right)$ を記述し，**計算**コマンドを実行するか，または $\frac{s-2}{s^2+1}$ に対して**変換**サブメニューから**逆ラプラス**として次式を得ます．

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s - 2}{s^2 + 1}\right) = \cos t - 2\sin t$$

ここで $y(t) = \cos t - 2\sin t$ の時，$y''(t) = -\cos t + 2\sin t$ であり，$y''(t) + y(t) = 0$，$y(0) = 1$，および $y'(0) = -2$ であることをユーザ自身が確認してください．

10.1.5　フーリエ変換

フーリエ変換を使えば，線形システムの問題や，電気ネットワークや情報理論などの発散系の数学的研究に対応することができます．

いま，f を区間 $[-\infty, \infty]$ における実数値関数とします．この時，関数 $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ は次の積分式で定義されます．

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f(x), x, w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} f(x)\,dx$$

積分計算を実行した変数 w による数式を関数 f のフーリエ変換と呼びます．これはカーネル $K(w,t) = e^{-iwt}$ または $K(w,t) = e^{iwt}$ を積分変換したものです．フーリエ変換は関数 f と w の値に依存します．

フーリエ変換の実行

変数 x による数式のフーリエ変換を実行する場合は, **変換**サブメニューを利用します.

▶ **変換 ＋ フーリエ**

1, フーリエ変換: $2\pi \operatorname{Dirac}(w)$

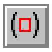
$\operatorname{Dirac}(x)$, フーリエ変換: 1

$\operatorname{Heaviside}(x)$, フーリエ変換: $\pi \operatorname{Dirac}(w) + \frac{i}{w}$

e^{-ix}, フーリエ変換: $2\pi \operatorname{Dirac}(w-1)$

記号$\mathcal{F}$を使ってフーリエ変換を計算することもできます.

▶ **記号$\mathcal{F}$を使ってフーリエ変換を計算する**

1. その他の記号パネルから  をクリックして$\mathcal{F}$を選択します. さらに, この記号を数式モードに切替えます.
2. **挿入 ＋ カッコ**で ( ) を選択するか,  をクリックします.
3. カッコ内に次のように入力します.
   - 変数 x からなる目的の数式を入力します.
     または
   - 次の 3 つの項目をカンマで区切って入力します.
     (a) 目的の関数
     (b) 積分変数 (目的関数の変数)
     (c) 変換する変数
4. 計算コマンドを実行します.

▶ **計算**

$\mathcal{F}(1) = 2\pi \operatorname{Dirac}(w)$　　$\mathcal{F}(\operatorname{Dirac}(x)) = 1$

$\mathcal{F}(1,t,w) = 2\pi \operatorname{Dirac}(w)$　　$\mathcal{F}(\operatorname{Dirac}(t),t,w) = 1$

$\mathcal{F}(1/x) = i\pi(2\operatorname{Heaviside}(w) - 1)$　　$\mathcal{L}(1/x,t,w) = 2\frac{\pi}{x}\operatorname{Dirac}(w)$

逆フーリエ変換の実行

変数 w による数式の逆フーリエ変換を実行する場合は, **変換**サブメニューを利用します.

▶ **変換 ＋ 逆フーリエ**

$2\pi \operatorname{Dirac}(w)$, 逆フーリエ変換 1　　1, 逆フーリエ変換 $\operatorname{Dirac}(x)$

$\pi \operatorname{Dirac}(w) + \frac{i}{w}$, 逆フーリエ変換 $\frac{1}{2\pi}(\pi - \pi(2\operatorname{Heaviside}(-x) - 1))$

$2\pi \operatorname{Dirac}(w+1)$, 逆フーリエ変換 e^{ix}

$2\pi \operatorname{Dirac}(w-2\pi)$, 逆フーリエ変換 $e^{-2i\pi x}$

記号$\mathcal{F}$を使って逆フーリエ変換を計算することもできます.

▶ **記号$\mathcal{F}^{-1}$ フーリエ変換を計算する**

1. その他の記号パネル をクリックし，$\mathcal{F}$ を選択します．さらに，この記号を数式モードに切替えます．
2. アイコン をクリックするか，**挿入**メニューから**上付き文字**を選びます．
3. 入力ボックスに -1 を入力し，スペースバーを 2 回押して入力ボックスから離れます．
4. **挿入** + **カッコ**で ( ) を選択するか，をクリックします．
5. カッコ内に，変数 w からなる目的の数式を入力します．

または
次の 3 つの項目をカンマで区切って入力します．

1. • (a) 目的の関数
   (b) 積分変数
   (c) 変換する変数
2. **計算**コマンドを実行します．

変換変数は w または，積分変数を利用します．また，変換変数は次の例に示す方法で指定しなければなりません．

▶ **計算**

$\mathcal{F}^{-1}\left(2\pi\,\mathrm{Dirac}\left(w\right)\right)=1$ $\mathcal{F}^{-1}\left(2\pi\,\mathrm{Dirac}\left(h\right),h,s\right)=1$

$\mathcal{F}^{-1}\left(\pi\,\mathrm{Dirac}\left(s\right)-\frac{i}{s},s,h\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\pi+\pi\left(2\,\mathrm{Heaviside}\left(-h\right)-1\right)\right)$

次に示す例題では，**簡単化**コマンドを実行して解をさらに簡単な形に変換します．

▶ **簡単化**

$\mathcal{F}^{-1}\left(-i\pi\delta\left(-\omega+\omega_0\right)+i\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right),\omega,t\right)=\frac{1}{2}e^{it\omega_0}\left(i-ie^{-2it\omega_0}\right)$

複数の式の変換および逆変換を計算するには，1 列の行列に式を入力し，計算コマンドを実行します．

▶ **計算**

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} e^{2\pi ix} \\ 2\pi\,\mathrm{Dirac}\left(x-2\pi\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\pi\,\mathrm{Dirac}\left(w-2\pi\right) \\ 2\pi e^{-2i\pi w} \end{pmatrix}$$

10.2 初期値問題と常微分方程式の系

複数の式で構成される系は連立式として取り扱うことができます．実際，初期値問題と微分方程式の系は同じように考えることができます．

10.2.1 解コマンド

複数の方程式によって構成される問題の中には，初期条件，微分方程式，境界値問題などを場合によってはまとめて記述しなければならないことがあります．これらの入力には $n\times 1$ 行列を使います．ここで n は方程式と条件式の数となります．その他には をクリックして，複数行の

ディスプレイに記述する方法もあります.

▶ **微分方程式の系を行列に入力する**

1. アイコン をクリックするか, 挿入メニューから行列を選びます.
2. 列数を 1 とし, 行数は方程式の数だけ設定し, OK ボタンをクリックします.
3. **表示**メニューから**入力ボックス**と**ヘルパーライン**が選択されていることを確認します. (既にヘルパーラインと入力ボックスが表示されている場合は必要ありません)
4. 1 行に一つの数式を入力します.

▶ **微分方程式の系をディスプレイ環境に入力する**

1. アイコン をクリックするか, 挿入メニューかディスプレイを選択する, または ctrl + d. を押します.
2. **表示**メニューから**入力ボックス**と**ヘルパーライン**が選択されていることを確認します. (既にヘルパーラインと入力ボックスが表示されている場合は必要ありません)
3. 1 行に一つの数式を入力します. 必要に応じて ENTER キーを押して行を作成します.

▶ **微分方程式の系を計算する**

1. 行列またはディスプレイ環境内の数式にカーソルを配置します.
2. 常微分方程式サブメニューから解またはラプラスを選択します.

▶ **常微分方程式 + 解**

$$\begin{array}{r} y' + y = x \\ y(0) = 1 \end{array} \quad (\text{独立変数: } x),$$

$$\text{解：} \{x + 2e^{-x} - 1\}$$

初期値問題を含む 2 階微分の方程式 $y'' + y = x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ を解く場合は, これらを 3×1 行列に入力し, **常微分方程式**サブメニューから**ラプラス**コマンドを選択します.

▶ **常微分方程式 + ラプラス**

$$\begin{array}{r} y'' + y = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{array} \quad (\text{独立変数: } x),$$

$$\text{ラプラス変換の解: } \left\{3\cos x + \sin x + x^2 - 2\right\}$$

微分方程式の記述法にはいくつかの方法があります. それを次に示します.

▶ **常微分方程式 + ラプラス**

$$\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = \sin x \\ y(0) = 1 \end{array}, \text{ ラプラス変換の解: } 2 - \cos x$$

$$\begin{aligned} D_{xx}y - y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$, ラプラス変換の解: $\cosh x$

次の例のように, 系には表示されていない独立変数が計算によって出現する場合もあります.

▶ **常微分方程式 + 解**

$$\begin{aligned} y' &= x \\ x' &= -y \end{aligned}$$ (独立変数 t),

方程式の解: $\left[x(t) = C_6 e^{it} + C_7 e^{-it}, y(t) = iC_7 e^{-it} - iC_6 e^{it}\right]$

解コマンドを使ったこの解には 2 つのパラメータ含まれています.

▶ **常微分方程式 + ラプラス**

$$\begin{aligned} y' &= x \\ x' &= -y \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$ (独立変数 t), ラプラス変換の解: $[y(t) = \cos t, x(t) = -\sin t]$

従属変数に下付き文字を付けることもできます.

▶ 常微分方程式 + ラプラス

$$\begin{aligned} D_{xx}y_1 - y_1 &= 0 \\ y_1(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 0 \end{aligned}$$, ラプラス変換の解: $\cosh x$

非線形方程式に対して**解**コマンドを利用した例を次に示します. ラプラス変換は線形方程式に対してのみ有効なので, ここでは役に立ちません. $\ln x$ が点 $x = 0$ において x について級数展開できないので, **級数解**コマンドも利用できません.

▶ **常微分方程式 + 解 (独立変数 t)**

$$\begin{aligned} y' &= y^2 + 4 \\ y(0) &= -2 \end{aligned}$$ (独立変数 t), 方程式の解: $2\tan\left(2t - \dfrac{1}{4}\pi\right)$

▶ **常微分方程式 + 解 (独立変数 x)**

$$\begin{aligned} (x+1)y' + y &= \ln x \\ y(1) &= 10 \end{aligned}$$ (独立変数 x), 方程式の解: $-\frac{1}{x+1}(x - x\ln x - 21)$

10.2.2　級数解コマンド

級数解コマンドを使って微分方程式を解く場合は次の様にします. 級数の項数は**計算エンジン設定**ダイアログの一般タブで設定可能です. 次の例題は項の数を 6 として計算します.

▶ **常微分方程式 + 級数解**

$$\begin{aligned} D_{xx}y_1 - y_1 &= 0 \\ y_1(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 0 \end{aligned}$$, 級数解: $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O\left(x^5\right)$

$\begin{array}{r} y' = y^2 + 4 \\ y(0) = -2 \end{array}$ (独立変数 t), 級数解: $-2 + 8t - 16t^2 + \frac{128}{3}t^3 - \frac{320}{3}t^4 + O\left(t^5\right)$

10.3　常微分方程式の数値解

系の中には数値解を求めることのできるものもあります. 数値解は任意の点で求めることができ, しかもプロットできます.

10.3.1　初期値問題の数値解

▶　初期値問題の数値解を求める

1. 列行列に次のように初期値問題を入力します.

$$\begin{aligned} y' &= -y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

   1 行には 1 つの方程式を入力します.

2. **常微分方程式**サブメニューから**数値解**コマンドを選択します.

▶　常微分方程式 + 数値解

$\begin{array}{r} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{array}$, 定義された関数: y

上記のように関数 y が新たに定義されました. この関数の任意の点における値は**計算**コマンドで求めることができます. この式を使って関数値の一覧やプロットを作成します.

▶　計算

$y\,(1) = 0.367\,88$　　　　$y\,(10.7) = 2.\,254\,3 \times 10^{-5}$

▶　関数 y の値を表形式で示す

1. 関数 $g(i) = 0.1i$ を定義します. **行列**サブメニューから**要素の作成**コマンドを選択します.
2. ダイアログで 3 行 1 列の設定を行います. 定義した関数を利用するオプションを選択し, 関数名を g とし, 0 から 1 の値を作成します.
3. 列を選択してカッコで囲みます. 列の左側に y を入力します.
4. **計算**コマンドを実行します.

$$y\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.904\,84 \\ 0.818\,73 \\ 0.740\,82 \end{bmatrix}$$

▶　計算

$$y\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.904\,84 \\ 0.818\,73 \\ 0.740\,82 \end{bmatrix}$$

これにより x を 0.1 から 1 とした時の関数 y の値のリストを作成できました. 確認のため, 初期値問題を**解**コマンドで解きます.

▶ **常微分方程式 ＋ 解**

$\begin{array}{r} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}$ (独立変数 t), 方程式の解: e^{-t}

前と同じ値を使って, 関数 $y\,(t) = e^{-t}$ を計算します. 有効数字の範囲では, まったく同じ値が求められます.

$$y \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.904\,84 \\ 0.818\,73 \\ 0.740\,82 \end{bmatrix}$$

10.3.2　初期値問題のプロット

数値解が分かれば, それをプロットすることができます. 初期値問題 $y' = \sin xy$, $y(0) = 3$ をプロットしてみましょう. 2×1 行列に 2 つの方程式を入力します. そして**常微分方程式**サブメニューから**数値解**コマンドを選択します.

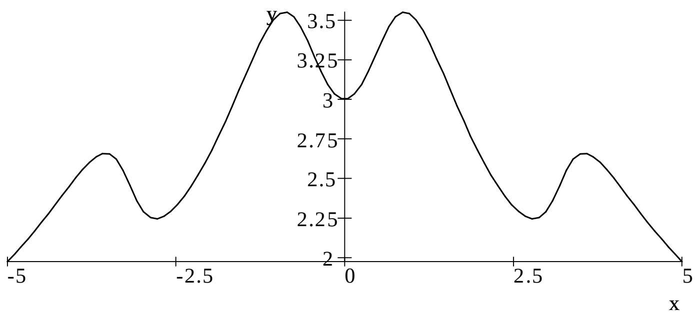
▶ **常微分方程式 ＋ 数値解**

$\begin{array}{r} y' = \sin xy \\ y(0) = 3 \end{array}$, 定義された関数: y

2D プロットサブメニューの**直交座標**コマンドを使って y をプロットします.

▶ **2D プロット ＋ 常微分方程式**

y



曲線が滑らかでない場合, プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブでプロットの範囲とアニメーションを選択し, ポイント数を増やします. 表示範囲を変更することもできます.

10.3.3　微分方程式の系に対する数値解

次のような系を数値解コマンドで解く場合は 6×1 行列に各方程式を入力し, **常微分方程式**サブメニューから**数値解**コマンドを選択します. 3 つの関数 x, y, z が新たに定義されます.

▶ **常微分方程式 ＋ 数値解**

$$\begin{aligned} x' &= x + y - z \\ y' &= -x + y + z \\ z' &= -x - y + z \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 1 \end{aligned}\text{, 定義された関数: } x, y, z$$

独立変数を t として, それが 0 から 1 までの範囲にある場合の変数 x, y, z の値は次のようになります.

t	x	y	z
0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.1158	1.0938	0.8842
0.2	1.2668	1.1695	0.7332
0.3	1.4582	1.2173	0.5418
0.4	1.6953	1.2253	0.3047
0.5	1.9830	1.1791	0.0170
0.6	2.3256	1.0619	−0.3256
0.7	2.7265	0.8542	−0.7265
0.8	3.1873	0.5344	−1.1873
0.9	3.7077	0.0777	−1.7077
1.0	4.2842	−0.5424	−2.2842

上記の表を作成する手順を次に示します.

1. 関数 $x\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1.0 \end{bmatrix}$ に**計算コマンド**を実行して $x\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.2668 \\ 1.6953 \\ 2.3256 \\ 3.1873 \\ 4.2843 \end{bmatrix}$
2. 同じ要領で y と z についても計算します.
3. このようにして作成した 4 つの列 $\mathbf{t}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ をそれぞれ隣り合わせに移動して, **行列**サブメニューから**連結コマンド**を選択します.
4. 一番上にラベルの行を追加します. 行列を選択し, **編集** + **挿入**とします.
5. 列に入力されている項目の位置揃えを行う場合は, 目的の行を選択し, **編集** + **プロパティ**とします. そこで, 整列位置を設定します.

Tip　行列だけを選択します. カッコは選ばないでください. **編集**メニューに**行の挿入**というメニューが追加表示されます.

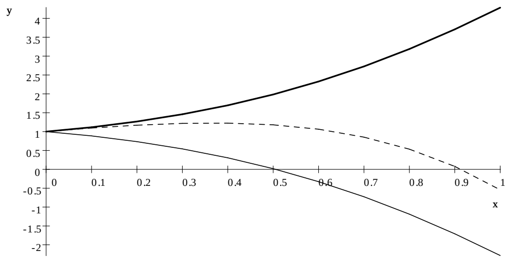
あらかじめ 12×4 の表を作成し, そこにコピーコマンドなどを使って, 同じ表を作成することも可能です. 印刷時に線を付けた表を作るには, 標準ツールバーの  をクリックするか, 挿入 + 表

を選びます. 各データを選択したり, クリックしたり, ドラッグして表に情報をコピーします. 編集 + **プロパティを選び**, **表ダイアログの項目に従って行を追加します**. このダイアログボックスは, 表形式の外観を作成するためのもので, 表は行列のように数学的な演算を行うことはできません.

10.3.4 常微分方程式の系のプロット

先程の例で求めた関数 x, y, z をプロットします.

1. 列 t と列 x を連結します.
2. 2D プロット + 直交座標を使って, 行列をプロットします.
3. 同様に, t と y を使って行列を作成し, プロットにドラッグします.
4. 同様に, t と z を使って行列を作成し, プロットにドラッグします.
5. プロットのプロパティダイアログを開き, プロットした数式タブを選びます. x に対する行列をプロット番号 1 となっていることを確認します.
6. x の行列を含むプロット番号 1 を選び, 線の太さを標準にします.
7. y の行列を含むプロット番号 2 を選び, 線種をダッシュにします. OK をクリックします.

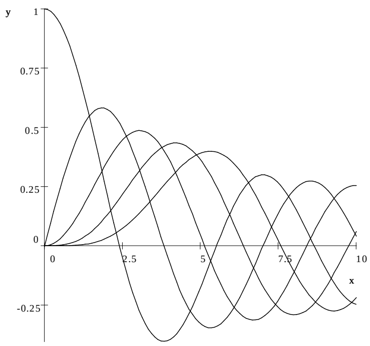


t が 0 から 1 の間で変化しているので全体的な様子をプロットすることはできません. ただし, このプロットからは微分方程式の系が不安定であることは予測できます.

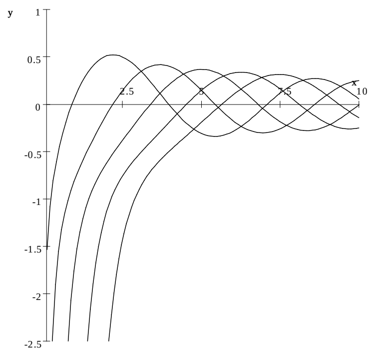
10.3.5 ベッセル関数

4 つのベッセル関数 $J_v(z)$, $Y_v(z)$, $I_v(z)$, $K_v(z)$ は複雑な振動関数です. また, ベッセル関数には興味深いプロパティが数多くあります. これらは複素引数 v と z で定義されます.
関数 $J_v(z)$ と $Y_v(z)$ は次に示すベッセルの微分方程式の第一種および第二種の解です.

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+\left(z^2-v^2\right)w=0$$



$J_v\left(z\right),\ v=0,1,2,3,4$



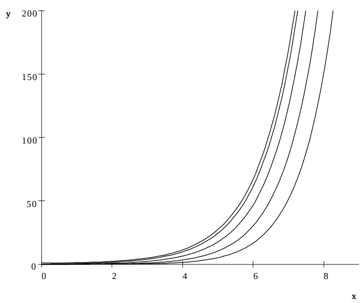
$Y_v(z),\ v=0,1,2,3,4$

この 2 つのベッセル関数はガンマ関数で定義することができます.

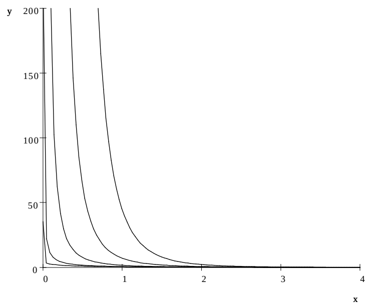
$$
\begin{aligned}
J_v\left(z\right) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\cos\left(z\cos t\right)\sin t^{2v}dt\\
Y_v(z) &= \frac{J_v\left(z\right)\cos v\pi - J_{-v}\left(z\right)}{\sin v\pi}
\end{aligned}
$$

また, 関数 $J_v(z)$ と $Y_v(z)$ (または $\mathrm{BesselJ}_v\left(z\right)$ と $\mathrm{BesselY}_v\left(z\right)$) も次に示すベッセルの微分方程式の第一種および第二種の解です.

$$
z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-\left(z^2+v^2\right)w=0
$$



$I_v\left(z\right),\ \nu=0,1,2,3,4$



$K_v(z),\ v=0,1,2,3,4$

これらの関数もガンマ関数で定義することができます.

$$
\begin{aligned}
I_v\left(z\right) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\exp\left(z\cos t\right)\sin t^{2v}dt\\
K_v(z) &= \frac{\pi}{2}\frac{I_{-v}\left(z\right)-I_v\left(z\right)}{\sin v\pi}
\end{aligned}
$$

BesselJ, BesselY, BesselI, BesselK は自動的にベッセル関数として解釈されます. I_v, J_v, K_v, Y_v がベッセル関数として解釈されるように, デフォルトの設定を変更することができます. 設定は, グローバル (すべての文書) またはローカル (アクティブな文書) のどちらかに行います.

▶ **ベッセル関数のためのカスタム名を作成する**

1.  をクリックするか, 挿入メニューから数式名を選択します.
2. 数式名テキストボックスに BesselI, BesselK, BesselJ, BesselY とここで記述されているように大文字を含めて入力します.
3. OK ボタンをクリックします.
4. 下付き文字を入力します.
5. カッコ内に引数を入力します.

▶ **すべての文書でベッセル関数の表記に I, J, K, Y を利用する**

1. ツールメニューから数式処理設定を選び, 一般タブを選びます.
2. ベッセル関数の表記から, I, J, K, Y に下付き文字を付けて利用するにチェックします.
3. OK ボタンをクリックします.
4. 下付き文字を入力し, カッコ内に引数を入力します.

▶ **ある文書でベッセル関数の表記に I, J, K, Y を利用する**

1. 数式処理メニューから設定を選び, 一般タブを選びます.
2. ローカル設定にチェックをし, ベッセル関数の表記から, I, J, K, Y に下付き文字を付けて利用するにチェックします.
3. OK ボタンをクリックします.
4. 下付き文字を入力し, カッコ内に引数を入力します.

この設定は, アクティブな文書には保存されますが, 他の文書に対しては設定されません.
上記どちらかの設定を行えば, 計算エンジンにより関数名 I_v, J_v, K_v, Y_v は, 自動的にベッセル関数に置換されます.
引数が浮動小数と数値であったり, 数値計算を実行した場合, 浮動小数点値が返されます.

▶ **計算**

$I_{2+3i}(3.5-5i) = -12.996 - 2.3116i$

$J_2(6+i) = J_2(6+i) \qquad J_2(6.0+i) = -0.37649 - 0.21941i$

▶ **数値計算**

$K_{2+3i}(3-5i) = 7.3755 \times 10^{-3} - 4.7928 \times 10^{-3}i$

指数 v が半整数の場合, 明示的な記号式が返されます.

▶ **計算**

$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \sin x \qquad Y_{3/2}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \left(\sin x + \frac{1}{x}\cos x\right)$

$I_{7/2}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \left((\sinh x)\left(\frac{6}{x} + \frac{15}{x^3}\right) - (\cosh x)\left(\frac{15}{x^2} + 1\right)\right)$

$K_{-7/2}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}e^{-x}\left(\frac{6}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{15}{x^3}+1\right)$
負の実数軸は非整数指数 v のベッセル関数の分岐切断です．この切断を横切る場合には値の移動が発生します．

▶ **計算**
$I_{-3/4}(-1.2) = -0.760\,61 - 0.760\,61i$
$I_{-3/4}\left(-1.2 + 10^{-10}i\right) = -0.760\,61 - 0.760\,61i$
$I_{-3/4}\left(-1.2 - 10^{-10}i\right) = -0.760\,61 + 0.760\,61i$
浮動小数近似式に厳密な数値式の引数が求められる場合, 数値的に計算を行うよりも, 引数に浮動小数点形式を使用することことをお奨めします．特に半整数指数の場合, 記号式の解は計算が複雑になり, 記号式の浮動小数点形式の演算は数値的に不安定なものになる可能性があります．数式処理の有効桁数を増やせば, 下記のように満足のいく結果になる可能性がありますが, 通常は, 引数に浮動小数点形式を用いる方がより正確な結果を求めることができます．

▶ **計算, 数値計算**
$J_{51/2}(\pi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{450\,675\,225}{\pi^4} - \frac{52\,650}{\pi^2} - \frac{1466\,947\,857\,375}{\pi^6} + \ldots\right.$
$\quad\left. + \frac{58\,435\,841\,445\,947\,272\,053\,455\,474\,390\,625}{\pi^{24}} + 1\right) = 2.\,423\,7 \times 10^{-10}$
$J_{51/2}((1.0)\,\pi) = 1.\,160\,1 \times 10^{-21}$
ベッセル関数は他の数学演算の結合に利用することができます．

▶ **計算**
$\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x) \qquad \frac{d}{dx}J_1(x) = \frac{1}{x}\left(xJ_0(x) - J_1(x)\right)$
$\lim_{x\to\infty} J_2\left(x^2+1\right) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} I_{3/2}\left(x^2+i\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(i\infty + \infty)$
▶ べき級数 (項数: 5; **展開する変数**: x)
$\dfrac{Y_3(x)}{x} = -\frac{16}{\pi x^4} - \frac{2}{\pi x^2} - \frac{1}{4\pi} + O(x)$

10.4　練習問題

1. 式 $y'' - 6y' + 5y = 0$ の一般解を求めてください．
2. 式 $x^2y'' - 3xy' - 6y = 0$ の一般解を求めてください．
3. 式 $2x^2y' = xy + 3y^2$ の一般解を求めてください．
4. 初期値問題 $y' + y = 2$, $y(0) = 0$ の解を求めてください．
5. 初期値問題 $\frac{dy}{dx} - y + 3 = 0$, $y(0) = 1$ の解を求めてください．
6. ベッセル方程式 $z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + \left(z^2 - v^2\right)w = 0$. の解を求めてください．
7. 方程式 $y' + y^2 + b + ax = 0$ の解を求め, 結果が正しいか確認してください．
8. ニュートンの冷却の法則によれば, 物体の温度変化率は $\frac{dT}{dt} = k(T-R)$ で与えられます．ここで, k は物体の絶縁に関する定数, T は物体の温度, R は室温とします．カップの中のコーヒーが 160°, これが 10 分後に 120° とします．室温を 70° で一定とすると, 時刻 t における温度が分かります．20 分後のコーヒーの温度を求めてください．

10.5　練習問題の答え

1. 常微分方程式 + 解

$$y'' - 6y' + 5y = 0,\ \text{方程式の解:}\ C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}$$

2. 常微分方程式 + 解 (独立変数 x)

$$x^2 y'' - 3xy' - 6y = 0,\ \text{方程式の解:}\ y(x) = C_1 x^{2+\sqrt{10}} + C_2 x^{2-\sqrt{10}}$$

3. 常微分方程式 + 解 (独立変数 x)2

$$2x^2 y' = xy + 3y^2,\ \text{方程式の解:}\ \begin{bmatrix} \frac{x}{9C_{16}-9x}\left(3C_{16} - 3\sqrt{C_{16}x}\right) \\ \frac{x}{9C_{16}-9x}\left(3C_{16} + 3\sqrt{C_{16}x}\right) \end{bmatrix}$$

4. 常微分方程式 + ラプラス

$$\begin{array}{r} y' + y = 2 \\ y(0) = 0 \end{array},\ \text{ラプラス変換の解:}\ y(t) = 2 - 2e^{-t}$$

5. 常微分方程式 + 解

$$\begin{array}{r} \frac{dy}{dx} - y + 3 = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\quad \text{方程式の解:}\ 3 - 2e^{x}$$

6. 常微分方程式 + 解

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + \left(z^2 - v^2\right) w = 0,$$
$$\text{方程式の解:}\ C_{31}\,\mathrm{BesselJ}_v(z) + C_{32}\,\mathrm{BesselY}_v(z)$$

7. 常微分方程式 + 解

$$y' + y^2 + b + ax = 0,\ \text{方程式の解:}$$
$$-\frac{C_{29}\,\mathrm{AiryAi}\left(-\frac{1}{a}\frac{b+ax}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, 1\right) + \mathrm{AiryBi}\left(-\frac{1}{a}\frac{b+ax}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, 1\right)}{\mathrm{AiryBi}\left(-\frac{1}{a}\frac{b+ax}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, 0\right)\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + C_{29}\,\mathrm{AiryAi}\left(-\frac{1}{a}\frac{b+ax}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, 0\right)\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$$

関数定義 + 新しい関数

$$y(x) = -\frac{C_{29}\,\mathrm{AiryAi}\left(-\frac{1}{a}\frac{b+ax}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, 1\right) + \mathrm{AiryBi}\left(-\frac{1}{a}\frac{b+ax}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, 1\right)}{\mathrm{AiryBi}\left(-\frac{1}{a}\frac{b+ax}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, 0\right)\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + C_{29}\,\mathrm{AiryAi}\left(-\frac{1}{a}\frac{b+ax}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}, 0\right)\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$$

計算 + 簡単化

$$\begin{aligned}
&y'(x) + y(x)^2 + b + ax \\
&= b - \frac{\frac{1}{a}\frac{\operatorname{AiryBi}\left(-\frac{1}{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}(b+ax),0\right)}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}^2}(b+ax) + \frac{1}{a}C_{29}\frac{\operatorname{AiryAi}\left(-\frac{1}{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}(b+ax),0\right)}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}^2}(b+ax)}{\operatorname{AiryBi}\left(-\frac{1}{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}(b+ax),0\right)\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + C_{29}\operatorname{AiryAi}\left(-\frac{1}{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}(b+ax),0\right)\sqrt[3]{\frac{1}{a}}} + ax \\
&= 0
\end{aligned}$$

8. 常微分方程式 + 解

$$\frac{dT}{dt} = k(T-70), \text{ 方程式の解: } T(t) = \begin{bmatrix} 70 \\ C_{18}e^{kt} + 70 \end{bmatrix}$$

求解 + 解

$$\begin{matrix} 160 = 70 + e^{k(0)}C_1 \\ 120 = 70 + e^{k(10)}C_1 \end{matrix}, \text{ 解: } \left[C_1 = 90, k \in \left\{\frac{1}{5}i\pi X_{219} + \frac{1}{10}\left(\ln\frac{5}{9}\right) \mid X_{219} \in \mathbb{Z}\right\}\right]$$

関数定義 + 新しい定義

$$\begin{aligned} C_1 &= 90 \\ k &= \frac{1}{10}\ln\frac{5}{9} \\ T(t) &= 70 + e^{kt}C_1 \end{aligned}$$

計算

$$T(t) = 90\exp\left(t\left(\frac{1}{10}\ln 5 - \frac{1}{10}\ln 9\right)\right) + 70$$

数値計算

$$T(20) = 97.8^\circ$$

第 11 章

統計

統計とは確率という世界の中である推論を作りあげるための芸術的な科学です．定量的なデータを収集し, それを分析する手法は大変洗練されたものとなっています．統計と言う言葉は定量的なデータからの推論を示す場合と, 統計学そのものを示す場合に使われます．ちなみに, 統計学とは定量的なデータを効率的に収集する方法と, そのデータを活用する用途の研究とされています．

11.1　統計に関する基本機能

統計に関するコマンドは**統計**サブメニューに用意されています．ただし, これだけではありません．基本的な分布関数や密度関数が他にも内蔵されていますし, 関数として定義することができます．
基本的なコマンドである平均値, 中央値, 最頻値, モーメント, 四分位数, 平均偏差, 標準偏差, 分散は**統計**サブメニューに用意されており, 1 つの引数を取ります．この場合の引数はリスト形式のデータや行列形式のデータとなります．実際に計算を行うと, その答えは, 引数が数値の場合は数値で, 引数が行列形式の場合は行列で出力されます．
相関, 共分散, 関数フィットの引数は必ず行列形式にする必要があります．特に関数フィットの場合は変数名をラベルとして付けてください．乱数コマンドは目的の分布関数を使って乱数を発生させることができます．利用できる分布関数は選択している数式処理エンジンによって異なります．

11.1.1　リストと行列

統計に利用するデータはリスト, または, 行列の形式で用意します．リストに数値データを並べる場合はコンマで区切ります．データとコンマは共に数式モードで入力します．リストはカッコで囲んでもかまいません．リスト形式で入力したデータをデータセットと呼ぶこともあります．カッコの無いリストはそのまま, 行列に変形することもできます．

► **カンマ区切りのリストやデータセットを行列に変形する**

1. リストに文字モードでデータを入力した時は, そのリストを選択し,  をクリックして数式モードに変えます．
1. リストまたはデータセットにカーソルを移動します．
2. **行列**サブメニューから**変形**コマンドを選択します．

3. ダイアログボックスが表示されたら, 列数を入力します.
4. OK ボタンをクリックします.
5. 行列をマウスで選択して をクリックします.

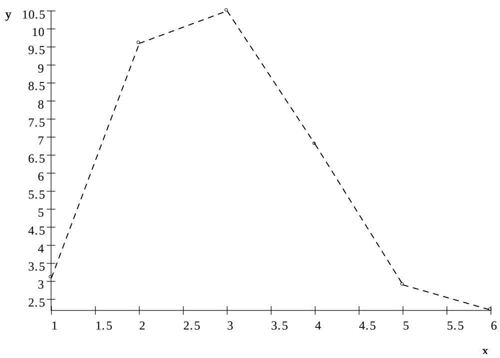
▶ **行列 ＋ 変形**

$$2, 4, 7, 15, -8, 0, -10, \text{(列数: 4)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 15 \\ -8 & 0 & -10 & \end{bmatrix}$$

$$1, 3.1, 2, 9.6, 3, 10.5, 4, 6.8, 5, 2.9, 6, 2.2, \text{(列数: 2)} \begin{bmatrix} 1 & 3.1 \\ 2 & 9.6 \\ 3 & 10.5 \\ 4 & 6.8 \\ 5 & 2.9 \\ 6 & 2.2 \end{bmatrix}$$

▶ **2D プロット ＋ 直角座標**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3.1 \\ 2 & 9.6 \\ 3 & 10.5 \\ 4 & 6.8 \\ 5 & 2.9 \\ 6 & 2.2 \end{bmatrix}$$



ここでは一つの行列から 2 つのプロットを作成しました. プロット 1 はシンボルを点としたもので, プロット 2 は点線で描いたものです. 詳細は 300 ページを参照してください.

11.1.2　アスキーファイルのインポート

アスキーファイル (*.txt) をインポートする場合は**ファイル ＋ 開く**, または, **ファイル ＋ テキストのインポート**コマンドを利用します. インポートしたデータを数式モードのリストや行列に変換する方法は次に説明します. データインポートに関する詳細な情報はヘルプの検索コマンドを利用して探してください.

インポートしたデータがコンマで区切られている場合, それらをマウスで選択し, をクリックして数式モードのデータに変換します. 変換したデータはリストとして利用できますし, 必要に応じて先の方法でベクトルや行列に変換できます.
データが列形式の場合は, スペース区切りのデータとしてインラインにインポートします.

▶ **スペース区切りの数値データをリストに変更する**

1. マウスでデータを選択します.
2. **編集** + **置換**とします.
3. 検索のボックスにスペースと**数式ブレーク**を入力します.
4. 置換する語にはコンマを入力し, 次に**挿入** + **スペース** + **ブレーク**とし, **数式ブレーク**を選択します. OK をクリックします.
5. **すべて置換**のボタンをクリックします.
6. マウスでデータを選択します.
7. アイコン  をクリックするか, **挿入** + **数式**を選びます.

Note 操作の順番が非常に大切です. スペースをコンマで置換する前に数式モードにしてしまうと, スペースが見つからず, 小数点が移動して一つの数字になってしまいます.

Example 52 **ファイル** + **内容のインポート**: 345 26 14 8 19 36 32 14 9 4 20

編集 + **置換** + **すべて置換**: 345,26,14,8,19,36,32,14,9,4,20

挿入 + **数式**: $345, 26, 14, 8, 19, 36, 32, 14, 9, 4, 20$

数式処理 + **行列** + **変形** (2 列): $\begin{bmatrix} 345 & 26 \\ 14 & 8 \\ 19 & 36 \\ 32 & 14 \\ 9 & 4 \\ 20 & \end{bmatrix}$

1 次元データの例を次に示します.

Example 53 **ファイル** + **内容のインポート**: 345,26,14,8,19,36

挿入 + **数式**: $345, 26, 14, 8, 19, 36$

数式処理 + **行列** + **変形** (1 列): $\begin{bmatrix} 345 \\ 26 \\ 14 \\ 8 \\ 19 \\ 36 \end{bmatrix}$

関数定義+ **新しい定義** $g(i) = i$

行列+ **要素の作成**(定義された関数 g, 6 行, 1 列) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\textbf{行列+ 連結} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 345 \\ 26 \\ 14 \\ 8 \\ 19 \\ 36 \end{bmatrix}, \textbf{連結}: \begin{bmatrix} 1 & 345 \\ 2 & 26 \\ 3 & 14 \\ 4 & 8 \\ 5 & 19 \\ 6 & 36 \end{bmatrix}$$

11.2　データの中心に関する分析

データの中心に関する統計的な分析を行うことができます. 例えば, **平均値**, **中央値**, **最頻値**などのコマンドが**統計**サブメニューに用意されています. この他にも幾何平均や調和平均などを定義式を使って計算することもできます.

11.2.1　平均値

データセット $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の平均値はデータの中心に関する情報を表す最も一般的な値です. 平均値とは, データの総和をデータ数で割った値です.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

► **リスト表示したデータセットの平均値を求める**

1. リストにカーソルを移動します.
2. **統計**サブメニューから**平均値**を選択します.

► **統計 + 平均値**

a, b, c, 平均値: $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$

$23, 5, -6, 18, 23, -22, 5$, 平均値: $\frac{46}{7}$

$16.5, 22.1, 6.9, 14.2, 9.0$, 平均値: 13.74

行列に対して**統計**サブメニューの**平均値**コマンドを実行すると, 列の平均値を算出します. もう一度, **平均値**コマンドを実行すると, 次は列の平均値に対する平均値を計算します. つまり, 全行列要素の平均値を算出することになります.

► **統計 + 平均値, 統計 + 平均値**

$\begin{bmatrix} 23 & 5 & -6 \\ 18 & 23 & -22 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 平均値: $\left[\frac{46}{3}, \frac{28}{3}, -\frac{28}{3}\right]$, 平均値: $\frac{46}{9}$

$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, 平均値: $\left[4, \frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right]$, 平均値: 4

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \end{bmatrix}$, 平均値: $\left[\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}f, \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}g\right]$, 平均値: $\frac{1}{4}c + \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}f + \frac{1}{4}g$

最後の 2 つの行列の 1 行目はラベルとして解釈されます．従って, 平均値の計算には利用されません.

11.2.2 中央値

ある有限個の数値によって構成されるリストで, 中央値とはそのリストの中で, 半分以下の数字が自分自身と等しいか, または, 同じであり, 残りの半分以下の数字が自分より大きいか, 等しいものを言います．もし, この条件を満たす異なる数値が 2 つ存在する場合, MuPAD は小さい値を中央値にします．中央値を計算した値は, 仕様の違いにより, 異なる値になる場合があります．中央値は, 使用している計算エンジンのアルゴリズムにより解釈されます.

中央値の計算を行う場合に, 数値を昇順に並べ替える必要はありません．データセットにカーソルを移動して, **統計**サブメニューから**中央値**を選択します.

► **統計 + 中央値**

$1, 5, 2$, 中央値: 2 $1, 2, 3, 4$, 中央値: 2

$2, 3, 3, 3$, 中央値: 3 $23, 5, -6, 18, 23, -22, 5, 7$, 中央値: 5

行列に対して**中央値**コマンドを実行すると, 列の中央値が求まります．次の 2 つ目の行列の 1 行目はラベルとして解釈されていますので, 中央値の計算からは除外されます.

► **統計 + 中央値**

$\begin{bmatrix} 23 & 5 & -6 \\ 18 & 23 & -22 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 中央値: $[18, 5, -6]$ $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 中央値: $[3, 4]$

11.2.3 四分位数

データセットの四分位数は比率 q を使って表現します．ここで q はゼロから 1 までの値です．ここでデータセット全体を Q とした時, 四分位数 q は Q の中に含まれるデータの集まりを表し, $1 - q$ が Q のそれ以外の, 大きな値を示します．従って 0.5 という場合, 四分位数は中央値に等しく, 50 パーセンタイルとも呼びます．同じように 0.25 の場合は第一四分位数, または 25 パーセンタイルと呼びます．行列の q 四分位数は, 各列の q 四分位数として求められます. 有限個のデータに対する四分位数の記述方法は数式処理エンジンによって異なります．本プログラムの記述方法に従って正しく記述しないと, 誤った値が計算されます.

数値データのリスト, ベクトル, 列行列など, 次に示すようなデータセットに対して四分位数を求めることができます.

► **統計 + 分位数**

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, 0.87 四分位数: 9

$\{5.6, 7, 8.3, 57, 1.4, 37, 2\}$, 0.25 四分位数: 2

$\begin{bmatrix} 23 & 5 & -6 \\ 9 & -3 & 7 \\ 18 & 23 & -22 \end{bmatrix}$, 0.5 四分位数: $[18, 5, -6]$

$\begin{bmatrix} 23 & 5 & -6 \\ 18 & 23 & -22 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 0.33 四分位数: $[5, 0, -22]$

$\left[\frac{1137}{100}, \frac{49}{20}, -\frac{354}{25}\right]$, 0.75 四分位数: $\frac{1137}{100}$

11.2.4　最頻値

データセットの中で最大の度数を持つ値を最頻値と呼びます. リスト中の最頻値を求める場合は, カーソルをリストに移動して**統計**メニューから**最頻値**を選択します.

► **統計 ＋ 最頻値**

$23, 5, -6, 18, 23, -22, 5$, 最頻値: $[23, 5], 2$

$1, 1, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 9, 9$, 最頻値: $[5, 9], 3$

$\begin{bmatrix} 23 & 5 & -6 \\ 18 & 23 & -22 \\ 5 & 23 & 0 \end{bmatrix}$, 最頻値: $[[23, 18, 5], 1, [23], 2, [-6, -22, 0], 1]$

► **統計 ＋ 最頻値**

$\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 最頻値: $[[3, 1], 1, [4, 2], 1]$

行列の 1 行目はラベルとして解釈されるので, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の最頻値が計算されます.

11.2.5　幾何平均

n 個の正数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の幾何平均はこれらの数値の積の n 乗根です.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

幾何平均は, 例えば, 複利計算で利益を求める投資など, 連続するデータの比がほぼ一定の定数となるようなデータの計算に向いています.

負数でない数字の幾何平均を求めるには, リスト, 集合, ベクトル, 行列にマウスカーソルを置き, **統計**メニューから**幾何平均**を選びます. 行列の場合, 列の幾何平均が計算されます.

► **統計 ＋ 幾何平均**

$3, 56, 14, 2 = \sqrt[4]{4704}$　　　$5.19, 7.3, 2.77, 3.67, 8 = 4.985\,9$

$\begin{bmatrix} 2.9 & 5.2 & 9.7 \\ 6.2 & 8.8 & 1.1 \end{bmatrix} = [4.240\,3, 6.764\,6, 3.266\,5]$

次のように公式から直接計算することもできます.

▶ **数値計算**

$\sqrt[4]{3 \times 56 \times 14 \times 2} = 8.2816$ $\sqrt[5]{(5.19)(7.3)(2.77)(3.67)(8)} = 4.9859$

幾何平均の定義式

$$G(z,n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} z_i}$$

を使って計算することもできます．ベクトル $z = [z_1, z_2, \ldots, z_n]$ として，$G(z,n)$ に**計算**コマンドを実行します．

▶ **関数定義 + 新しい定義**

$G(z,n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} z_i}$

$s = [3, 56, 14, 2]$ $t = [5.19, 7.3, 2.77, -3.67, -8]$

$u = [4, 7, 18]$ $v = [4, 7, 13, 18]$

▶ **計算, 数値計算**

$G(s,4) = \sqrt[4]{4704} = 8.2816$ $G(t,5) = 4.9859$

$G(u,3) = \sqrt[3]{504} = 7.9581$ $G(v,4) = \sqrt[4]{6552} = 8.9969$

Example 54 いま, \$1 を投資して年間 10% の利益を 6 年続けて得たとします．この時の投資金額を年毎に表すと次のようになります．

$$1.00,\ 1.10,\ 1.21,\ 1.33,\ 1.46,\ 1.61,\ 1.77$$

7 年目までの幾何平均は 1.33 です．

11.2.6 調和平均

n 個の正数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の調和平均は, 逆数の平均値の, さらに逆数です．

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

調和平均は速度の平均を求める場合に利用します．ここで, 各速度の距離は同じものとします．

正数の調和平均を求めるには, リスト, 集合, ベクトル, 行列にマウスカーソルを置き, 統計メニューから調和平均を選びます．行列やベクトルの場合, 列の調和平均が計算されます．

▶ **統計 + 調和平均**

$a, b, c = \dfrac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ $2, 4, 6, 8 = \frac{96}{25}$ $0.67, 1.9, 6.2, 5.8, 4.7 = 1.9491$

調和平均を公式から直接求めることもできます．2, 4, 6, 8 および, 0.67, 1.9, 6.2, 5.8, 4.7 の調和平均を求める方法を次に示します．

▶ **計算**

$\frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{96}{25}$ $5\left(\frac{1}{0.67} + \frac{1}{1.9} + \frac{1}{6.2} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{4.7}\right)^{-1} = 1.9491$

調和平均の定義式を使って計算する方法を次に示します．最初に次の関数を定義します．

$$H(z,n)=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{z_k}}$$

さらに，ベクトル $z=[z_1,z_2,\ldots,z_n]$ を定義して $H(z,n)$ に**計算**コマンドを実行します．

► **関数定義 ＋ 新しい定義**

$$H(z,n)=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{z_k}}$$

$s=[2,4,6,8]$　　$t=[0.67,1.9,6.2,5.8,4.7]$

$u=[4,7,18]$　　$v=[4,7,13,18]$

► **計算，数値計算**

$H(s,4)=\frac{96}{25}=3.84$　　$H(t,5)=1.9491$

$H(u,3)=\frac{756}{113}=6.6903$　　$H(v,4)=\frac{13104}{1721}=7.6142$

Example 55 いま，友人の家まで平均時速 20 mph で運転し，帰りは同じ道を 30 mph で戻ってきたものとします．この場合の全行程の平均時速は調和平均で求められます．

$$\frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}=24\ \text{m.p.h.}$$

この計算機能により一定速度で，数カ所を運転する場合の平均時速を調べることができます．

11.3　データのバラツキ

データのバラツキを示すための手法がいくつか用意されており，利用する手法によってそれぞれ異なった特徴を表現することができます．

11.3.1　平均偏差

データから平均値までの距離を平均した値を，平均偏差と呼びます．$x_1,x_2,\ldots,x_n$ の平均偏差は次のようになります．

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}\right|}{n}$$

ここで縦棒は絶対値を示す記号です．絶対値を取らないと，和はゼロになってしまいます．次に $\{1,2,3,4,5\}$ の平均偏差の例を示します．

$$\frac{|1-3|+|2-3|+|3-3|+|4-3|+|5-3|}{5}=\frac{6}{5}$$

データはリスト，ベクトル，行列のどの値でもかまいません．ベクトルや行列の場合は列の平均偏差が計算されます．

▶　**統計 ＋ 平均偏差**

$1, 2, 3, 4, 5$, 平均偏差: $\frac{6}{5}$　　$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \end{bmatrix}$, 平均偏差: $\left[25, 76, \frac{87}{2}\right]$

11.3.2　分散と標準偏差

データセット $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の分散は, データと平均値と差の平方和を $n-1$ で割った次式で表されます.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}\right)^2}{n-1}$$

▶　**分散を求める**

1. データセット, ベクトル, または行列にカーソルを移動します.
2. **統計**サブメニューから**分散**を選択します.

▶　**統計 ＋ 分散**

$5, 1, 89, 4, 29, 47, 18$, 分散: $\frac{21\,055}{21}$　　$\begin{bmatrix} 18.1 \\ 5.3 \\ 7.6 \end{bmatrix}$, 分散: 46.563

$\begin{bmatrix} 23 & 5 & -6 \\ 18 & 23 & -22 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 分散: $\left[\frac{259}{3}, \frac{439}{3}, \frac{388}{3}\right]$

$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 分散: $\left[\left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c\right)^2, \left(\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d\right)^2\right]$

分散の平方根を標準偏差と呼びます. これはデータのバラツキを示す最も一般的な値です.

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}\right)^2}{n-1}}$$

▶　**統計 ＋ 標準偏差**

$[5, 1, 89, 4, 29, 47, 18]$, 標準偏差: $\frac{1}{21}\sqrt{21}\sqrt{21\,055}$

$\begin{pmatrix} 18.1 \\ 5.3 \\ 7.6 \end{pmatrix}$, 標準偏差: 6.8237

$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 標準偏差:

$$\left[\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}a\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}c\right)^2}, \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{2}b\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}d\right)^2}\right]$$

行列の 1 行目はラベルとして解釈されますので, 標準偏差の計算からは除外されます.

▶ **統計 + 標準偏差**

$\begin{bmatrix} 23 & 5 & -6 \\ 18 & 23 & -22 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 標準偏差: $\left[\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{259}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{439}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{97}\right]$

$\begin{bmatrix} -8.5 & 5.0 & 5.7 \\ -5.5 & 7.9 & -5.9 \\ -3.7 & 5.6 & 4.5 \\ -3.5 & 4.9 & -8.0 \\ 9.7 & 6.3 & -9.3 \end{bmatrix}$, 標準偏差: $[7.0014, 1.23, 7.1456]$

11.3.3　共分散

$m \times n$ 行列 $X = [x_{ij}]$ の共分散行列は $n \times n$ 行列であり, (i, j) の行列要素は

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left(x_{ki} - \frac{\sum_{s=1}^{m} x_{si}}{m}\right)\left(x_{kj} - \frac{\sum_{t=1}^{m} x_{tj}}{m}\right)}{m-1}$$

各 i について, 行列要素 (i, i) の値は i 列のデータの分散となります. 従って, 共分散行列の対角要素は列の分散を示すことになります. 共分散行列は i と j について対称となるように定義されています. つまり, 共分散行列は対称行列です.

▶ **統計 + 平均値, 統計 + 分散, 統計 + 共分散**

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, 平均値: $2.7, 3.3$, 分散: $[2.3333, 2.3333]$,

共分散行列: $\begin{bmatrix} 2.3333 & 1.1667 \\ 1.1667 & 2.3333 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8.5 & -5.5 & -3.7 \\ -3.5 & 9.7 & 5.0 \\ 7.9 & 5.6 & 4.9 \end{bmatrix}$, 平均値: $[4.3, 3.2667, 2.0667]$ 分散: $[45.72, 61.843, 24.943]$,

共分散行列: $\begin{bmatrix} 45.72 & -39.3 & -18.45 \\ -39.3 & 61.843 & 38.018 \\ -18.45 & 38.018 & 24.943 \end{bmatrix}$

11.3.4　モーメント

点 a に関するデータセット $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ の r 次モーメントは次の式で表されます.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^r$$

平均値は原点における 1 次モーメントと言えます. 原点における 2 次のモーメントは $\mu^2 + \sigma^2$ となります. ここで, μ は平均値, σ^2 は分散です. 平均値に関する r 次のモーメントは次のような和として表示されます.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^r$$

Example 56 データセット $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ の平均値に関する 3 次と 4 次のモーメントは

$$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\left(2i - \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9}2j\right)^3 = 0$$
$$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\left(2i - \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9}2j\right)^4 = \frac{3776}{3} \approx 1258.7$$

► **統計 + モーメント**

$\begin{bmatrix} 8.5 \\ -5.5 \\ -3.7 \\ 3.5 \end{bmatrix}$
(モーメント番号: 1, モーメントの原点: 0),
モーメント: 0.7
(モーメント番号: 2, モーメントの原点:0),
モーメント: 32. 11

$\begin{pmatrix} 0.123 & 0.703 & 0.445 & 0.284 \end{pmatrix}$,
(モーメント番号: 1, モーメントの原点: 0.5),
モーメント: $-0.111\,25$
(モーメント番号 2, モーメントの原点: 平均値),
モーメント: $4.\,587\,8 \times 10^{-2}$

11.3.5　相関

2 組のランダムな変数を考える時, それらの線形相関を相関係数という値で表現します. 変数が互いに独立している場合, 相関係数は 0 となります. 今, ランダム変数 X と Y を考えとき, これらが $Y = a + bX$ という形で線形な関係にあるとすれば, 相関係数は +1 から −1 の値を取ります. ただし, a と b は定数とします. また, +1 または −1 の値をとる場合, X と Y は完全な相関を示

すと言います. 2 つのランダム変数の相関係数は次式で与えられます.

$$\rho = \rho\,(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

ここで σ_x と σ_y は 2 つのランダム変数の標準偏差です.
2 つの変数の相関係数を求める場合, 2 列の行列にデータを入力し, **統計**サブメニューから, **相関**を選択します. この時, 列の大きさに制限はありません. 行列中のセル i, j における値は列 i と j の相関係数となっています. 相関行列は主対角を持つ対称行列です.

▶ **統計 + 相関**

$$\begin{bmatrix} 43 & -62 \\ 77 & 66 \\ 54 & -5 \\ 99 & -61 \end{bmatrix}, \text{相関行列:} \begin{bmatrix} 1.0 & 7.4831 \times 10^{-2} \\ 7.4831 \times 10^{-2} & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -50 & -12 & -18 \\ 31 & -26 & -62 \\ 1 & -47 & -91 \end{bmatrix}, \text{相関行列:} \begin{bmatrix} 1.0 & -0.52883 & -0.71054 \\ -0.52883 & 1.0 & 0.97297 \\ -0.71054 & 0.97297 & 1.0 \end{bmatrix}$$

相関, 共分散, 標準偏差の間では関係式 $\dfrac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \rho\,(X, Y)$ が成立ちます. 次式を参照してください.

$$\begin{bmatrix} -50 & -12 \\ 31 & -26 \\ 1 & -47 \end{bmatrix}, \begin{cases} \text{相関行列:} \begin{bmatrix} 1.0 & -0.52883 \\ -0.52883 & 1.0 \end{bmatrix} \\ \\ \text{共分散行列:} \begin{bmatrix} 1677.0 & -381.5 \\ -381.5 & 310.33 \end{bmatrix} \\ \\ \text{標準偏差:}\ [40.951, 17.616] \\ \\ \qquad \dfrac{-381.5}{40.951 \times 17.616} = -0.52884 \end{cases}$$

11.4　分布 と密度

ランダム変数 X の累積分布関数 $F\,(x)$ は $F\,(x) = P\,(X \leq x)$ で表すことができます. ここで確率は $X \leq x$ とします. $F(x)$ の導関数を $f(x)$ とすれば, $f(x)$ は正の値で x の確率密度関数と呼ばれます. 逆分布関数 $G(\alpha)$ は $G\,(F\,(x)) = x$ と $F\,(G\,(\alpha)) = \alpha$ を満たすものとします. 分布関数の前に Dist, Den, Inv などを付けることで, これらの関数を利用することができます. 例えば, 正規分布に対して, NormalDist, NormalDen, NormalInv などの形で利用できます. これらの関数名を数式モードで入力すると自動認識され, 灰色表示に変わります.

11.4.1　累積分布関数

累積分布関数は範囲 $(-\infty, \infty)$ で値を $[0, 1]$ とする増加関数です. 分布関数は普通, 関数の値が正になるように定義されています. 負の値となる部分はゼロしてプロットされ, ゼロ以上の点だけを

プロットします. 離散型の分布関数は, 関数値が変化する部分だけを表示し, ステップ関数としてグラフを作成します.
一般的にこれらの関数は整数に対して定義されます. 密度関数の定義も, 同様に正数だけをプロットし, 負の値はゼロとして表現します.
分布と密度を示す関数は次式のようになります.

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

また, 累積分布関数は $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ と $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ を満たします. 累積分布関数は FunctionDist であり, 密度関数は FunctionDen です. 正規分布の確率密度関数は NormalDen となります.
正規, コーシー, スチューデント t, カイ 2 乗, F, 指数, ワイブル, ガンマ, ベータ, 一様, 2 項, ポアソン, 超幾何などの分布についても関数値を求めることができます.

11.4.2 逆分布関数

範囲 $(-\infty, \infty)$ にあり, 値 $[0, 1]$ を取る分布関数 F の逆分布関数 G は $[0, 1]$ で定義され $(-\infty, \infty)$ の値をとります. つまり, $G(F(x)) = x$ および $F(G(\alpha)) = \alpha$ が成立ちます. 下記のようにまとめることができます. 確率 α より大きな値は関数 $G(1-\alpha)$ によって与えられます. 次にその式を示します.

$$\mathrm{Prob}\left[X \le G(1-\alpha)\right] = F(x) = 1-\alpha = 1 - \mathrm{Prob}\left[X \le G(\alpha)\right]$$

累積分布関数を FunctionDist とすると, 逆累積分布関数は FunctionInv となります. 例えば, NormalInv は正規分布の逆累積分布関数となります.

11.4.3 分布表

分布関数によっては, 分布表を使って既に解説した関数, つまり, 累積分布, 逆累積分布, 確率密度関数のパラメータを元に関数値を求めることができます. 分布表を見れば, 目的の値を簡単, かつ正確に求めることができ, さらに, 目的の精度で変数やパラメータに関連する値を求めることもできます. **ヘルプ** + **検索**, **ヘルプ** + **目次** + **リファレンスライブラリ**, **ヘルプ** + **索引** + **リファレンスライブラリ**などのオンラインヘルプには分布表が用意されていますので, 必要に応じて利用してください.
プログラムにリファレンスライブラリがインストールしてある場合は, そこで項目, *Tables, reference: Statistical Distributions* で分布表を参照することができます. **標準インストール**の場合, リファレンスライブラリはディスク容量の関係からインストールされません. しかし, プログラム CD-ROM から後で個別にコピーすることができますし, **カスタムインストール**で追加することも可能です.

11.5　連続分布関数

このセクションでは, 様々な分布関数, 逆分布関数, 密度関数について解説します.

11.5.1　ガンマ関数

スチューデント t 分布およびガンマ分布の定義で利用されているガンマ関数 $\Gamma(t)$ は正の実数 t に対して $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx$ と定義されます. これは連続関数です. ガンマ関数は次式を満たします.

$$\Gamma(1) = 1 \text{ および } \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

正の整数 k に対して, 階乗関数として書くこともできます.

$$\Gamma(k) = (k-1)!$$

ガンマ関数は簡単に計算することができます. 例えば, カーソルを式 $\Gamma(5)$ に移動して**計算**コマンドを選択します. すると, $\Gamma(5) = 24$ という値が表示されます. もちろん, $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ です. ガンマ関数に関する詳細は 158 ページを参照してください.
ガンマ関数を階乗に書換える場合は, **書換え** + **階乗**とします. この時, x は整数とします.

▶ **書換え + 階乗**
$\Gamma(x) = (x-1)!$
書換え + **ガンマ**を使って, ガンマ関数の式に階乗, 二項式, 階乗の積を変換します.

▶ **書換え + ガンマ**
$(x-1)! = \Gamma(x)$　　$\binom{m}{n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)}$　　$x!y!z! = \Gamma(x+1)\,\Gamma(y+1)\,\Gamma(z+1)$

11.5.2　正規分布

正規累積分布関数はすべての実数 μ と正数 σ によって次の積分式で定義されます.

$$\mathrm{NormalDist}\,(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}du$$

正規確率密度関数は

$$\mathrm{NormalDen}\,(u;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

正規累積分布関数の逆関数 NormalInv は次のようになります. これらの関数を数式モードで入力すると, 最後の文字を入力した瞬間に灰色で表示されます.
パラメータ μ と σ は平均値と標準偏差を示すオプションです. 標準正規分布の場合, それらはデフォルトで 0 と 1 になります.

$$\mathrm{NormalDist}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

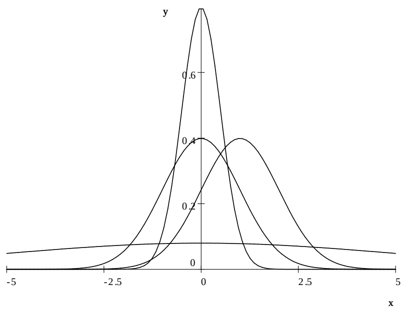
正規分布表は普通, 統計関連の書籍の巻末に掲載されており, 標準正規累積分布のいくつかの値も記載されていることがあります. 書籍によっては $1 - \mathrm{NormalDist}\,(x)$ の値で掲載しているものもあります.

関数 NormalDist は 1 変数の関数 (デフォルトのパラメータ $(0,1)$), または 1 変数 2 パラメータの関数として**計算**コマンドで計算します.

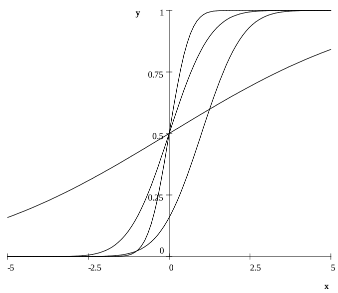
▶ 数値計算

- $\mathrm{NormalDist}(2.44) = 0.992\,66$
- $\mathrm{NormalDist}(2.44; 0, 1) =\ 0.99266$
- $\mathrm{NormalDist}(2.44; 1, 2) =\ 0.76424$
- $\mathrm{NormalDen}(2.44; 1, 2) = 0.153\,93$

標準密度関数のグラフは釣鐘型曲線の一種です. 次にパラメータ $(\mu, \sigma) = (0,1)\,, (0,5)\,, (0,0.5)\,, (1,1)$ とした時の密度関数 $\mathrm{NormalDen}\,(x; \mu, \sigma)$ と分布関数 $\mathrm{NormalDist}\,(x; \mu, \sigma)$ のプロットを示します.



正規密度関数



正規分布関数

11.5.3　スチューデント t 分布

スチューデント t の累積分布関数 $\mathrm{TDist}(x; v)$ は次の積分式で定義されます.

$$\mathrm{TDist}(x; v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{\pi v}} \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{1}{v}u^2\right)^{-\frac{v+1}{2}} du$$

密度関数は

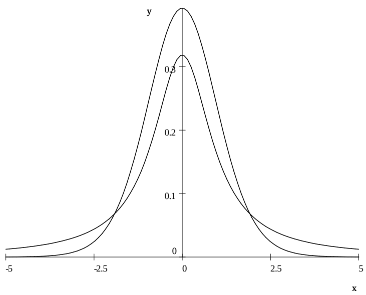
$$\mathrm{TDen}(u; v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{\pi v}} \left(1 + \frac{1}{v}u^2\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

自由度を示すシェイプパラメータは v で正の整数となります. スチューデント t の分散 $\frac{v}{v-2}$ です. ただし $v > 2$ とします.

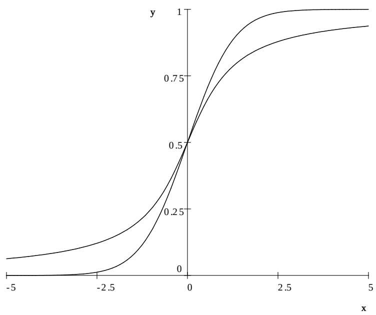
関数 $\mathrm{TInv}(p;v)$ は積分式が p という値を持つ時の x を示すものです. その例を次に示します.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{TDist}(63.66;1) = 0.995 & \mathrm{TDist}(-0.97847;3) = 0.2 \\ \mathrm{TInv}(0.995;1) = 63.657 & \mathrm{TInv}(0.2;3) = -0.97847 \end{array}$$

密度および分布関数 $\mathrm{TDen}\,(x;v)$ と $\mathrm{TDist}\,(x;v)$ のパラメータを $v=1$ と $v=15$ とし, プロット範囲を $-5 \le x \le 5$ としたときの例を次に示します.



スチューデント t の密度関数



スチューデント t の分布関数

スチューデント t の密度関数は中心がそれほど突出していませんが, 全体的に標準正規分布の関数に似ています. 2 つの密度関数の定義式を使って $\lim_{v\to\infty}\mathrm{TDen}(u;v) = \mathrm{NormalDen}(u)$ から, 標準正規分布の密度関数をプロットすることはそれほど難しくありません.
スチューデント t の分布表には確率（分布関数の値）と自由度に対応した逆分布関数の値も表示されています. v の値が 30 以上の時, 正規分布は殆ど, スチューデント t 分布と同じ値になります. 従って, 統計表には $v=30$ までの値しか表示されていません.

Example 57 自由度 5 のスチューデント t 分布で $\Pr(-c<T<c)=0.90$ とする c を求めます. ここで Pr は確率を示しています. 最初に,

$$\begin{aligned} \Pr(-c<T<c) &= \Pr(T\le c) - \Pr(T \le -c) \\ &= \mathrm{TDist}\,(c;5) - \mathrm{TDist}\,(-c;5) \end{aligned}$$

したがって, 次の式を解きます.

$$\mathrm{TDist}\,(c;5) - \mathrm{TDist}\,(-c;5) = 0.90$$

スチューデント t 分布は次式を満たします.

$$\mathrm{TDist}\,(c;5) + \mathrm{TDist}\,(-c;5) = 1$$

したがって,

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{TDist}\,(c;5) - 1 &= 0.90 \\ \mathrm{TDist}\,(c;5) &= \frac{0.90+1}{2} = 0.95 \end{aligned}$$

よって,

$$\mathrm{TInv}(0.95; 5) = 2.015$$

11.5.4　カイ二乗分布

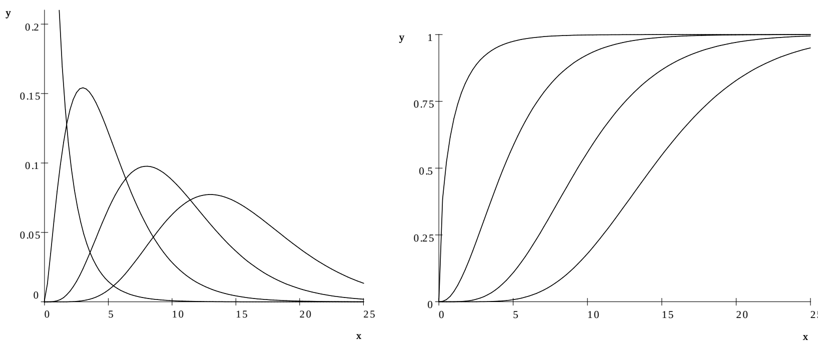
カイ二乗の累積分布関数は正数 x と μ を使って, 次の積分式で定義されます.

$$\mathrm{ChiSquareDist}(x; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\mu}{2})2^{\frac{\mu}{2}}} \int_0^x u^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du$$

そして, カイ二乗の確率密度関数は

$$\mathrm{ChiSquareDen}(u; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\mu}{2})2^{\frac{\mu}{2}}} u^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}$$

インデックスパラメータ $\mu > 0$ は分布の平均値で, 自由度にも関係しています.
次に分布関数 $\mathrm{ChiSquareDist}(x; \mu)$ と密度関数 $\mathrm{ChiSquareDen}(x; \mu)$ のプロットを示します. ここで $\mu = 1, 5, 10, 15$ であり, プロット範囲は $0 \le x \le 25$ とします.



カイ二乗密度関数　　カイ二乗分布関数

関数 $\mathrm{ChiSquareInv}\,(t; \nu)$ は $\mathrm{ChiSquareDist}(x; \nu) = t$ を満たす x の値を算出します. この関数の計算例を次に示します.

$$\begin{aligned} \mathrm{ChiSquareDist}(1.6103; 5) &= 9.9999 \times 10^{-2} \approx 0.1 \\ \mathrm{ChiSquareInv}(0.1; 5) &= 1.6103 \\ \mathrm{ChiSquareDist}\,(2.366; 3) &= 0.5 \\ \mathrm{ChiSquareInv}(0.5; 3) &= 2.366 \end{aligned}$$

カイ二乗の分布表には, 左側の列に ν 値が, ChiSquareDist の u が一番上の列に記載されています. 従って, ν 行 u 列に $\mathrm{ChiSquareInv}(u; \nu)$ の値が表示されます.

11.5.5　F 分布

F 累積分布関数は次の積分式で与えられます.

$$\mathrm{FDist}(x;n,m)=\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^x u^{\frac{n-2}{2}}\left(1+\frac{n}{m}u\right)^{-\frac{n+m}{2}}du$$

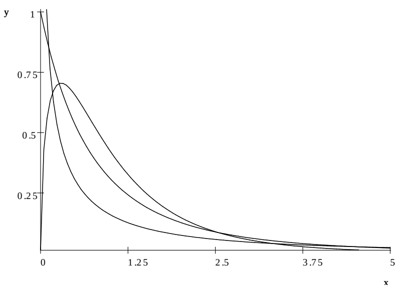
確率密度関数は

$$\mathrm{FDen}(u;n,m)=\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}u^{\frac{n-2}{2}}\left(1+\frac{n}{m}u\right)^{-\frac{n+m}{2}}$$

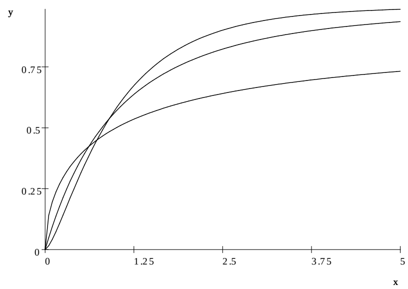
変数 x は正数で, n と m は正の整数とします. F 分布は 2 つの母集団の標準偏差が等しいことを判定する場合に利用します. 分散分析の検定にも利用されます.
逆分布関数 $\mathrm{FInv}(p;n,m)$ を使うと, p という値を持つ積分式 $\mathrm{FDist}(x;n,m)$ の x 値を求めることができます. これらの関数名は数式モードで, 最後の一文字を入力した時に画面上で灰色表示に変わります. この関数の計算例を次に示します.

$$\begin{aligned}\mathrm{FDist}(0.1;3,5)&=\ 4.3419\times10^{-2}\\ \mathrm{FInv}(0.043419;3,5)&=\ 0.1\\ \mathrm{FDist}(3.7797;2,5)&=\ 0.900\,00\\ \mathrm{FInv}(0.9;2,5)&=\ 3.7797\end{aligned}$$

標準的な F 分布表には逆 F 分布関数の値も記載されている場合があります. 例えば, 自由度 $(3,5)$ の F 分布の 4.4 パーセンタイルは $\mathrm{FInv}(0.044;3,5)=0.1$ です. そして自由度 $(2,5)$ の F 分布の 90 パーセンタイルは $\mathrm{FInv}(0.90;2,5)=3.7797$ です.
次に分布関数 $\mathrm{FDist}(x;n,m)$ と密度関数 $\mathrm{FDen}(x;n,m)$ のプロットを示します. ここで $(n,m)=(1,1),(2,5),(3,15)$, および $0\le x\le 5$ とします.



F 密度関数



F 分布関数

11.5.6　**指数分布**

パラメータ μ, または平均値 μ による指数累積分布関数は次の積分式で定義されます.

$$\mathrm{ExponentialDist}\,(x;\mu)=\frac{1}{\mu}\int_0^x e^{\frac{-u}{\mu}}du=\,1-e^{\frac{-x}{\mu}}$$

密度関数は

$$\mathrm{ExponentialDen}(u;\mu)=\frac{1}{\mu}e^{\frac{-u}{\mu}}$$

ただし $x\geq 0$ とします. x が負の場合は 0 となります.
逆指数分布関数は

$$\mathrm{ExponentialInv}\,(\alpha;\mu)=\mu\ln\frac{1}{1-\alpha}$$

積分式の値が α となる x を求めることができます. その計算例を次に示します.

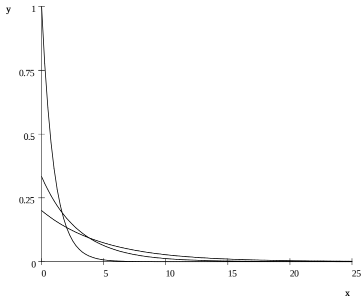
► **計算**

$\mathrm{ExponentialInv}\,(0.73;0.58)=0.75941$

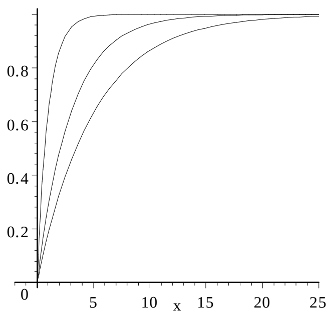
$\mathrm{ExponentialDist}\,(0.75941;0.58)=0.73000$

$\mathrm{ExponentialDen}\,(0.75941;0.58)=0.465\,52$

分布関数 $\mathrm{ExponentialDist}\,(x;\mu)$ と密度関数 $\mathrm{ExponentialDen}(x;\mu)$ のプロットを次に示します.
ここでパラメータは $\mu=1,3,5$　および $-2\leq x\leq 25$ とします.



指数密度関数



指数分布関数

11.5.7　**ワイブル分布**

スケールパラメータ $b>0$ およびシェイプパラメータ $a>0$ とするワイブル分布は次の積分式で定義されます.

$$\mathrm{WeibullDist}\,(x;a,b)=ab^{-a}\int_0^x u^{a-1}e^{-u^a b^{-a}}du=1-e^{-x^a b^{-a}}$$

密度関数は

$$\mathrm{WeibullDen}(u;a,b)=ab^{-a}u^{a-1}e^{-u^a b^{-a}}$$

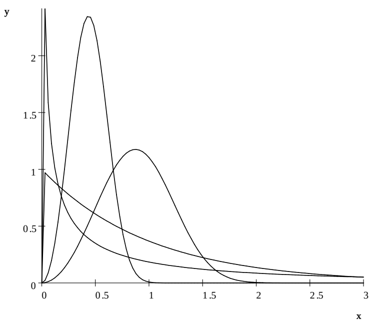
ただし $x\geq 0$ とします. x が負の場合は 0 となります.
逆ワイブル分布関数は

$$\mathrm{WeibullInv}\left(\alpha;a,b\right)=b\left(\ln\frac{1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{a}}$$

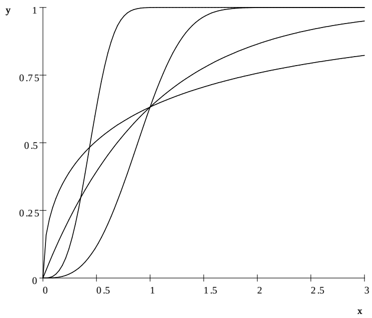
積分式の値が α となる x を求めることができます. その計算例を次に示します.

► **計算**

$\mathrm{WeibullInv}\left(0.73;0.5,0.3\right)=\ 0.51431$
$\mathrm{WeibullDist}\left(0.51431;0.5,0.3\right)=\ 0.73$
次に累積分布関数 $\mathrm{WeibullDist}\left(x;a,b\right)$ と密度関数 $\mathrm{WeibullDen}(x;a,b)$ のプロットを示します.
ここでパラメータは $(a,b)=(0.5,1),(1,1),\ (3,0.5),(3,1)$ および $0\leq x\leq 3$ とします.



ワイブル密度関数



ワイブル分布関数

11.5.8　ガンマ分布

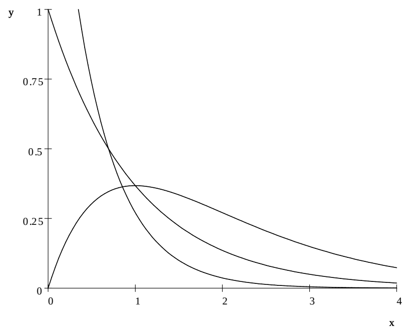
$x>0$ とする時, ガンマ分布は次の積分式で定義されます.

$$\mathrm{GammaDist}\left(x;a,b\right)=\frac{1}{b^a\Gamma\left(a\right)}\int_0^x u^{a-1}e^{-\frac{u}{b}}du$$

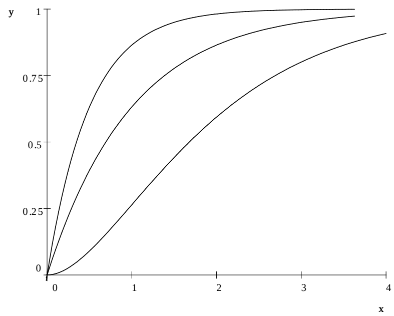
ここで $\Gamma\left(t\right)=\int_0^\infty e^{-u}u^{t-1}du$ をガンマ関数と呼びます. パラメータ a と b はシェイプパラメータおよびスケールパラメータと呼ばれます. この分布の平均値は ab で, 分散は ab^2 です. ガンマ分布の確率密度関数は

$$\mathrm{GammaDen}(u;a,b)=\frac{1}{b^a\Gamma\left(a\right)}u^{a-1}e^{-\frac{u}{b}}$$

次に累積分布関数 $\mathrm{GammaDist}\left(x;a,b\right)$ と確率密度関数 $\mathrm{GammaDen}(x;a,b)$ のプロットを示します. ここでパラメータは $(a,b)=\left(1,0.5\right),\left(1,1\right),\left(2,1\right)$ および $0\leq x\leq 4$ とします.



ガンマ密度関数



ガンマ分布関数

11.5.9　**ベータ分布**

$0 \le x \le 1$ とする時, ベータ分布は次の積分式で定義されます.

$$\mathrm{BetaDist}\,(x; v, w) = \frac{1}{B\,(v, w)} \int_0^x u^{v-1}\,(1-u)^{w-1}\,du$$

ここで $B(v, w) = \int_0^1 u^{v-1}\,(1-u)^{w-1}\,du$ はパラメータ v と w によるベータ関数です.
ベータ分布の確率密度関数は

$$\mathrm{BetaDen}\,(u; v, w) = \frac{u^{v-1}\,(1-u)^{w-1}}{B\,(v, w)}$$

パラメータ v と w は正の実数でシェイプパラメータと呼ばれ, $0 \le u \le 1$ です. ベータ分布の平均値は $\dfrac{v}{v+w}$ です.

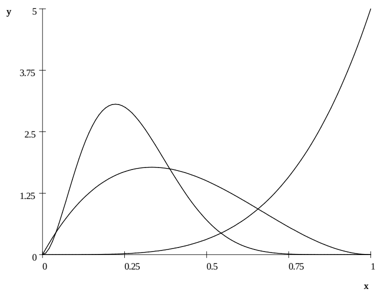
▶ 数値計算

$\mathrm{BetaDist}\,(0.5; 2, 3) = \ 0.6875$

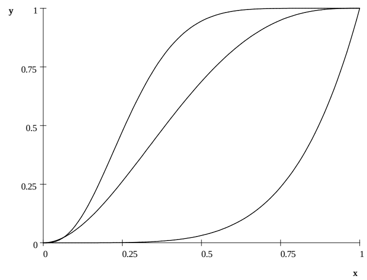
$\mathrm{BetaDen}\,(0.5; 2, 3) = \ 1.5$

$\mathrm{BetaInv}\,(0.6875; 2, 3) = 0.5$

次に累積分布関数 $\mathrm{BetaDist}\,(x; b, c)$ と確率密度関数 $\mathrm{BetaDen}(x; b, c)$ のプロットを示します. ここでパラメータは $(b, c) = (2, 3)\,,\ (5, 1)\,,\ (3, 8)\,,$ および $0 \le x \le 1$ とします.



ベータ密度関数



ベータ分布関数

11.5.10　コーシー分布

コーシーの累積分布関数は実数 α, 正数 β とする時, 次の積分式で定義されます.

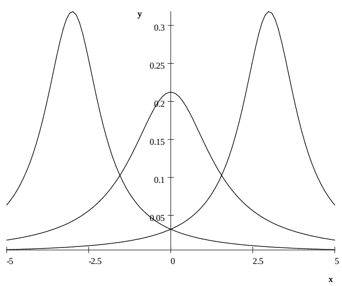
$$\mathrm{CauchyDist}(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi\beta}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\left(\frac{u-\alpha}{\beta}\right)^2\right)^{-1}du$$

コーシーの確率密度関数は

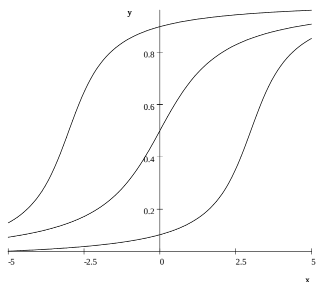
$$\mathrm{CauchyDen}(u;\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi\beta\left(1+\left(\frac{u-\alpha}{\beta}\right)^2\right)}$$

α はコーシー分布の中央値です. コーシーの確率密度分布は α に対して対称で, α において最大値を取ります.

次に確率密度関数 $\mathrm{CauchyDen}(x;\alpha,\beta)$ と累積分布関数 $\mathrm{CauchyDist}(x;\alpha,\beta)$ のプロットを示します. ここでパラメータは $(\alpha,\beta)=(-3,1)$, $(0,1.5)$, $(3,1)$ および $-5\le x\le 5$ とします.



コーシー密度関数



コーシー分布関数

11.5.11　一様分布

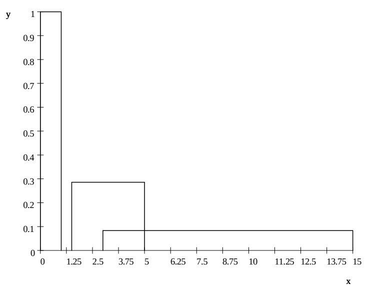
$a < b$ とすると累積分布関数 UniformDist $(x; a, b)$ は

$$\mathrm{UniformDist}\,(x; a, b) = \begin{cases} 0 & if \quad x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & if \quad a \le x \le b \\ 1 & if \quad b \le x \end{cases}$$

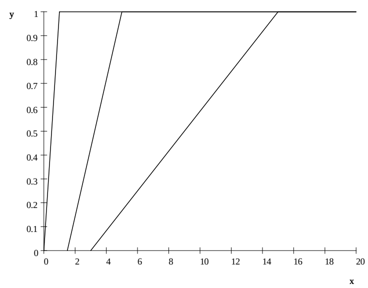
一様分布の確率密度関数は次のようになります．ただし，範囲は $[a, b]$ で $a < b$ とします．

$$\mathrm{UniformDen}(x; a, b) = \begin{cases} 0 & if \quad x \le a \\ \frac{1}{b-a} & if \quad a \le x \le b \\ 0 & if \quad b \le x \end{cases}$$

一様ランダム変数は“乱数の選択”を連続的に行ったものです．範囲 $[a, b]$ における一様ランダム変数の確率は，同じ長さの 2 つの副範囲 $[a, b]$ におけるものと同じ値になります．
次に累積分布関数 UniformDist $(x; a, b)$ と確率密度関数 UniformDen$(x; a, b)$ のプロットを示します．ここでパラメータは $(a, b) = (0, 1)$, $(1.5, 5)$, $(3, 15)$ および $-5 \le x \le 20$ とします．



一様密度関数



一様分布関数

11.6　離散分布関数

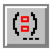
標準的分布関数の中には整数の離散型変数を持つものがあります．これらの関数のプロットは普通，棒グラフや折れ線グラフになります．

11.6.1　二項分布

二項分布関数は正の整数 x を使って次式のように定義されます．

$$\mathrm{BinomialDist}(x; n, p) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

ここで正の整数 n はベルヌイの試行パラメータ（サンプルサイズ）であり，ベルヌイの確率パラメータを p とします．ただし，$0 < p < 1$ および $q = 1 - p$ とします．二項係数 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ を

入力する場合は, 二項式  をクリックし, 線の無い分数を選択します．上式に対応する二項確率密度関数は

$$\mathrm{BinomialDen}(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

x, n, p は上記と同じ条件を満たすものとします．この分布の平均値は np, 分散は npq です．
統計の書籍に掲載されている二項分布の分布表には, 二項確率密度関数 $\mathrm{BinomialDen}(x;n,p)$ や累積分布関数 $\mathrm{BinomialDist}(x;n,p)$ のいくつかの代表的な値が記述されています．
二項密度 $\mathrm{BinomialDen}(x;n,p)$ は 1 回の成功確率が p である時, これを n 回の独立したベルヌイ試行において x 回成功する確率を算出します．これは一般的な離散分布とは大きく異なった分布を示します．つまり, この分布の主眼は, 成功と失敗の 2 つのグループの区分けにあるのです．実際, 二項分布という名前は一般的に二項係数と呼ばれている $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ に由来しています．

Example 58 Pr(コインの表) = 0.55 である硬貨を 100 回投げた時に, 表が 54 回以下になる確率を求めてください．ただし, これは二項分布するもと仮定します．

$$\text{解: } \Pr(X \le 54) = \mathrm{BinomialDist}(54;100,0.55) = 0.45868.$$

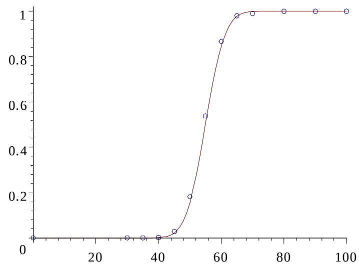
パラメータ n と p による二項分布関数は平均 np, 分散 $np\,(1-p)$ の正規分布と考えることができます．よって,

$$\mathrm{BinomialDist}(x;n,p) \approx \mathrm{NormalDist}(x;np,\sqrt{np(1-p)})$$

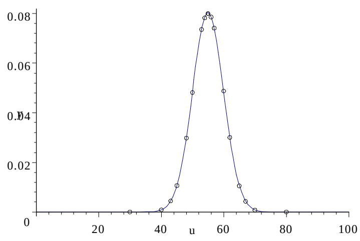
この近似は np および $n\,(1-p)$ が 5 以上の場合は有効です．これを使って, この近似解を求めます．

$$\Pr(X \le 54) \approx \mathrm{NormalDist}(54;55.0,4.9749) = 0.42035$$

次に曲線 $\mathrm{NormalDist}(x;55.0,4.9749)$ と散布図 $\mathrm{BinomialDist}(x;100,0.55)$, および
曲線 $\mathrm{NormalDen}(x;55.0,4.9749)$ と散布図 $\mathrm{BinomialDen}(x;100,0.55)$ のプロットを示します．ただし $0 \le x \le 100$ とします．



正規および二項分布



正規および二項密度

11.6.2　ポアソン分布

ポアソンの累積分布関数は離散関数で, 正の整数 x と, 総和記号によって次のように定義されます. 平均値が $\mu > 0$ であるポアソン分布は次のように定義されます.

$$\mathrm{PoissonDist}\left(x;\mu\right) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

ポアソンの確率密度関数は

$$\mathrm{PoissonDen}\left(k;\mu\right) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

ここで k は正の整数で実数 $\mu > 0$ とします. ポアソンの分布表にはポアソンの確率密度関数 $\mathrm{PoissonDen}\left(k;\mu\right)$ の値が記載されています.

► **数値計算**

$\mathrm{PoissonDen}\left(2;3\right) = 0.22404$　　　　$\mathrm{PoissonDen}\left(5;0.3\right) = 1.5002 \times 10^{-5}$

ポアソン分布は確率が小さく, n が大きな場合に, 二項分布の近似値として利用します. つまり,

$$\mathrm{PoissonDist}(k;\mu) \approx \mathrm{BinomialDist}\left(k;\mu,\mu\left(1-p\right)\right)$$

ここで $\mu = np$ とします. この分布はランダムに発生する重要な事象のモデルとして利用されます.

11.6.3　超幾何分布

いま, M 個の物体があるとします. その内, x 個にはある属性があるものとします. この中から, 元に戻すことなく n 個のサンプルを取り出します. 取り出したものの中に, ある属性が認められる物体の数を超幾何変量と言います. 超幾何累積分布関数は離散関数で, 正の整数 x を使って定義されます. M 個の母集団に, K 個の成功と呼べる物質があり, サンプル数を n とする時の, 超幾何分布は次に示すように, 二項係数の商の総和となります. ただし, $0 \le x \le n$ とします.

$$\mathrm{HypergeomDist}\left(x;M,K,n\right) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

$x < 0$ の時, 分布関数の値は 0 となり, $x \ge n$ で 1 となります. 超幾何確率密度関数は

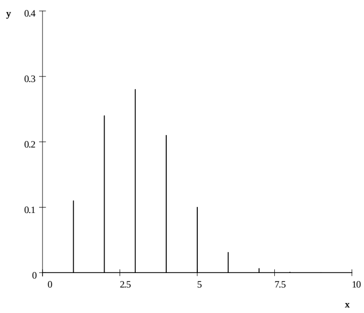
$$\mathrm{HypergeomDen}\left(k;M,K,n\right) = \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

ここで k , K , n, M は整数で $0 \le k \le n$, $0 \le K \le M$, $0 < n \le M$ とします.
超幾何分布のモデルではサンプルを元に戻すことはできません. 超幾何分布はサンプル数が比較的小さいときに二項分布で近似できます.

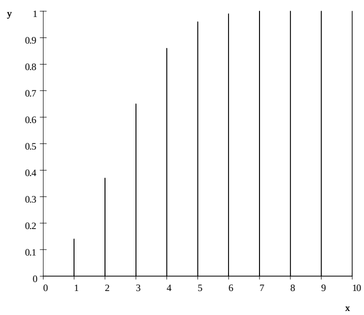
Example 59 母集団 100 個から 10 個のサンプルを抜き取った時, 最高 5 つの当たりが含まれる確率を求めてください. 100 個の中には予め 30 個の当たりがあるものとします. x 個の当

たりを引く確率は関数を使って $\text{HypergeomDen}\,(x; 100, 30, 10)$ となります. 最高 5 つの当たりが含まれる確率は $0, 1, 2, 3, 4, 5$ の当たりを引く確率の和として求めるか, または, 関数により $\text{HypergeomDist}\,(5; 100, 30, 10) = 0.96123$ となります.

次に関数 $\text{HypergeomDen}\,(x; 100, 30, 10)$　と $\text{HypergeomDist}\,(x; 100, 30, 10)$ をプロットした例を示します. ただし, $0 \le x \le 10$ とします.



超幾何密度関数



超幾何分布関数

11.7　乱数

乱数ジェネレータは複数の分布関数の中から一つを選び, それを使って乱数を作成します. ダイアログボックスで, ベータ, 二項式, コーシー, カイ二乗, 指数, F, ガンマ, 正規分布, ポアソン, スチューデント t, 一様, ワイブルなどが選択できます. **統計**サブメニューから**乱数**を選択します. ダイアログが表示されたら, 目的の分布関数と個数, パラメータを設定します. 次に利用例を示します.

► **統計 ＋ 乱数**

ベータ, 次数 3, 次数 7:

$$0.31172,\ 0.28533,\ 7.8338 \times 10^{-2},\ 0.14925,\ 0.41693$$

二項式, 試行回数 10, 成功確率 .5:

$$6, 2, 6, 5, 6$$

コーシー, 中央値 10, シェイプパラメータ 5:

$$8.8, 6.9, 7.3, 9.6, 11.$$

カイ二乗, 自由度 3:

$$0.91006,\ 2.2787,\ 4.4748,\ 2.7026,\ 1.5385$$

指数, 平均反応時間 10:

$$16.851,\ 16.865,\ 8.8222,\ 32.037,\ 12.434$$

F, 自由度 1 と 3:

$$1.1585 \times 10^{-2}, 1.3279 \times 10^{-2}, 0.18187, 1.5567, 1.8483$$

ガンマ, 次数 5:

$$6.5299, 4.2894, 10.473, 6.9089, 7.9011$$

正規分布, 平均値 3, 標準偏差 7:

$$5.223, -4.8075, -5.5782, -1.1218, 1.357$$

ポアソン, 事象の平均発生数 4:

$$2, 4, 1, 2, 5$$

スチューデント t, 自由度 7:

$$1.6568 \times 10^{-2}, 0.11424, -1.3886 \times 10^{-2}, -1.8095 \times 10^{-2}, -0.14798$$

一様分布, 最小値 0, 最大値 20:

$$5.6016, 16.744, 10.275, 14.057, 10.136$$

ワイブル, シェイプパラメータ 5, スケールパラメータ 3:

$$3.8, 3.3, 2.7, 3.0, 3.6$$

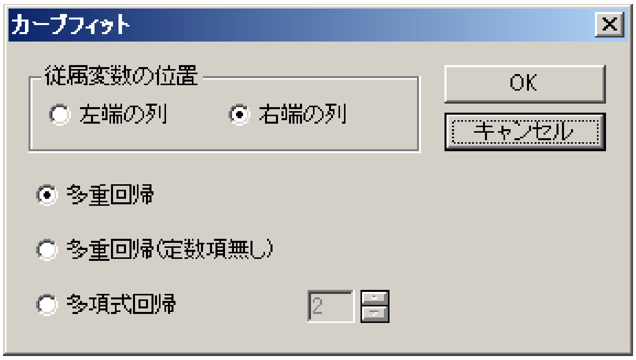
11.8 カーブフィット

とても簡単な操作でカーブフィットが実行できます. **統計**サブメニューから**カーブフィット**を選択し, ダイアログで目的の設定を行います.

- 直線フィットの場合は**多重回帰**, または, **多重回帰（定数無し）**を選択します.
- 多項式フィットの場合は, 次数を設定します.

11.8.1 線形回帰

多重回帰はラベルを付けた行列の多重回帰計算を実行することによって, 線形回帰式を求めます. これを実行すると行列の左端の変数を, 2 列目以降の変数と定数によって表す線形な式を作成します. 多重回帰 (定数無し) を選択した場合, 定数項は含まれません.



最小二乗法を使ってカーブフィットの式を作成します.

▶ **統計 ＋ カーブフィット ＋ 多重回帰**

$$\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1.1 \\ 0.5 & 1.5 \\ 1 & 1.9 \\ 1.5 & 2.4 \end{bmatrix}, \text{回帰: } x = 1.08 + 0.86y$$

$$\begin{bmatrix} z & x & y \\ 1 & 0 & 1.1 \\ 2 & 0.5 & 1.1 \\ 4 & 1 & 1.9 \\ 5 & 1.5 & 1.9 \end{bmatrix}, \text{回帰: } y = 0.300\,00 + 0.8z - 1.6x$$

多重回帰 (定数無し) の場合は次のような結果を示します.

▶ **統計 ＋ カーブフィット ＋ 多重回帰 (定数無し)**

$$\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 1.1 \\ 0.5 & 1.5 \\ 1 & 1.9 \\ 1.5 & 2.4 \\ 2 & 2.9 \end{bmatrix}, \text{回帰: } u = 0.56733v$$

$$\begin{bmatrix} z & x & y \\ 1 & 0 & 1.1 \\ 2 & 0.5 & 1.1 \\ 4 & 1 & 1.9 \\ 5 & 1.5 & 1.9 \\ 7 & 2 & 2.9 \end{bmatrix}, \text{回帰: } z = 2.1829x + 0.91245y$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{回帰: } x = y\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$$

11.8.2　多項式フィット

2 列の行列データに対して多項式フィットを実行すると, 目的の次数による多項式が求まります. この場合, 列のラベルは付けても, 付けなくてもかまいません. 多項式は最小二乗法を使って計算されます. 多項式フィットを行う場合は x 列を左側に記述します.
次のデータセットに対する 2 次の多項式フィット関数を求めます.

$$(0, 0.64), (0.5, 0.09), (1, 0.04), (1.5, 0.49), (2, 1.44)$$

最初にカッコを取り除き, 2 列の行列に書き換えます. この変換作業は, カーソルを最初のリストに移動して, **行列**サブメニューから**変形**を選択します. そして列数を 2 列とします.

▶ **行列 ＋ 変形**

$$0, 0.64, 0.5, 0.09, 1, 0.04, 1.5, 0.49, 2, 1.44, \begin{pmatrix} 0 & 0.64 \\ 0.5 & 0.09 \\ 1 & 0.04 \\ 1.5 & 0.49 \\ 2 & 1.44 \end{pmatrix}$$

▶ **統計 ＋ カーブフィット**

- 多項式を選択し, 次数を 2 として OK ボタンをクリックします.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.64 \\ 0.5 & 0.09 \\ 1 & 0.04 \\ 1.5 & 0.49 \\ 2 & 1.44 \end{pmatrix}, \text{多項式フィット: } y = 1.0x^2 - 1.6x + 0.64$$

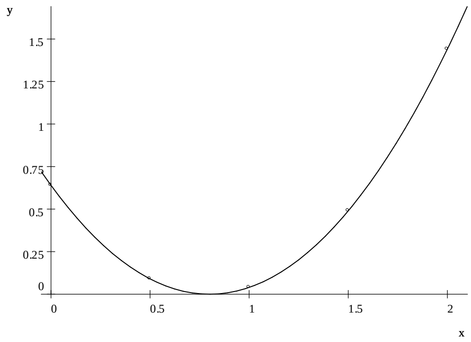
データ点と多項式を同じグラフ上にプロットします. データがきれいに放物線上に並ぶ様子が分かります.

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.64 \\ 0.5 & 0.09 \\ 1.0 & 0.04 \\ 1.5 & 0.49 \\ 2.0 & 1.44 \end{pmatrix}$$

1. プロットスタイルを点にし, シンボルを円にします.
2. 式 $64 - 1.6x + 1.0x^2$ を選択し, プロットにドラッグします.

3. プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブで, プロット番号を 2 とし, 表示範囲を $-0.05 < x < 2.05$ とします.

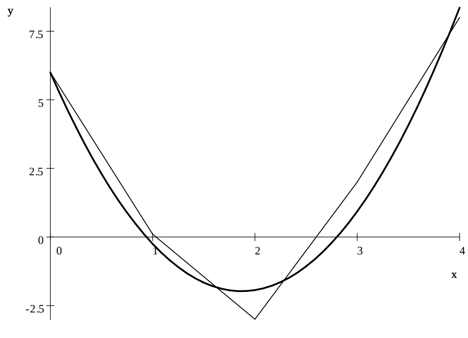


$$64 - 1.6x + 1.0x^2$$

▶ **2D プロット ＋ 直交座標**

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0.1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

1. 式 $5.9971 - 8.5243x + 2.2786x^2$ を選択し, プロット上にドラッグします.
2. プロットのプロパティダイアログのプロットした数式タブで, プロット番号を 2 とし, 表示範囲を $0 < x < 4$ とします.



多項式フィットの場合, もっと高次の関数でフィットすることもできます.

▶ **統計 ＋ カーブフィット**

- 次数 2 の多項式

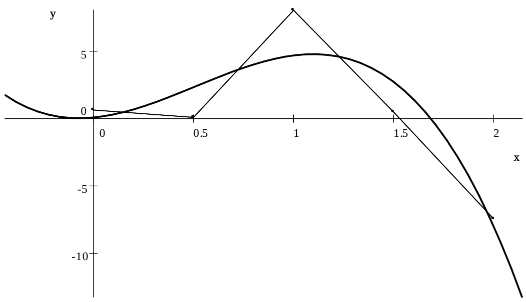
$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \\ 1 & 0.1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$, 多項式フィット: $y = 6.265 - 9.685x + 2.725x^2$

より高い次数の多項式でもデータをフィットすることができます.

▶ **統計 + カーブフィット**

- 多項式を選択し, 次数を 3 として OK ボタンをクリックします.

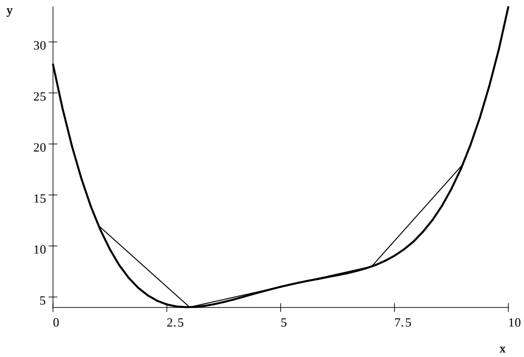
$$\begin{bmatrix} 0 & 0.64 \\ 0.5 & 0.09 \\ 1.0 & 8.04 \\ 1.5 & 0.49 \\ 2.0 & -7.44 \end{bmatrix}$$, 多項式フィット: $y = 8.1143 \times 10^{-2} + 1.4114x + 9.1143x^2 - 5.92x^3$



▶ **統計 + カーブフィット**

- 多項式を選択し, 次数を 4 として OK ボタンをクリックします.

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$$, 多項式フィット:
$y = 7.1563x^2 - 22.042x - 0.95833x^3 + 4.6875 \times 10^{-2}x^4 + 27.797$



11.8.3　過剰な連立方程式

求解コマンドは過剰な連立方程式に対しても利用できます．この場合の**求解**コマンドは最小二乗法の解を計算します．ここで, 過剰な連立方程式の例を示します．この場合は最小二乗法による解が実質的な解となります.

► **求解 + 解**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}, \text{解}: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

行列の両辺に A^T を掛けて答えを確認することができます．つまり, $AX = B$ を $\left(A^T A\right) X = A^T B$ として, 両辺を計算します.

$$\left(A^T A\right) X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 & 100 \\ 100 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184 \\ 220 \end{bmatrix}$$

この結果を利用すれば, 次のようになります.

► **計算**

$$\begin{bmatrix} 84 & 100 \\ 100 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184 \\ 220 \end{bmatrix}$$

11.9 練習問題

1. 平均値 50, 標準偏差 10 の正規分布から 80 個のサンプルを抽出しました. このサンプルの平均値を $\bar{X}$ とする時, $\bar{X}$ が 46 以下になる確率を求めてください.
2. いま, ある小部品は時間とともに劣化することは殆どないものとします. つまり, ある時間の使用中の小部品の破壊確率は, その後のある一定時間内でもあまり変化しません. 破壊時間は式 $1-e^{-\frac{x}{\mu}}$ による指数関数分布 $P(T \leq t)$ に従います. 今, 小部品の平均製品寿命が 5 年として, その製品が 7.5 年以上壊れない確率はいくつですか? また, 製品が 2 年保証の場合, 保証期間内に無償交換が予測される割りはどのくらいですか?
3. 小部品の平均寿命が 5 年で, 標準偏差が 2 年とします. 製品寿命は正規分布として, 7.5 年以上製品が壊れない確率はどれくらいですか? また, 製品が 2 年保証の場合, 保証期間内に無償交換が予測される割りはどのくらいですか?
4. 確率密度関数 $f(u)$ となる連続な分布関数の平均値は, 変数と確率密度関数の積の積分式 $\int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du = \mu$ となります. 分散は $\int_{-\infty}^{\infty} (u-\mu)^2 f(u)du$ です. この章で解説した連続な分布関数の平均と分散を求めてください.
5. 確率密度関数 $f(u)$ となる離散型の分布関数の平均値は $\sum_{-\infty}^{\infty} uf(u) = \mu$ で分散は $\sum_{-\infty}^{\infty} (u-\mu)^2 f(u) = \sigma^2$ です.
   - この章で解説した離散型の分布関数の平均と分散を求めてください.
   - ある分布の確率密度関数が $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である時, その分布の平均値と分散を求めてください.
6. サイコロを 4 の目が出るまで投げつづけます. 5 回以上投げつづける確率を求めてください.
7. 電話の交換機は電話利用のピーク時に,1 時間で平均 600 コールを処理します. 交換機の 1 分当たりの接続数は 20 です. ポアソン分布関数を使って, ピーク時の任意の 1 分間に交換機がオーバーロードしてしまう確率を求めてください.
8. 平均 1, 標準偏差 1 の正規分布で $x^2 \leq 4$ となる確率を求めてください.

11.10 練習問題の答え

1. この問題を解く場合, 平均値 μ, 標準偏差 σ の正規分布から n 個のサンプルを抽出した場合, 平均値 μ, 標準偏差 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であることを知っておくことが必要です. これにより確率は,

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bar{X} \leq 46\right) &= \mathrm{NormalDist}\left(46; 50, \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \\ &= \mathrm{NormalDist}\left(46; 50, 1.118\right) = 1.7324 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

2. $\mathrm{ExponentialDist}\left(7.5; 5\right) = 0.78 = P(X \leq 7.5)$, よって X が 7.5 より大きくなる確率は $1 - 0.78 = 0.22$ です.
   $\mathrm{ExponentialDist}\left(2; 5\right) = 0.33 = P(X \leq 2)$, よって 2 番目の問いに対する解答は, 約 33 パーセントです.

3. NormalDist $(7.5; 5, 2) = 0.894 = P(X \le 7.5)$, よって X が 7.5 より大きくなる確率は $1 - 0.894 = 0.106$, または 10.6 パーセントです.
   NormalDist $(2; 5, 2) = 0.067 = P(X \le 2)$, よって 2 番目の問いに対する解答は, 約 7 パーセントです.
4. 正規分布の場合, **計算**コマンドを実行すると
$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{NormalDen}\,(u; \mu, \sigma)\, u du = \mu$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{NormalDen}\,(u; \mu, \sigma)\,(u - \mu)^2\, du = \sigma^2$$
   スチューデント t 分布では, 自由度を 5 として**計算**コマンドを実行すると, 平均値は
$$\int_{-\infty}^{\infty} u\, \text{TDen}\,(u; 5)\, du = 0$$
   分散は
$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2\ \text{TDen}\,(u; 5)\, du = \frac{25}{3}\sqrt{5}$$
   パラメータに一般的な記号を使うと, 平均値と分散を求める数式処理計算の途中でエラーが発生します. ですから, 適当な数値をパラメータとして与える必要があります.
5. 解答例を示します.
   - 2 項分布の場合, **計算**および**簡単化**コマンドを実行し, 次の平均値が求められます.
$$\sum_{x=1}^{\infty} x \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x} = np\,(1-p)^{n-1}\left(-\frac{1}{-1+p}\right)^{n-1} = pn$$
     計算と**簡単化**, さらに**因数分解**を実行すると分散が求められます.
$$\sum_{x=0}^{n} (x - pn)^2 \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x} = pn - p^2 n = (1-p)\,pn$$
     (分散を求める途中の式は煩雑なので, ここには記載しませんでした. また, $(-1)^{2n} = 1$ および $(-1)^{2n+1} = -1$ という簡単化を行う必要があります. ここで $\binom{n}{x}$ は 2 項式の記号であり, 行列ではありませんので注意してください. 2 項式の記号は**挿入**メニューから**二項式**を選択して, 線種を無しにします.
   - ある分布の確率密度関数が $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ で $n \ge 0$ の場合, 分布の平均値は $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$, そして分散は $\sum_{n=1}^{\infty} (n-2)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$ となります.
6. サイコロを 1 回投げた時に 4 がでる確率は $\frac{1}{6}$, したがって, それ以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$ です. 5 回投げた時に 4 以外の目がでる確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.40188$ です.
7. ピーク時の平均コールが 600 で, 1 分当たりの平均コールが 10 です. そこで, 1 分間のコールが 20 以下となる確率は $\sum_{k=0}^{20} \text{PoissonDen}(k, 10) = \sum_{k=0}^{20} \frac{10^k e^{-10}}{k!} = 0.99841$ です. したがって, オーバーロードする確率は $1 - 0.99841 = 0.00159$ となります.
8. $-2 \le x \le 2$ の時 $x^2 \le 4$ となります. よって,
$$\begin{aligned} \Pr\left(x^2 \le 4\right) &= \Pr(x \le 2) - \Pr(x \le -2) \\ &= \text{NormalDist}(2; 1, 1) - \text{NormalDist}(-2; 1, 1) = 0.84 \end{aligned}$$

第 12 章

応用現代代数

この章では方程式の整数解を求める方法やモジュラ方程式の解法, 線形計画法など, 応用代数の技術的な事柄について解説します. また, *Scientific WorkPlace* および *Scientific Notebook* の計算エンジンが, どのようにこれらの手法を扱っているかについても解説します.

12.1 方程式の解法

応用現代代数には整数方程式, 多項式方程式, 行列方程式などの方程式の解を求めるための多くの解法が用意されています. このセクションでは, これらの中から適当な例題を用いて, 解法を紹介します.

12.1.1 整数解

求解サブメニューの**整数解**コマンドを利用すると, 方程式, または連立方程式の整数解を求めることができます.

▶ **求解 + 整数解**

$41x + 421x^2 - 165x^3 - 4x^4 + 4x^5 - 105$, 解: $\{-7, 3, 5\}$

12.1.2 連分数

連分数は, 次のような形の式です.

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{1 + ..}}}}}$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ の値は, 実数または複素数のどちらかです. 項 a_i は, 有理数または無理数のどちらでも構いません. 簡単な有限の連分数の形式で表すことができれば, 値は有理数となります. 無理数を連分数で表し, 連分数の一部を削除して, 有理数を得ることで, 無理数に近似した有理数を得ることができます.
連分数は, 有理数近似を計算して, 実数として使用したり, 不定方程式を解くアルゴリズムで利用できます. 連分数とカオス理論との結び付けを行うこともできます.

MuPAD コマンド contfrac を使って, x の実数式の連分数を．有効桁数 n 桁で構築することができます.

▶ **連分数コマンドを定義する**

1. **関数定義**サブメニューから **MuPAD 関数の定義**を選択します.
2. MuPAD 名: numlib::contfrac(x,n)
3. *Scientific WorkPlace* [*Notebook*] 関数名: $r\,(x,n)$.
4. MuPAD に内蔵されているか自動的にロードされるにチェックします.
5. OK ボタンをクリックします.

連分数を作成する場合に, これらのコマンドを利用します.

▶ **計算**

$r\,(\pi,10) = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292+\frac{1}{1+\frac{1}{1+..}}}}}}$

一番小さな分母でドットマークが 2 つあるのは, 分数が無限に続くことを示しています．しかし, これらは手作業で削除することができます.

▶ π **の有理数近似値を求める**

1. 連分数の後ろ側の項にある　$+\frac{1}{292+\frac{1}{1+\frac{1}{1+..}}}$　を選択し, 削除します.
2. 残りの分数に**計算**コマンドを実行します.

▶ **計算, 数値計算**

$3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.141\,6$

有理数 $\frac{355}{113}$ は π の近似値です．連分数からは, 優れた近似解を求めることができます.

12.1.3　漸化式による解法

漸化式や漸化式の連立方程式を解く場合は**漸化式**コマンドを利用します．例えば, 次の漸化式 $y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=0$ を解く場合, **求解**サブメニューから**漸化式**を選択します.

▶ **求解 ＋ 漸化式**

$y\,(n+2)+3y\,(n+1)+2y\,(n)=0,$

解: $\{y\,(n) = C_1\,(-1)^n + C_2\,(-2)^n\}$

数列形式の漸化式を解くこともできます.

▶ **求解 ＋ 漸化式**

$x_n + 2x_{n+1} + x_{n+2} = 0$, 解 : $\{x_n = (C_3 + C_4 n)\,(-1)^n\}$

初期値を設定する場合は, 次に示すように列行列に方程式と初期値を入力します.

▶ **求解 ＋ 漸化式**

$$\begin{array}{c} y\left(n+2\right)+3y\left(n+1\right)+2y\left(n\right)=0 \\ y\left(0\right)=-2 \\ y\left(1\right)=1 \end{array}, \text{解: } \left\{y\left(n\right)=\left(-2\right)^{n}-3\left(-1\right)^{n}\right\}$$

求めた解の式を使って目的の値を求めることができます．例えば, 式 $y(n) = -3(-1)^n + (-2)^n$ を定義し, 適当な値を代入して $y(n)$ を計算する例を次に示します.

▶ **計算**

$y\left(20\right)=1048\,573$

12.2　整数モジュラ m

2 つの整数 a と b の差 $a-b$ がある整数 m の整数倍である時, m を合同式の法, またはモジュラ m 呼び, $a \equiv b \pmod{m}$ と記述します．例えば, $15 \equiv 33 \pmod{9}$ と記述します．なぜなら, $15-33 = -18$ は 9 の倍数だからです．いま, a と m が与えられれば, モジュラ関数は $a \bmod m = b$ として求められます．もちろん, ここでは $a \equiv b \pmod{m}$ および $0 \leq b \leq m-1$ を満たすものとします．モジュラ関数 $a \bmod m$ は a モジュラ m を満たす最小の, 正の剰余と呼ばれます.

数式処理システムには合同式の記述 $a \equiv b (\bmod\, m)$ を理解する機能ありません．しかし, 関数 $a \bmod m$ は用意されています．ここでは, 代数と数論における問題を文章として表す方法について解説します.

mod は 2 変数の関数です．変数は関数の両側に記述します．この関数の用法は + 記号によく似ています．普通, 関数は $+(a,b)$ のように記述しますが, プラス記号は $a+b$ のように両側に変数を記述します.

一般的に, 合同式の法は $a \equiv b \pmod{m}$ として記述され, 法を示す $\bmod m$ はカッコで囲まれます．これは法 $\bmod m$ と式 $a \equiv b$ を明確に区別するためです．ですから, $a \equiv$ を取り去った式 $b \pmod{m}$ のようなものは決して存在しません．しかし, mod 関数はカッコを付けずに $a \bmod m$ と記述します.

▶ **mod 関数を計算する**

1. 式 $a \bmod b$ にカーソルを移動します.
2. **計算**コマンドを選択します.

▶ **計算**

$23 \bmod 14=9$

$12345678987654 \bmod 9=3$

a を正数とすると, a モジュラ m の最小の剰余を求めることができます．商 $\frac{a}{m}$ に**展開**コマンドを実行します.

▶ **展開**

$\frac{23}{14}=1\frac{9}{14}$

$\dfrac{12345678987654}{9} = 1371\,742\,109\,739\frac{1}{3}$ $(\frac{1}{3} = \frac{3}{9})$

ここで $1\frac{9}{14} = 1 + \frac{9}{14}$ ですから, $\frac{23}{14} = 1 + \frac{9}{14}$ を 14 倍すると $23 = 14 \cdot 1 + 9$ であり, $23 \bmod 14 = 9$ となります．また, $\frac{12345678987654}{9} = 1371\,742\,109\,739 + \frac{3}{9}$ を 9 倍して, $12345678987654 \bmod 9 = 3$ となります．

フロア関数 $\lfloor x \rfloor$ (参照 32 ページ) を使うと, モジュラ関数は次のようになります．

$$a \bmod m = a - \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor m$$

► **計算**

$23 - \left\lfloor \frac{23}{14} \right\rfloor 14 = 9$

$12345678987654 - \left\lfloor \dfrac{12345678987654}{9} \right\rfloor 9 = 3$

12.2.1　モジュラ m の乗算表

データセット $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ から作成した整数の表と m のモジュラ関数の実行結果は次のようになります．

► $m = 6$ **とした時, モジュラ** m **の乗算表を作成する**

1. 関数 $g(i, j) = (i-1)(j-1)$ を定義します．
2. **行列**サブメニューから**要素の作成**を選択します．
3. 定義した関数を選択します．
4. 関数名のボックスに g を入力します．
5. 6 行 6 列と設定します．
6. OK ボタンをクリックします．
7. 行列の右側に $\bmod 6$ と入力します．数式モードで入力すると mod は自動的に灰色表示に代ります．
8. **計算**コマンドを選択します．

► **計算**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{bmatrix} \bmod 6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

より効率よく乗算表を作成するには, $g(i, j) = (i-1)(j-1) \bmod 6$ を定義して, 上記の 2 から 6 のステップを行います．

これと同じものを下記の行列の積によって作成することもできます．

► **計算**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \bmod 6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

作成した行列のコピーを作成します．**編集**メニューから**行の挿入**を選び，一番上に行を追加します．次に，**列の挿入**メニューを選び，一番左に列を追加し，次のようなモジュラ 6 の乗算表を作成します．

$\times$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

表から $2 \cdot 4 \bmod 6 = 2$ および $3 \cdot 3 \bmod 6 = 3$ となることが分かります．
これと同じ乗算表を作成するのに，より効率的な方法があります．次の式をを定義します．

$$g(i,j) = |i-2|\,|j-2| \bmod 6$$

行列サブメニューから**要素の作成**を選択します．ダイアログボックスで定義した関数を選択し，g と入力します．そして行列のサイズを 7 行 7 列とします．そして，上の表のように，左上角の要素を $\times$ にし，一番上の行と一番左の列を太字にします．
関数 $g(i,j) = i+j-2 \bmod 6$ を定義して加算表を作成できます．

Example 60 いま，p が素数とすると，整数モジュラ p はガロア拡大体という体を構成し，GF_p と記述します．素数 $p = 7$ の場合，乗算表は式 $g(i,j) = (i-1)(j-1) \bmod 7$ を定義し，**行列**サブメニューから**要素の作成**を選択します．そして，定義済みの関数を指定します．加算表は同じように関数 $f(i,j) = i+j-2 \bmod 7$ を使って作成します．

$\cdot$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

$+$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

12.2.2 逆モジュラ m

いま，$ab \bmod m = 1$ とすると，b は a と m の逆モジュラと呼ばれます．そして b の最小の正の剰余を $a^{-1} \bmod m$ とします．計算エンジンは，逆モジュラ m として，$1/a \bmod m$ および $\frac{1}{a} \bmod m$ の形式を認識できます．

▶ **計算**

$5^{-1} \bmod 7 = 3$　　$\frac{1}{5} \bmod 7 = 3$　　$1/5 \bmod 7 = 3$
この計算で逆変換の定義を確認することができます．なぜなら, $5 \cdot 3 \bmod 7 = 1$ となるからです．

▶ **計算**

$23^{-1} \bmod 257 = 190$　　$\frac{1}{5} \bmod 6 = 5$
3 つの表記 $ab^{-1} \bmod m$, $a/b \bmod m$, $\frac{a}{b} \bmod m$ は, すべて $a(b^{-1} \bmod m) \bmod m$ と同じことを意味しています．これは b モジュラ m の逆変換ですから, 計算結果に a を掛け, 積モジュラ m を引きます．

▶ **計算**

$3/23 \bmod 257 = 56$　　$\frac{2}{5} \bmod 6 = 4$
$a^{-1} \bmod m$ は a が m に対して互いに素の時, つまり, $\gcd(a, m) = 1$ の場合に存在します．よって, モジュラ 6 の場合, 1 と 5 だけが逆数となります．素数のモジュラは剰余がゼロでなければ, 必ず逆数が存在します．モジュラ m の乗算表で, 整数 a は逆モジュラ m を持ちます．ただし, 1 が行 $a \bmod m$ と列 $a \bmod m$ に表れる必要があります．

12.2.3　合同式モジュラ m の解法

式 $ax \equiv b \pmod m$ の合同式を解く場合は両辺に $a^{-1} \bmod m$ を掛けて $x = b/a \bmod m$ とします．合同式 $17x \equiv 23 \pmod{127}$ の解 $x = 91$ を求める手順を次に示します．

▶ **計算**

$23/17 \bmod 127 = 91$
この解を元の式に代入して答えを確認します．

▶ **計算**

$17 \cdot 91 \bmod 127 = 23$
よって 91 が合同式 $17x \equiv 23 \pmod{127}$ の解であることが分かりました．解はこの他にも式 $91 + 127n$ によって与えらます．ここで n は任意の整数です．実際, $x \equiv 91 \pmod{127}$ は n を整数とする式 $x = 91 + 127n$ を書き換えたものに他なりません．

12.2.4　線形合同式のペア

式 $ax \equiv b \pmod m$ という線形合同式は $x \equiv c \pmod m$ という形に書きかえることができます．ここでは後者の合同式の系について考えることにします．

Example 61 次に示す 2 つの合同式の系の解を求めます．

$$x \equiv 45 \pmod{237}$$
$$x \equiv 19 \pmod{419}$$

はじめに, $\gcd(237, 419) = 1$ ですから, 237 と 419 は互いに素であることが分かります．最初の

合同式は $x = 45 + 237k$ と書けます．ここで k は整数とします．この式を 2 行目の式に代入します．

$$45 + 237k = 19 + 419r$$

r は整数とします．さらに, これを書き換えて $237k = 19 - 45 \bmod 419$ とします．この解は

$$k = (19 - 45)/237 \bmod 419 = 60$$

したがって,

$$x = 45 + 237 \cdot 60 = 14265$$

$14265 \bmod 237 = 45$ および $14265 \bmod 419 = 19$ であることが分かります．
よって, すべての解は

$$x = 14265 + 237 \cdot 419s \equiv 14265 \pmod{99303}$$

問題の 2 つの合同式は, 次の 1 つの合同式として表すことができます．

$$x \equiv 14265 \pmod{99303}$$

一般的に, m と n が互いに素の場合, 2 式の解は

$$x \equiv a \pmod{m}$$
$$x \equiv b \pmod{n}$$

次式で与えられます．

$$x = a + m\,[(b - a)/m \bmod n]$$

また, すべての解は

$$x = a + m\,[(b - a)/m \bmod n] + rmn$$

ここで r は任意の整数とします．

12.2.5　線形合同式の系

複数の合同式からなる系を, 2 つの合同式ごとに解いていくことで一つの合同式にまとめることができます．中国人剰余定理によれば, 法が互いに素である場合, これらの系の解は, それらの法の積として与えられます．

Example 62 次に示す 3 つの線形合同式の解を求めます．

$$x \equiv 45 \pmod{237}$$
$$x \equiv 19 \pmod{419}$$
$$x \equiv 57 \pmod{523}$$

はじめに, $\gcd(237 \cdot 419, 523) = 1$. つまり, この系には 1 つの解が存在します. 最初の 2 つの合同式は $x \equiv 14265 \pmod{99303}$ という一つの合同式に書きなおすことができます. よって, 系は次のよになります.

$$x \equiv 14265 \pmod{99303}$$
$$x \equiv 57 \pmod{523}$$

前回の例と同じように k と r を整数とすれば, $14265 + 99303k = 57 + 523r$ となります. よって, $k = (57 - 14265)\,/99303 \bmod 523 = 134$ から $x = 14265 + 99303 \cdot 134 = 13320867$ となります. 3 つの合同式の系は次のように 1 つの合同式に書き換えられます.

$$x \equiv 13320867 \,(\mathrm{mod}\ 51935469)$$

12.2.6　拡張精度での計算

数式処理システムを利用すると, 数百桁の整数の乗算や加算を正確に行うことができます. このように精度の高い清算を行う方法の一つが互いに素である数値のペアを作り, これらのモジュラ計算を行なうというものです. いま, 次のようなベクトルを考えます.

$$(997, 999, 1000, 1001, 1003, 1007, 1009)$$

これらを素因数分解してみると, すべての要素が互いに素であることが分かります.

► **因数分解**

$$\begin{bmatrix} 997 \\ 999 \\ 1000 \\ 1001 \\ 1003 \\ 1007 \\ 1009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 997 \\ 3^3 37 \\ 2^3 5^3 \\ 7 \times 11 \times 13 \\ 17 \times 59 \\ 19 \times 53 \\ 1009 \end{bmatrix}$$

2 つの数 23890864094 と 1883289456 について考えます. これらの数の法を求めます.

$$23890864094 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 23890864094 \bmod 997 \\ 23890864094 \bmod 999 \\ 23890864094 \bmod 1000 \\ 23890864094 \bmod 1001 \\ 23890864094 \bmod 1003 \\ 23890864094 \bmod 1007 \\ 23890864094 \bmod 1009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 872 \\ 94 \\ 97 \\ 879 \\ 564 \\ 218 \end{bmatrix}$$

$$1883289456 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1883289456 \bmod 997 \\ 1883289456 \bmod 999 \\ 1883289456 \bmod 1000 \\ 1883289456 \bmod 1001 \\ 1883289456 \bmod 1003 \\ 1883289456 \bmod 1007 \\ 1883289456 \bmod 1009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 324 \\ 630 \\ 456 \\ 48 \\ 488 \\ 70 \\ 37 \end{bmatrix}$$

よって, 積 $23890864094 \cdot 1883289456$ はベクトルを使って

$$\begin{bmatrix} 350 \cdot 324 \bmod 997 \\ 872 \cdot 630 \bmod 999 \\ 94 \cdot 456 \bmod 1000 \\ 97 \cdot 48 \bmod 1001 \\ 879 \cdot 488 \bmod 1003 \\ 564 \cdot 70 \bmod 1007 \\ 218 \cdot 37 \bmod 1009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 739 \\ 909 \\ 864 \\ 652 \\ 671 \\ 207 \\ 1003 \end{bmatrix}$$

積 $23890864094 \cdot 1883289456$ は次の系の解です.

$$\begin{aligned} x &\equiv 739 \pmod{997} \\ x &\equiv 909 \pmod{999} \\ x &\equiv 864 \pmod{1000} \\ x &\equiv 652 \pmod{1001} \\ x &\equiv 671 \pmod{1003} \\ x &\equiv 207 \pmod{1007} \\ x &\equiv 1003 \pmod{1009} \end{aligned}$$

12.2.7　モジュラ m の累乗

► **モジュラ m の大きな累乗を計算する**

- 式 $a^n \bmod m$ に**計算**コマンドを実行します.

Example 63 式 $a = 2789596378267275$, $n = 3848590389047349$, $m = 2838490563537459$ を定義します. $a^n \bmod m$ に, **計算**コマンドを実行します.

$$a^n \bmod m = 26220\,18141\,09828$$

フェルマーの定理によれば, p を素数とし, $0 < a < p$ ならば,

$$a^{p-1} \bmod p = 1$$

整数 1009 は整数ですから, 次の式が成立ちます.

▶ **計算**
$2^{1008} \bmod 1009 = 1$

12.2.8　大きな素数を作成する

大きな素数を作成する専用の関数は用意されていませんが, 既存の関数を使って目的の数値を作成することができます. その方法を次に示します. (既存の MuPAD 関数へのアクセス方法に関する詳細は 114 ページを参照してください.)
ここでは, MuPAD の関数, **nextprime(x)**, を $p(x)$ という Scientific WorkPlace (Notebook) Name **の関数**名として定義します. この関数は, 最初の素数が x より大きいか, 等しい素数を作成します.

▶ **次の素数を作成する関数$p(x)$ を定義する**

1. **関数定義**サブメニューから **MuPAD 関数の定義**を選択します.
2. MuPAD 名に nextprime(x) と入力します.
3. *Scientific WorkPlace*(*Notebook*) 名に $p(x)$ を入力します.
4. MuPAD に内蔵されているか自動的にロードされるにチェックします.
5. OK ボタンをクリックします.

計算コマンドを使って関数の機能を確認します.

▶ **計算**

$p(5) = 5$　　$p(500) = 503$　　$p(8298) = 8311$
$p\,(273849728952758923) = 273\,849\,728\,952\,758\,923$

Example 64 Rivest-Shamir-Adleman (RSA) の運算系はオイラーの定理に基いたものであり, これには大きな素数のペアが必要とされます. 大きな素数のペアは,

$$q = p(20934834573) = 20934834647$$

および

$$r = p\,(2593843747347) = 2593843747457$$

実際, より大きな素数は $q \approx 10^{100}$ や $r \approx 10^{100}$ などになります. ここで,

$$\begin{aligned} n &= qr \\ &= 20934834647 \cdot 2593843747457 \\ &= 543\,01689\,95316\,71217\,42679 \end{aligned}$$

正の整数が $\leq n$ で n と互いに素であると

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= (q-1)(r-1) \\ &= 20934834646 \cdot 2593843747456 \\ &= 543\,01689\,95055\,23431\,60576 \end{aligned}$$

いま $x = 29384737849576728375$ をプレインテキストとします．長い文字列は小さな文字列に区分けされます．整数 n よりも大きくなることはありません．適当な大きさを持つ，正の整数 E が $\varphi(n)$ と互いに素である場合，$E = 1009$ とします．この時運算は，

$$y = x^E \bmod n = 20636340188476258131729$$

よって

$$D = 1009^{-1} \bmod \varphi(n) = 42515693816587067489 45$$

これを計算することによって

$$z = y^D \bmod n = 29384737849576728375$$

12.3　その他のモジュラ m

モジュラ関数は行列や多項式についても利用できます．

12.3.1　行列のモジュラ m

行列 A のモジュラ m の計算を行います．式 $A \bmod m$ を入力し，**計算**コマンドを実行します．

► **計算**

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \bmod 3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \bmod 11 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix} \bmod 11 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Example 65 ハミング $(7,4)$ コードは 4 ビットのメッセージワード (ハーフバイトまたはニーブル) から, 7 ビットコードを作成します. いま

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

をハミングエンコード行列とします. メッセージワード $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると, 対応するコードワードは次のようになります.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = & \mathbf{m}H \bmod 2 \\ = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bmod 2 \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

メッセージワードは $3,5,6,7$ ビットに入ります. ただし, 残りの 3 ビットは一般的なパリティビットとして扱われます. このようにしてコードワードは転送されます. 受取側は他の行列の乗算を行い, エラーチェックを行います. ここで
$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ をパリティチェック行列とします. エラーが無ければ, 行列の積

$$\begin{aligned} \mathbf{c}P \bmod 2 = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \bmod 2 \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

はエラーが存在しないことを示し, メッセージワード $\mathbf{m}$ はコードワードの $3,5,6,7$ ビットに格納されます.

仮にコードワードに異常が発生し, $\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ が受信された場合, バイナリの 2 に等しい

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'P \bmod 2 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \bmod 2 \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となります. つまり, 2 ビット目でエラーが発生していることになります. 正しいコードワードは $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ です. $3,5,6,7$ のメッセージワードは $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ となります.

Example 66 2 行 2 列のブロック運算は次式で与えられます.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \bmod 26$$

ここで, x_i はプレインテキスト, y_i は運算の文字を示しています. また, 行列の要素は整数とします. 例えば, $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ は文字列のペア $[E, L]$ (ここでは "Elroy was here" という隠された意味を持っています) を運算テキストのペア $[E, H]$ にマッピングします. つまり, $A \leftrightarrow 0$, $B \leftrightarrow 1$, $C \leftrightarrow 2, \ldots, Z \leftrightarrow 25$ とする訳です.
運算テキストが与えられると, 2 行 2 列の行列モジュラ 26 を逆変換することで文字列を読み解くことができます. 例えば,

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

元の文字列を復元しました. 長い文字列も列ベクトル $\begin{bmatrix} E \\ L \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} E & R & Y & A & H & R \\ L & O & W & S & E & E \end{bmatrix}$ に置き換えて, 次にように積を求めることができます.

$$\begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 17 & 24 & 0 & 7 & 17 \\ 11 & 14 & 22 & 18 & 4 & 4 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 16 & 25 & 16 & 2 & 5 & 21 \\ 23 & 6 & 6 & 2 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

12.3.2 多項式のモジュラ m

各モジュラ係数 m. を小さくするため mod 関数を多項式で利用することができます.

▶ **計算**

$x^5 + 9x^4 - x^3 + 7x - 2 \bmod 5 = x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x + 3$
素数 p とすれば, モジュラ p で既約多項式は $GF_p[x]$ で表せます.

▶ **多項式 $a(x)$ と $b(x)$ の $GF_p[x]$ おける積を求める**

1. 積 $a(x)b(x)$ を展開します.
2. 積のモジュラ p の既約を求めます.

式 $4x^5 + 5x + 3$ と $6x^4 + x^3 + 3$ の $GF_7[x]$ における積を求める場合, 次のようにします.

▶ **展開**

$\left(4x^5 + 5x + 3\right)\left(6x^4 + x^3 + 3\right) = 24x^9 + 4x^8 + 42x^5 + 23x^4 + 3x^3 + 15x + 9$

▶ **計算**
$24x^9 + 4x^8 + 42x^5 + 23x^4 + 3x^3 + 15x + 9 \bmod 7 = 3x^9 + 4x^8 + 2x^4 + 3x^3 + x + 2$
$GF_7[x]$ における $4x^5 + 5x + 3$ と $6x^4 + x^3 + 3$ はもう少し簡単です.

▶ **計算**
$\left(4x^5 + 5x + 3\right) + \left(6x^4 + x^3 + 3\right) \bmod 7 = 4x^5 + 6x^4 + x^3 + 5x + 6$

▶ $GF_p\left[x\right]$ **における多項式** $a\left(x\right)$ **を因数分解する**

- 式 $a\left(x\right) \bmod p$ を因数分解します.

$GF_2\left[x\right]$ において式 $x^{16} + x$ を因数分解する場合は, 次のようにします.

▶ **因数分解**
$x^{16} + x \bmod 2$
$= x\left(x+1\right)\left(x + x^2 + 1\right)\left(x + x^4 + 1\right)\left(x^3 + x^4 + 1\right)\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + 1\right)$
式 $x^{16}+x$ の因数分解は分割不可能な 1, 2, 4 の多項式の積となりました. 式 x^2+x+1 は $GF_2\left[x\right]$ において分割不可能な唯一の多項式です.

12.4 法を多項式とする多項式

2 つの多項式 $f(x)$ と $g(x)$ が多項式 $q(x)$ を法とする合同式を成立させる時, $f(x) - g(x)$ は $q(x)$ の整数であり, これを次のように記述します.

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{q(x)}$$

または

$$g(x) \bmod q(x) = h(x)$$

ただし, $h(x)$ は, 法を $q(x)$ とする合同式 $g(x)$ の最小次数の多項式とします.

▶ **計算**

$x^4 + x + 1 \bmod \left(x^2 + 4x + 5\right) = -23x - 54$
計算結果を次の要領で確認します.

▶ **多項式 ＋ 除算**
$\dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + 4x + 5} = x^2 - 4x + 11 + \dfrac{-23x - 54}{x^2 + 4x + 5}$
この結果から $x^4 + x + 1 \bmod \left(x^2 + 4x + 5\right) = -23x - 54$ となります.

12.4.1 多項式の最大公約数

2 つの多項式 $p(x)$ と $q(x)$ の最大公約数は $p(x)$ と $q(x)$ を割りきれる, 最大の次数を持つ多項式 $d(x)$ です.

関数 $p(x) = 18x^7-9x^5+36x^4+4x^3-16x^2+19x+12$ と $q(x) = 15x^5-9x^4+11x^3+17x^2-10x+8$ を定義します．そして**計算**コマンドを使って式 $\gcd(p(x), q(x))$ を計算します．

▶　**計算**

$\gcd(p(x), q(x)) = 3x^3 + x + 4$

式 $3x^3 + x + 4$ が最大公約数であることを次の方法で確認します．

▶　**多項式 ＋ 除算**

$\dfrac{18x^7 - 9x^5 + 36x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 16x}{3x^3 + x + 4} = 4x - 5x^2 + 6x^4$

$\dfrac{15x^5 - 9x^4 + 11x^3 + 17x^2 - 10x + 8}{3x^3 + x + 4} = 5x^2 - 3x + 2$

よって，$p(x) = \left(6x^4 - 5x^2 + 4x\right)\left(3x^3 + x + 4\right)$ および $q(x) = \left(5x^2 - 3x + 2\right)\left(3x^3 + x + 4\right)$．

12.4.2　多項式の解の重複度

いま，$f(x) = (x-a)^k g(x)$ と記述できる場合，多項式 $f(x)$ の解 a は重複度 k を持っていると言えます．ここで，$g(a) \neq 0$ とします．重複度 $k > 1$ ならば，$f'(x) = k(x-a)^{k-1}g(x)+(x-a)^k g'(x) = (x-a)^{k-1}(kg(x) + (x-a)g'(x))$ ですから，$\gcd(f(x), f'(x)) = (x-a)^{k-1}h(x) \neq 1$ となります．重複解を持つ多項式で，この方法を使うことができます．すなわち，$\gcd(f(x), f'(x))$ が定数なら $f(x)$ は重複解は持ちません．それ以外の場合，$f(x)$ は少なくとも一つの重複解を持ちます．

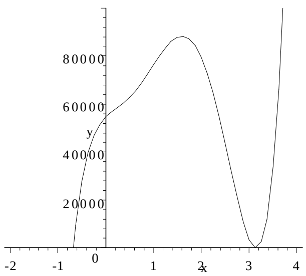
次式

$$f(x) = 5537x^5 - 34804x^4 + 60229x^3 - 29267x^2 + 19888x + 54692$$

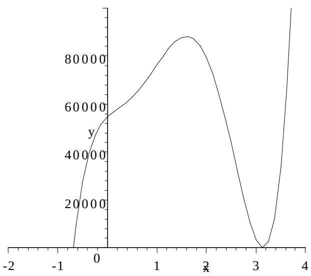
と

$$g(x) = 5537x^5 - 34797x^4 + 60207x^3 - 29260x^2 + 19873x + 54670$$

のグラフを判別することは困難です．両式とも 3.1 の近傍で解をもっているように見えます．



$f(x)$



$g(x)$

これを計算によって確認します．

▶　**計算**

$\gcd(f(x), f'(x)) = 791x - 2486 = 791\left(x - \frac{2486}{791}\right)$ $\qquad \gcd(g(x), g'(x)) = 7$
よって $x = 2486/791 = 22/7$ が $f(x)$ の解であり, 重複度は 2 です. 一方, $g(x)$ には重複解は存在しません. 式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ を解くと, 次のような解が求まります.

▶ **計算**
$\text{assume}\,(\text{real}) = \mathbb{R}$

▶ **求解 + 解**

$f(x) = 0$, 解: $\frac{22}{7}, \sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} - \frac{1}{2}}}$

$g(x) = 0$, 解: $\frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} - \frac{1}{2}}}$

▶ **求解 + 数値解**

$f(x) = 0$, 解: $\{[x = 0.341\,16 - 1.161\,5i], [x = 0.341\,16 + 1.\,161\,5i],$
$[x = -0.682\,33], [x = 3.142\,9]\}$
$g(x) = 0$, 解: $\{[x = 0.341\,16 + 1.161\,5i], [x = 0.341\,16 - 1.161\,5i],$
$[x = -0.682\,33], [x = 3.141\,6], [x = 3.142\,9]\}$

Note　これらの解を求めることが出来ない場合, **ツール**メニューから**計算エンジン**設定を選びます. 一般タブで, 求解オプション—基本的な解だけと特別なケースは無視する—にチェックが付いていないことを確認します.

これら 2 つの多項式の近似を求めるには, 多項式サブメニューの**複素数解を選びます**.

▶ **多項式 + 複素数解**

$f(x)$, **複素数解**: $\begin{bmatrix} 3.\,142\,9 \\ 3.\,142\,9 \\ -0.682\,33 \\ 0.341\,16 + 1.\,161\,5i \\ 0.341\,16 - 1.\,161\,5i \end{bmatrix}$ $\qquad g\,(x)$, **複素数解**: $\begin{bmatrix} 3.\,142\,9 \\ 3.\,141\,6 \\ -0.682\,33 \\ 0.341\,16 - 1.\,161\,5i \\ 0.341\,16 + 1.\,161\,5i \end{bmatrix}$

明かに g は近くに存在する 2 つの異なる解を持っています. 一方, f は $\frac{22}{7} \approx 3.\,142\,9$ で重複解を持っています.

12.4.3　ガロア拡大体 GF_{p^n}

いま, $q(x)$ を GF_p における次数 n の既約多項式とします. $q(x)$ の次数が n であり, $GF_p[x]$ における $a(x)$ と $b(x)$ に対して $q(x) = a(x)b(x)$ とします. この時, $\deg(a(x)) = 0$ または $\deg(b(x)) = 0$ となります. $GF_p[x]$ で多項式 $f(x)$ と $g(x)$ を使って, 積を多項式 $(f(x)g(x) \bmod q(x)) \bmod p$, 和を $(f(x) + g(x)) \bmod p$ と定義します. これらの定義より次数が n 以下となる $GF_p[x]$ における

多項式の組合せをガロア拡大体 GF_{p^n} と呼びます.
$GF_2[x]$ において次数が 2 より小さな多項式の組合せは体 $GF_{2^2} = GF_4$ となります. GF_2 の乗算と加算の表は次式になります.

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

多項式 $q(x) = x^2 + x + 1$ は次数 2 の GF_2 における (唯一の) 既約多項式です. GF_4 の要素は 0, 1, x, $1 + x$ です.
GF_4 における積 $x \cdot x$ を求める場合, 積モジュラ $x^2 + x + 1$ の既約を求め, 次に結果のモジュラ 2 を求めます.

► **計算**
$(x^2 \bmod q(x)) \bmod 2 = x + 1$

GF_4 において $x^2 = x + 1$ です. 行列とモジュラ演算機能を使って, 乗算表を効率的に作成できます.

► **計算**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & x & x+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x+1 \\ 0 & x & x^2 & x\,(x+1) \\ 0 & x+1 & x\,(x+1) & (x+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x+1 \\ 0 & x & x^2 & x\,(x+1) \\ 0 & x+1 & x\,(x+1) & (x+1)^2 \end{bmatrix} \bmod q\,(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x+1 \\ 0 & x & -x-1 & -1 \\ 0 & x+1 & -1 & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x+1 \\ 0 & x & -x-1 & -1 \\ 0 & x+1 & -1 & x \end{bmatrix} \bmod 2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x+1 \\ 0 & x & x+1 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

総計には多項式の和のモジュラ 2 の既約だけが必要です. 乗算表と加算表は次のようになります.

$\times$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

$+$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

GF_2 における a と b による多項式を $f(x) = ax + b$ とし, 2 進法 $(ab)_2$ で示すものとします. GF_4 の乗算表と加算表を 2 進法で示すと次のようになります.

$\times$	00	01	10	11
00	00	00	00	00
01	00	01	10	11
10	00	10	11	01
11	00	11	01	10

$+$	00	11	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

2 進法を 10 進法に変換するため, $0 = (00)_2$, $1 = (01)_2$, $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$ とします. 多項式をこのように簡略的に記述すると, 乗算表と加算表は次のようになります.

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

加算表や乗算表を作成することなく, 大きな有限ガロア体で計算を実行することができます. 次の例では, ガロア拡大体 GF_{p^n} を作成するための, 分割不可能な n 次の多項式 $q(x)$ の解を α とします. GF_{p^n} の全ての要素は多項式 $x^{p^n} - x$ モジュロ p を満たし, GF_{p^n} の非ゼロの要素 u は多項式 $x^{p^n-1} - 1$ モジュロ p を満たすものとします. したがって u の逆数は u^{p^n-2} となります.

► GF_{p^n} における要素 u の逆数を計算する

- 式 $\left(u^{p^n-2} \bmod q(\alpha)\right) \bmod p$ に**計算**コマンドを実行します.

$q(x) = x^4 + x + 1$ とし, α を $q(x)$ の解とします. よって $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$ となります. GF_{2^4} における $\alpha^3 + \alpha^2 + 1$ の計算は次のように行います.

► 計算

$$\left(\left(\alpha^3 + \alpha^2 + 1\right)^{14} \bmod \alpha^4 + \alpha + 1\right) \bmod 2 = \alpha^2$$

► GF_{p^n} の 2 つの要素 u と v の積を計算する

1. 積 uv を展開計算します.
2. モジュロ $q(\alpha)$ の計算結果に**計算**コマンドを実行します.
3. モジュロ p の計算結果に**計算**コマンドを実行します.

いま, $q(x) = x^4 + x + 1$ とし, $q(x)$ の解を α とします. したがって, $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$ となります. GF_{2^4} における $u = \alpha^3 + \alpha^2 + 1$ と $v = \alpha^2$ の計算ステップを次に示します.

► 展開

$$\left(\alpha^3 + \alpha^2 + 1\right)\alpha^2 = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^2$$

▶ **計算**

$\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^2 \bmod \alpha^4 + \alpha + 1 = -2\alpha - 1$
$-2\alpha - 1 \bmod 2 = 1$

次の様にひとつの式で記述することもできます.

▶ **計算**

$\left(\left(\alpha^3 + \alpha^2 + 1\right)\alpha^2 \bmod \alpha^4 + \alpha + 1\right) \bmod 2 = 1$

Example 67 Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (BCH) コードの基底について考えます. メッセージワード $(a_r, a_{r-1}, ..., a_2, a_1, a_0)_2$ は底が 2 で, $GF_2[x]$ において多項式

$$a(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

と結合しているものとします. コードワードは式 $a(x)q(x) \bmod 2$ によって作成されます. ここで $q(x)$ は特別に選ばれた多項式とします.
ガロア拡大体 $GF_{2^4} = GF_{16}$ を考えます. α は GF_{16} において素の要素と考えます. したがって, GF_{16} の非ゼロの要素はすべて α の累乗となります. 特に, α を既約多項式 $x^4 + x + 1$ の解とした時に, このことは有効です. $m_i(x)$ を α^i の最小多項式とします. もし,

$$q(x) = \mathrm{lcm}[m_1(x), m_2(x), ..., m_{2t}(x)]$$

なら, 対応する BCH コードは少なくとも t 個のエラーを修正します.
$\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$ ですから,

$$0^2 = \left(\alpha^4 + \alpha + 1\right)^2 = \left(\alpha^4\right)^2 + \alpha^2 + 1 = \left(\alpha^2\right)^4 + \alpha^2 + 1$$

となります. ここで $m_1(x) = m_2(x)$ とします. 同じ理由で $m_2(x) = m_4(x) = m_8(x)$ となります. 同様に,

$$m_3(x) = (x - \alpha^3)(x - \alpha^6)(x - \alpha^{12})(x - \alpha^9) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

となります. すなわち, 2 重のエラー修正コードは次のようになります.

$$q(x) = \mathrm{lcm}[m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x)] \bmod 2 = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$$

12.5　線型計画法

線型計画法とはある制約条件の付いた線形な関数を最小化または, 最大化するための理論です. 線形計画法は, 最適な解を求めるために, さまざまな分野で利用できます.

12.5.1　単体アルゴリズム

単体アルゴリズムは線型計画法を解くための手法です．ここでは, 関数 $f(x, y) = x + y$ を 2 つの制約条件の下で最大化する例を紹介します．関数 $f(x, y)$ を目的関数と呼び, 条件式を制約と呼びます.

▶　**2 つの制約条件による線型計画を入力する**

1. 3×1 行列を作成します.
2. 目的関数を 1 行目に入力します.
3. 2 行目以降に制約条件を入力します.
4. 行列にカーソルを移動します.
5. 単体サブメニューから最大化を選択します.

▶　**単体 ＋ 最大化**

$$\begin{bmatrix} x + y \\ 4x + 3y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 4 \end{bmatrix}, \text{最大化: } \left\{x = \tfrac{12}{7}, y = -\tfrac{2}{7}\right\}$$

もちろん, これらの解は $-x - y$ を最小化する値と同じ座標系に存在します．次の例では線型計画の行列にカーソルを移動して**単体**サブメニューから**最小化**を選択してください.

▶　**単体 ＋ 最小化**

$$\begin{bmatrix} -x - y \\ 4x + 3y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 4 \end{bmatrix}, \text{最小化: } \left\{y = -\tfrac{2}{7}, x = \tfrac{12}{7}\right\}$$

12.5.2　可能判定

解が存在しない場合, 次の 2 つの理由が考えられます．一つは制約を満たす x と y が存在しないというもので, もう一つは, 存在する解では目的関数を最大化できないというものです．制約を満たす解が存在する場合は, 線型計画のことを可能と言います.

次に最大化または最小化する解を持たない線型計画の例を紹介します．制約を満たす解があることを次のコマンドによって確認することができます．行列をクリックし, **単体**サブメニューから**可能判定**を選択します.

▶　**単体 ＋ 可能判定**

$$\begin{bmatrix} 4x + 3y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{bmatrix}, \text{可能? 真} \qquad \begin{bmatrix} 4x + 3y \leq 6 \\ 4x + 3y \geq 7 \end{bmatrix}, \text{可能? 偽}$$

線型計画 $\begin{array}{r} 4x+3y \leq 6 \\ 4x+3y \geq 7 \end{array}$ の解は存在しません. また, 線型計画 $\begin{array}{c} x+y \\ 4x+3y \leq 6 \\ 4x+3y \geq 7 \end{array}$ を最小化する解も存在しません.

12.5.3 標準形

線型計画のすべての式が $\leq$ で与えられている時, それを標準形と呼びます. 線型計画法の式を標準形に変換する場合, **単体**サブメニューから**標準化**を選択します.

► **単体 + 標準化**

$$\begin{bmatrix} 4x+3y \leq 6 \\ 3x+4y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{bmatrix}, \text{標準化: } \begin{bmatrix} -x \leq 0 \\ -y \leq 0 \\ 3x+4y \leq 4 \\ 4x+3y \leq 6 \end{bmatrix}$$

線型関数を加えて, その線型計画法を最大化します.

► **単体 + 標準化**

$$\begin{bmatrix} x+3y \\ 3x-y \leq 4 \\ 4x+3y \leq 6 \\ -y \leq 0 \\ -x \leq 0 \end{bmatrix}, \text{最大化: } \{x=0, y=2\}$$

12.5.4 線形計画の双対

単体サブメニューには**双対**というコマンドも用意されています. 線型計画法の双対を求めることができます.

► **単体 + 双対**

$$\begin{bmatrix} x+y \\ 4x+3y \leq 6 \\ 3x+4y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ -y \leq 0 \end{bmatrix}, \text{双対: } \begin{bmatrix} 4u_7+6u_8 \\ u_5-3u_7-4u_8 \leq -1 \\ u_6-4u_7-3u_8 \leq -1 \end{bmatrix}$$

単体アルゴリズムを上記の 2 つの線型計画に実行した結果を次に示します.

► **単体 + 最大化**

$$\begin{bmatrix} x+y \\ 4x+3y \le 6 \\ 3x+4y \le 4 \\ x \ge 0 \\ -y \le 0 \end{bmatrix}, \text{最大化: } \left\{y=0, x=\tfrac{4}{3}\right\}$$

▶ **単体 ＋ 最小化**

$$\begin{bmatrix} 6s_1+4s_2 \\ 1 \le 4s_1+3s_2-s_4 \\ 1 \le 3s_1+4s_2-s_3 \\ s_1 \ge 0 \\ s_2 \ge 0 \\ s_3 \ge 0 \\ s_4 \ge 0 \end{bmatrix}, \text{最小化: } \left\{s_4=0, s_1=0, s_2=\tfrac{1}{3}, s_3=\tfrac{1}{3}\right\}$$

12.6　練習問題

1. 整数モジュラ 11 の乗算表から, 2 と 3 の逆数を求めてください. 求めた解を $2^{-1} \bmod 11$ および $3^{-1} \bmod 11$ に**計算**コマンドを実行して確認してください.
2. 合同式 $5x+4 \equiv 8 \pmod{13}$ の解を求めてください. 式 $5x+3 \bmod 13$ に**計算**コマンドを実行して答えを確認してください.
3. テーブルの上のビンにキャンディーが沢山入っています. キャンディーを 5 人の子供に分けると 3 個余ります. 7 人の大人に分けると 5 個余ります. ビンの中にはキャンディーはいくつあるでしょうか?
4. 一番小さい 100 桁の素数は?
5. いま, p を一番小さな 100 桁の素数とします. $2^{p-1} \bmod p$ および $2^{(p-1)/2} \bmod p$, さらに $2^{(p-1)/4} \bmod p$ の値を求めてください.
6. 行列 $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ を 3 つの文字を同時にスクランブルするブロック運算モジュラ 26 とします. 例えば, $A \leftrightarrow 0$, $B \leftrightarrow 1$, $C \leftrightarrow 2$ などという場合, 運算結果の文字 $FKBHRTMTU$ の元の文字列を求めてください.
7. 次数 3 の既約多項式を求めてください. この多項式を使って体 GF_{27} における和と積の計算方法を示してください.
8. 船舶会社がミシシッピ川で干草とビールの運搬を行っています. 料金は干草 1 箱が \$2.30 で, ビール 1 ケースが \$3.00 です. そして干草は平均の重さが 75 ポンドで体積が 5 立方フィートです. 一方, ビールは重さは 100 ポンドで 4 立方フィートです. 船の積載荷重は 150,000 ポンドで, 体積が 8,000 立方フィートです. 船舶会社は料金を最大値にするためにはビールと干草をそれぞれ, どのくらい積めば良いですか?
9. リーマン予想によればリーマンのデータ関数のすべての零点は $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ の直線上にある

とされています．3 次元空間に $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$ とゼータ関数をプロットしてください．

10. いま, $\mathbb{Z}_{30}$ が整数モジュラ 30 を示すものとします．$\mathbb{Z}_{30}$ を群の (分裂した) 集合として表示してください．

12.7　練習問題の答え

1. 関数 $f(i,j) = ij$ を定義します．**行列**サブメニューから**要素の作成**を選択し, 10 行 10 列の大きさで**定義した関数**f を利用します．そして $\mathrm{mod}\,11$ の既約行列を求めます．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

行列を選択し, **編集**メニューから**列の挿入**コマンドで一番左に 1 列追加します．同じ要領で一番上に 1 行追加します．次に示すように × と 1 から 10 までの整数を入力します．

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

この表から, $2 \cdot 6 = 1$ は $2^{-1} = 6$, そして $3 \cdot 4 = 1$ は $3^{-1} = 4$ となります．ここで $2^{-1} \,\mathrm{mod}\,11 = 6$ および $3^{-1} \,\mathrm{mod}\,11 = 4$ として値を確認できます．

2. 解は

$$x = (8-4)/5 \,\mathrm{mod}\,13 = \ 6$$

となります．式

$$6 \cdot 5 + 4 \,\mathrm{mod}\,13 = \ 8$$

で確認できます．

3. 次の合同式の解を求めます．

$$x \equiv 3 \pmod 5$$
$$x \equiv 5 \pmod 7$$

この式は方程式 $x = 3 + 5a = 5 + 7b$ または $3 + 5a \equiv 5 \pmod 7$ と書くことができます. よって $a = (5-3)/5 \bmod 7 = 6$ から, キャンディーは $x = 3 + 5a = 33$ 個です. これを一般化すると n を正の整数として $x = 33 + 35n$ となります.

4. この章で利用した関数 nextp を定義します. そして nextp(10^{99}) によって 289 で終わる値が求められます. 目的の素数 p は $p = 10^{99} + 289$ となります.
5. はじめに $2^{p-1} \bmod p = 1$ および $2^{(p-1)/2} \bmod p = 1$ であることを思い出します. $2^{(p-1)/4} \bmod p$ は 288 で終わる大きな数値を作成します. より正確には, $2^{(p-1)/4} \equiv -1 \bmod p$ となります. この合同式から, p が素数なら $x^2 \equiv 1 \pmod p$ には, $x \equiv 1 \pmod p$ および $x \equiv -1 \pmod p$ という 2 つの解が存在することが分かります.
6. 逆変換で $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 24 & 5 & 24 \\ 5 & 18 & 3 \\ 24 & 3 & 25 \end{bmatrix}$ とします. 運算した文字列 F K B H R T M T U は $[5, 10, 1, 7, 17, 19, 12, 19, 20]$ に等しいことが分かります. 3 つの文字を同時に変換するのですから,

$$\begin{bmatrix} 24 & 5 & 24 \\ 5 & 18 & 3 \\ 24 & 3 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 10 & 17 & 19 \\ 1 & 19 & 20 \end{bmatrix} \bmod 26 = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & 20 \\ 19 & 18 & 13 \end{bmatrix}$$

ベクトル $[12, 0, 19, 7, 8, 18, 5, 20, 13]$ は M A T H I S F U N, または MATH IS FUN となります.

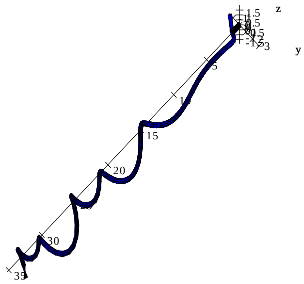
7. 式 $g(x) = x^3 + x + 1$ を定義し, $g(1) \bmod 3 = 0$ となります. よって $g(x)$ は (GF_3 に解をもっているので) 既約関数であることが分かります. もし, $f(x) = x^3 + 2x + 1$ であれば, $f(0) \bmod 3 = 1$, $f(1) \bmod 3 = 1$, $f(2) \bmod 3 = 1$ ですから, $f(x)$ は既約関数です ($f(x)$ が既約関数の場合, 線型要素が存在するので, 解を持つことになります). GF_{27} の要素は GF_3 において次数 3 以下の係数を持つ多項式と考えられます. 体の要素を $2x^2 + x + 2$ および $2x + 1$ とすると, 積は $\left(\left(2x^2 + x + 2\right)(2x+1) \bmod\ x^3 + 2x + 1\right) \bmod 3 = x^2 + 1$ であり, 和は $\left(2x^2 + x + 2\right) + (2x+1) \bmod 3 = 2x^2$ となります.
8. 目的関数は $2.3h + 3b$ です. 制約は $4h + 5b \leq 8000$, $75h + 100b \leq 150000$, $b \geq 0$, $h \geq 0$ です. **単体**サブメニューから**最大化**を選択します.

$$\begin{gathered} 2.3h + 3b \\ 5h + 4b \leq 8000 \\ 75h + 100b \leq 150000 \\ b \geq 0 \\ h \geq 0 \end{gathered}$$

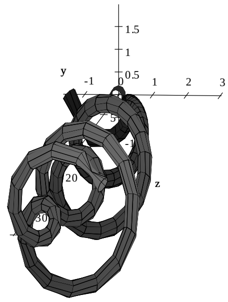
最大値は, $2.3\,(1000) + 3\,(750) = 4550.0$ となり, $\{b = 750, h = 1000\}$ です.

9. 式 $\left(t, \operatorname{Re}\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)\right), \operatorname{Im}\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)\right)\right)$ を入力し, **3D プロット**サブメニューから**環**を選択します. そして $(t, 0, 0)$ を入力し, プロットにドラッグします. プロットプロパティダイアログの数式情報タブで, プロット範囲を $0 < t < 35$ とし, ポイント数を 99 とします. 環のポイント数は 7 とします. プロット 1 と 2 の半径は 0.2 とし, 曲面スタイルで陰線処理を

選択します．ビューの角度をいくつか変更してください．交差する箇所がリーマンゼータ関数の零点です．



横回転: 45°
縦回転: 45°



横回転: 5°
縦回転: 85°

10. はじめに整数 $<$ 30 で 30 に互いに素である数について考えます． $G_1 = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ をモジュラ 30 の最初のグループとします．次に $\gcd(a, 30) = n$ を満たす a と n の集合 G_n を定義します．ただし, $a < 30$ とします．

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \\
G_2 &= \{2, 4, 8, 14, 16, 22, 26, 28\} \\
G_3 &= \{3, 9, 21, 27\} \\
G_5 &= \{5, 25\} \\
G_6 &= \{6, 12, 18, 24\} \\
G_{10} &= \{10, 20\} \\
G_{15} &= \{15\} \\
G_{30} &= \{0\}
\end{aligned}$$

これらのサブセットに対して次に示すような G_2 に対するモジュラ 30 の乗算表 (参照 432 ページ) を作成します．ここで 16 は識別子としての役割を持っています．

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 14 \\ 16 \\ 22 \\ 26 \\ 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 14 & 16 & 22 & 26 & 28 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 & 28 & 32 & 44 & 52 & 56 \\ 8 & 16 & 32 & 56 & 64 & 88 & 104 & 112 \\ 16 & 32 & 64 & 112 & 128 & 176 & 208 & 224 \\ 28 & 56 & 112 & 196 & 224 & 308 & 364 & 392 \\ 32 & 64 & 128 & 224 & 256 & 352 & 416 & 448 \\ 44 & 88 & 176 & 308 & 352 & 484 & 572 & 616 \\ 52 & 104 & 208 & 364 & 416 & 572 & 676 & 728 \\ 56 & 112 & 224 & 392 & 448 & 616 & 728 & 784 \end{bmatrix}$$

そして

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 & 28 & 32 & 44 & 52 & 56 \\ 8 & 16 & 32 & 56 & 64 & 88 & 104 & 112 \\ 16 & 32 & 64 & 112 & 128 & 176 & 208 & 224 \\ 28 & 56 & 112 & 196 & 224 & 308 & 364 & 392 \\ 32 & 64 & 128 & 224 & 256 & 352 & 416 & 448 \\ 44 & 88 & 176 & 308 & 352 & 484 & 572 & 616 \\ 52 & 104 & 208 & 364 & 416 & 572 & 676 & 728 \\ 56 & 112 & 224 & 392 & 448 & 616 & 728 & 784 \end{bmatrix} \bmod 30 =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 & 28 & 2 & 14 & 22 & 26 \\ 8 & 16 & 2 & 26 & 4 & 28 & 14 & 22 \\ 16 & 2 & 4 & 22 & 8 & 26 & 28 & 14 \\ 28 & 26 & 22 & 16 & 14 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 14 & 16 & 22 & 26 & 28 \\ 14 & 28 & 26 & 8 & 22 & 4 & 2 & 16 \\ 22 & 14 & 28 & 4 & 26 & 2 & 16 & 8 \\ 26 & 22 & 14 & 2 & 28 & 16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

これらは乗算に対して閉じており, 各行には重複する値はありません. 乗算は互いに影響を及ぼし, 結合しているので, そのサブセットは事実上, 集合となっています.

索引

1 ノルム, 314
2D アニメーションのぷろっと
　等角写像, 366
2D アニメーションのプロット
　陰関数, 175
2D プロット
　陰関数, 168
　極座標, 169
　勾配, 355
　常微分方程式, 386, 388
　直交座標, 152
　等角写像, 364
　パラメトリック, 165
　パラメトリック極座標, 170
　ベクトルフィールド, 351
2D プロットの拡大, 145
2D プロットの左右回転, 145
2D プロットの変更, 145
2 進数表記, 446
2 ノルム, 314
3D アニメーションのプロット
　陰関数, 206
　円柱座標, 204
　球面座標, 205
　直交座標, 202
　環, 206
3D プロット
　陰関数, 188
　円柱座標, 194, 196
　環プロット, 190, 191, 265
　球面座標, 197, 200
　勾配, 357
　直交座標, 182
　パラメトリック, 185
　ベクトルフィールド, 354
3 重スカラー積, 341

about, 109, 254
additionally, 109, 254
arg 関数, 125
assume, 109

BCH コード, 447

cosh 積分, 128
csgn 関数, 125

divisors 関数, 115

e, 26, 117
erf 関数, 128

F 分布, 412

gcd
　整数, 21
　多項式, 55
最大の整数を検索する関数, 32

istrue 関数, 34

lcm
　整数, 22
　多項式, 55

Mod 関数, 431
MuPAD
　MU ファイル, 116
　エンジン, 13
　関数, 114, 117, 123
　定数, 7, 117
MuPAD 関数
　nextprime, 438
　swapRow, 306

nextprime 関数, 438

π, 26
Psi 関数, 128

QR 分解, 324, 333

RSA アルゴリズム, 438

signum 関数, 123, 125
sinh 積分, 128
sin 積分, 128
SVD, 331

unassume, 109

VCAM ウィンドウ
　3D プロット, 201

x の三乗根
　陰関数プロット, 169
　パラメトリックプロット, 166

アイコン化したプロットの名前, 151
曖昧な表記, 7, 16, 230
値の表
　関数から, 103
新しい定義
　関数, 60, 102
　関数名と数式名, 97
　代入, 100
　複数の変数を持つ関数, 107

変数, 60
圧力, 44
アニメーションのプロット
2D 陰関数, 175
3D 陰関数, 206
円柱座標, 204
球面座標, 205
等角写像, 366
環, 206
アニメーションプロット
3D 直交座標, 202
誤った形式の数式, 230
アンペア, 41

一様分布, 417
一般形, 232
一般定数, 233
一般的な質問, 15
入り組んだ曲面, 191
色
2D プロット, 148
陰関数の微分, 232
定数, 233
陰関数プロット
2D プロット, 168
3D プロット, 188
定義域とビューの範囲, 144
因数
整数, 21
因数分解
多項式, 54
インチ, 43
インプレースの計算, 223
インライン画像, 139

ウェーバー, 43
上に凸, 244
上付き文字, 2
運算, 439

英国熱量単位, 42
エネルギー, 42
エラー関数, 128
エラーの処理, 13
エラーの表示, 13
エラーログ, 13
エルグ, 42
エルミート行列, 327
エルミート転置, 310
エレクトロンボルト, 42
円
陰関数プロット, 168
中心と半径, 50
円弧の長さ, 264
円錐
円柱座標, 194
球面座標, 200
円柱座標, 194
パラメトリック曲面, 196
円柱プロット
球面座標, 198

オーム, 42
オイラーのファイ関数, 131
オウムガイ, 199
大きな素数, 438
同じスケーリング, 149
オングストローム, 43
温度, 44

カーソル, 1
カーブフィット, 421, 423
解
重複, 443
多項式, 56
回帰, 421
解空間, 322
カイ二乗分布, 411
階乗, 22, 408
階数, 324
階段形, 304
回転, 177, 349
回転体
直交座標, 265
解を求める, 63
科学記数法, 27
形式, 29
書換え, 7, 51
Sin と Cos, 37, 82
Sinh と Cosh, 88
Tan, 83
階乗, 23, 408
ガンマ, 408
行列にする, 308
行列を方程式にする, 309
指数, 87
小数点計算, 39
対数, 89
直交座標, 37, 56
浮動小数点, 24
有理数, 24
拡張精度での計算, 436
角度
表記, 44, 80
変換, 45
確率密度関数, 406
加算, 49
行列, 301
数値, 19
ベクトル, 338
華氏, 44
過剰な連立方程式, 426
仮数
実数, 56
カスタム名, 98
カスタムラベル, 149
片対数と両対数のプロット, 149, 164
カッコ, 7
カッコの不要な関数
表記, 129
カッコ不要な関数
デフォルトの引数, 129
仮定, 254
変数, 109
仮定条件, 254
可能判定, 448

加法定理
　三角法の公式, 83
空カッコ, 105
カロリー, 42
環, 265
関数, → 分布
　Im, 37
　istrue, 34
　Re, 37
　オイラーのファイ関数, 131
　仮数, 56
　カッコの不要な関数, 129
　ガンマ関数, 158, 408
　逆, 61
　区間定義, 105
　コマンド表, 117
　最大整数関数, 157
　最大の整数, 32
　三角関数, 124
　シーリング関数, 33
　条件関数, 105
　ステップ関数, 32
　線形代数, 126
　絶対値, 38, 158
　代数, 123
　定義, 60, 62
　統計, 127
　特別な関数, 127, 157
　汎用関数を定義する, 106
　微積分, 125
　微分方程式, 127
　複素数, 125
　フロア関数, 32, 157, 432
　ヘビサイド関数, 159
　ベータ関数, 415
　ベクトル解析, 126
　ベッセル関数, 388
　命名法, 97
　メニューコマンド, 117
　最小整数, 33
関数の合成, 103
関数の代数計算, 103
関数の定義
　新しい定義, 232
　一般形, 232
　汎用的な定数, 235
　命名法, 97
関数の命名
　正しい名前, 97
　引数としての下付き文字, 104
関数名
　関数の引数としての下付き文字, 104
　命名法, 97
簡単化, 20, 25, 52
　指数法則, 71
　多項式, 58
　複雑な数式, 246
カンデラ, 43
環プロット, 190
ガンマ関数, 408

外積, 339
　平行六面体の体積, 341
　平行六面体の面積, 343
外部関数, 114
ガウス, 43
ガウス消去法, 305
画像の中央揃え, 5, 140
画像パズル, 209
画像を表示する, 5
ガロアフィールド, 433, 444
ガロン, 44
Γ, 128
ガンマ関数, 117, 128, 158
　定義, 128
ガンマ分布, 414

キー, 151
キーボードショートカット
　xpnd (expand), 53
　科学記数法, 28
　行列, 293
　数式の書換え, 7
　数式の計算, 5
　単位を入力する, 40
　プロットプロパティダイアログを開く, 138
キーボードの表記, xiii
気圧, 44
幾何平均, 400
記号を使う実数, 23
基底
　解空間, 322
　階数, 324
　行空間, 320
　列空間, 322
基底変数, 348
輝度, 43
基本ジョルダン行列, 330
基本操作, 306
基本定理
　代数, 57
基本的な解だけ, 73
基本的な行列, 306
既約多項式, 444
求解
　solve 関数, 64
　解, 9, 235, 307
　数値解, 235, 243
　整数, 429
　漸化式, 430
求解オプション
　基本的な解, 73
　最大次数, 64
　特別な解を無視, 73
空間上の曲線
　環プロット, 190
級数, 271
　乗根判定法, 272
　常微分方程式を解く, 375
　積分判定, 272
　テイラー, 274, 375, 384
　比判定法, 272
　表記, 271
　マクローリン, 273
球面座標, 197
　パラメトリック曲面, 200

共役, 38
共役複素数, 38
境界値問題, 382
共分散行列, 404
共役転置, 310
極限, 222
　片側, 224
　表記方法, 222
　無限, 224
　無限遠点, 224
極限近傍の値, 225, 226
　行列の連結, 227
極限値, 223
極座標, 143, 169
　体積, 269
極小値, 240
曲線の描画, 241
極大値, 240
極値
　曲線上の, 240
　極値を探す, 241, 277
　曲面の, 275
　ラグランジュの乗数法, 277
極値を探す, 241
極プロット
　極座標, 169
曲面上の極小値と極大値, 275
曲面のスタイル, 195
虚数
　単位, 35
　部分, 37
近似
　繰返しによるニュートン法, 237
　小数点計算, 23
　数値積分, 263
　積分, 259
　線形回帰, 421
　多項式フィット, 423
　ベキ乗, 273
　有理数, 429
　リーマン和, 256
　連分数, 429
近似積分
　シンプソン法, 261
　台形法, 261
　中点法, 259, 260
近似積分のプロット
　左右の矩形, 258
　中点矩形, 256
　左側矩形, 257
　右側矩形, 257
近似値, → 数値の近似計算
　e と π, 26

逆
　関数, 61, 103
　逆関数のプロット, 166, 168
　三角関数, 85
　ハイパボリック関数, 88
　フーリエ変換, 381
　モジュラ m, 433
逆行列, 302
逆微分, 245
逆分布関数, 407
逆ラプラス変換, 378
行列
　転置, 310
行空間, 321
行と列の挿入, 297
行の入れ替え, 306
行の階段形, 305
行の操作, 304
行の追加, 297
行列, 291
　QR 分解, 324, 333
　SVD, 331
　位置揃え, 298
　エルミート行列, 327
　エルミート転置, 310
　解空間, 322
　解空間の基底, 322
　階数, 324
　階段形, 304
　重ね, 299
　加算, 301
　加算の逆行列, 303
　カッコ, 292
　ガウス消去法, 305
　画面表示, 291
　基本操作, 306
　逆行列, 302
　行空間, 321
　行と列の挿入, 297
　行の入れ替え, 306
　行の基底, 321
　行の基本操作, 306
　行の操作, 304
　行列式, 311
　行列の関数, 103
　行列の乗算, 301
　行列方程式, 307
　矩形ブロックの置換, 298
　古典的隣接, 312
　固有値, 316, 319
　固有ベクトル, 319
　コレスキ分解, 333
　コンディショナンバー, 316
　コンパニオン行列, 327
　最小多項式, 318
　最小要素, 313
　最大要素, 313
　指数関数, 316
　スカラーの乗算, 301
　スペクトル半径, 315
　スミス標準形, 325
　随伴, 312
　随伴行列, 312
　正値, 320
　正負値判定, 320
　相似, 325
　多項式, 303
　単位行列, 302
　直交, 324, 333
　直交テスト, 323
　直交列, 324
　定義, 291

定数行列, 296
転置, 310
投影行列, 334
特異値, 331
特性多項式, 317
トレース, 310
同値, 325
入力, 291
ノルム, 314, 342
パーマネント, 313
表記, 292
PLU 分解, 332
フロベニウス形, 328
変形, 300, 395
モジュラ m, 439
有理標準形, 327, 328
ユニタリ, 331
余因子, 312
要素の作成, 294
ジョルダンブロック, 295
ゼロ, 294
単位行列, 294
定義関数, 295
バンド, 296
ランダム行列, 294
要素の操作, 304
ランダム, 293
累乗, 301, 303
列空間, 322
列と行を削除する, 298
列と行を追加する, 297
列の基底, 322
連結, 103, 299
行列演算子
1 ノルム, 314
行列演算子
エルミート転置, 310
行列式, 311
コンディションナンバー, 316
最大値と最小値, 313
指数関数, 316
随伴行列, 312
転置, 310
トレース, 310
ノルム, 314
パーマネント, 313
ヒルベルトシュミットノルム, 315
∞ ノルム, 315
ユークリッドノルム, 314
行列式, 311
行列の重ね, 299
行列の行の入れ替え, 306
行列の分解, **331**
行列の編集, 297
行列方程式, 307
行列の積, 301

クーロン, 42
空間上の曲線
多角形, 192
直交座標プロット, 189
空間上の平面, 187
空間内の平面
ベクトル方程式, 344
空集合, 35, 57
クォート, 44
区間定義関数
定積分, 251
表記, 105
微分, 230
不定積分, 245
繰返し, 236
ニュートンの繰返し関数, 238

隅角, 44
グラム, 43
グラム-シュミットの直交化, 324
グリッド線のプロット, 162

計算, 23, 49
加算, 19
基本操作, 23
級数, 271
行列, 301
乗算, 20
端点, 69
置換, 23
デファード計算, 100
微積分, 221
フル計算, 100, 101
計算エンジンからのエラー, 13
計算エンジン設定
エラーを処理する, 13
エンジン選択, 13
簡略化した数式処理メニュー, xi
数式処理の有効桁数, 28
有効桁数, 28
計算エンジン選択, 13
計算エンジンのデフォルト設定, 28
計算を停止する, 13
ケイレイ-ハミルトンの定理, 318
血流問題, 284
ケルビン, 44

減算, 19
原子質量単位, 43

コーシー分布, 416
コードワード, 440, 447
光源, 177
光束, 43
光度, 43
勾配, 277, 347
3D プロット, 357
勾配フィールド, 355
コサイン積分, 128
コマンド表
関数, 123
数式処理メニューのコマンド, 117
定数, 117
固有値, 319
固有ベクトル, 319
コレスキ分解, 333
混合単位, 44
コンディションナンバー, 316
コンパニオン行列, 327

合同式
- ガロアフィールド, 433
- 逆モジュラ m, 433
- 行列モジュラ m, 439
- 整数モジュラ m, 431
- 線形合同式を解く, 434
- 多項式, 442
- 多項式モジュラ m, 441
- 中国人剰余定理, 435
- フェルマーの定理, 438

合同式の解法, 434
合同式の系, 435
五角形, 160
五角形のプロット, 167
誤差
- 短縮, 26
- 丸め, 26

差, 35
最小公倍数
- 整数, 22
- 多項式, 55

最小二乗法による解, 426
最小整数, 33
最小多項式, 317
最小値, 31, 240
- 行列要素, 313
- 数値, 31
- 有限連続区間, 32

最大公約数
- 整数, 21
- 多項式, 55, 442

最大次数
- 求解オプション, 64

最大整数関数, 157
最大値
- 行列要素, 313
- 集合, 31
- 数値, 31
- 有限連続区間, 32

最適化, 240, 275
- 極値を探す, 277
- ラグランジュの乗数法, 277

最頻値, 400
再描画, 15
削除
- 定義, 107

最大値, 240
サポート, xiv
左右の矩形, 258
三角関数の方程式を解く, 81
三角法
- 恒等式, 82
- 三角関数, 79
- 三角方程式を解く, 81
- 数式を簡単化する, 84

三角方程式を解く, 85
算術幾何平均, 284
サンプルサイズ, 148

座標
- プロット座標ダイアログ, 146

座標点からプロット
- プロットの座標ダイアログ, 146

シーリング関数, 33
式, 三角法, 81
指数, 2, 24
指数関数
- 行列, 316
- 実数, 70

指数式, 73
指数積分, 128
指数と対数方程式を解く
- 指数と対数, 73

指数分布, 413
下付き文字, 2
- 関数の引数として, 104
- 関数名, 97

質量, 43
四分位数, 399
集合, 31, 34, 35
- 空集合, 35
- 差, 35

集合の差, 35
商の法則, 232
周波数, 43
小数点, 23
- 結果の表示, 29
- 数式処理の有効桁数, 28

小数点計算, 23, 26, 39
- 書換え, 39

照度, 43
初期値問題, 385
初等理論
- 微積分, 284

シンプソン法, 261

時, 44
ジーメンス, 42
時間, 44
磁気インダクタンス, 43
磁気誘導密度, 43
軸スケーリング
- 各軸で同じスケーリングを採用する, 149
- 線形, 片対数, 両対数, 149

軸タイプ
- 2D プロット, 149

軸の種類
- 3D プロット, 181

軸範囲
- 2D パラメトリックプロット, 144
- 2D プロット陰関数, 144
- 2D プロットの拡大, 145
- 2D プロットの左右回転, 145
- 3D プロット, 176
- ビューを変更, 146

軸ラベル
- 2D 軸の種類, 149
- 3D の軸の種類, 181

磁束, 43
実数部, 37
自動計算式
- ダイアログ, 112
- 背景色, 112

自動計算式と表, 113

自動選択, 9
自動置換, 99
ジュール, 42
重複解, 443
条件関数, 105
乗根判定法, 272
乗算
　数値, 20
常微分方程式, 371
　系, 382
常微分方程式を解く
　解, 382
　級数, 375, 384
　数値解, 385, 386
　ラプラス, 374, 383
剰余, 431
除算, 20
　整数, 21
　多項式, 53
ジョルダン形, 329
ジョルダンブロック, 295

垂直漸近線, 155
水平スペース, 15
数式
　数式のプロット, 152
　数式の命名, 100
　命名法, 97
数式/文字ボタン, 1
数式エンジンの設定
　基本的な解だけ, 73
　最大次数, 64
　特別な解を無視する, 73
数式計算の失敗, 15
数式処理, 5
数式処理設定のカスタマイズ, → 設定
数式処理ツールバー, 8
数式処理の設定
　2D プロット, 210
　3D プロット, 210
　科学記数法の形式, 29
　カッコの不要な引数, 80
　関数の引数の選択法, 129
　虚数単位, 35
　計算結果表示桁数, 29
　対数関数の底, 71
　定義オプション, 108
　プロットの設定, 209
　プロットレイアウト, 209
　ベッセル関数の表記, 390
数式処理メニュー, 8, 117
数式情報, 147
　プロットした数式の番号, 179
数式の書換え, 7
数式の確認, 246
数式の計算, 5
数式の作成, 4
数式の清書, 246
数式の表示, 4
数式の命名
　正しい名前, 97
数式名, 98
　カスタム名の種類, 98
　自動置換の設定, 99
数式モード, 1
　文字を数式に変更する, 15
数式を書き換える, 16
数式を入力する, 1
数式を命名する, 100
数値
　記号, 26
　記号表記, 23
　基本操作, 23
　実数, 23
　数式モード, 19
　複素数, 35
　たいぶんすう, 20
数値解の表, 385
数値計算の結果, 26, 39
数値積分, 263
数列, 269
　関数として定義, 270
スカラーの乗算, 338
スカラーポテンシャル, 359
スクロールバー, 15
スチューデント t 分布, 409
スチルブ, 43
ステップ関数, 32
ステラジアン, 44
スナップショット, 207
　画像の作成, 208
　自動作成, 207
スペース, 15
スペクトル半径, 315
スミス標準形, 325
スラッグ, 43

随伴
　エルミート転置, 310
随伴行列, 312
図の一覧, 150

正規分布, 408
整数解, 429
整数モジュラ m, 431
整数論, 21, 429, 431, 438
　最大公約数と最小公倍数, 21
　連分数, 429
整数論の基本, 21
正負値判定, 320
制約, 447
整理, 53
積
　Arctan, 85
　三角関数, 84, 91
　指数, 70
　対数, 72
　累乗, 70
積の公式, 232
積分
　区間定義関数, 245
　数値積分, 263
　体積計算, 280
　置換積分, 252
　定積分, 249
　テクニック, 247

非固有, 253
表記, 221
不定, 245
部分, 247
部分積分, 252
部分分数, 252
累次, 280
積分関数, 250
積分手法
部分積分, 247
変数の置換, 247
積分定数, 245
積分の繰り返し, 280
積分の手法
置換積分, 252
部分積分, 252
部分分数, 248, 252
積分の定義
シンプソン法, 261
積分のテクニック
部分積分, 247
変数の置換, 247
積分の方法, 247
積分判定, 272
摂氏, 44
接線, 234
接線問題, 283
設定
2D プロット, 211
3D プロット, 212
e を 10 に変更する, 71
i を j に代える, 35
一般
常微分方程式の級数解, 375
常微分方程式の級数解の項数, 384
エラーの処理, 13
エラーレベル, 16
科学記数法の形式, 29
カッコ付き引数への変換, 80
カッコの利用方法, 129
計算結果表示桁数, 29
数式処理の有効桁数, 28
定義の保存と読込み, 108
プロット設定, 212
プロットレイアウト, 211
ベッセル関数の表記, **390**
線グラフ, 161
線形回帰, 421
線形計画の双対, 449
線形計画法, 447
制約, 448
双対, 449
標準形, 449
目的関数, 448
線形計画法, → 単体
線形合同式, 434
線形の連立方程式, 307
線種, 148
選択, 3
行列における数式, 10
自動選択, 9
選択範囲を置換する, 12
ディスプレイにおける数式, 10
部分計算, 12
文字を数式に変更する, 15
ユーザ選択, 9, 11
選択範囲を置換える, 12
選択問題
自動計算式, 113
線の太さ, 148

ゼータ関数, 271
絶対収束, 272
絶対値
記号, 16, 31
数値, 31
積分, 251
複素数, 38
プロット, 158
漸化式の定義, 430
漸近線
不連続点を調整する, 156
連続および不連続なプロット, 155
全定義の削除, 62
全微分, 280

素因数分解, 21
相関, 405
相関係数, 405
相似行列, 325
相当
相当チェック, 33
相当性
論理演算子, 34
相当チェック, 33
挿入
上付き文字, 25
下付き文字, 25
数式, 19
単位名, 39
分数, 20
文字, 19
ルート, 24
挿入メニュー
上付き文字, 2
下付き文字, 2
数式, 1
分数, 2
ルート, 2
総和記号, 51
添え字の位置, 98
素数, 21, 438

対称行列の正値, 320
対数
底, 71
表記, 71
対数関数, 70
対数関数の底, 71
対数式, 73
体積, 44
極座標, 269
パラメトリックプロット, 267
表面, 266
帯分数, 20, 431
多角形

2D プロット, 160
3D プロット, 192
多項式, 49
因数分解, 54
解, 56
既約, 444
行列, 303
コンパニオン行列, 327
5 次以上の多項式の解, 59
最大公約数, 442
3 次と 4 次の多項式の解, 57
重複解, 443
除算, 53, 243
整理, 53
整理と並べ替え, 53
長除, 53
並べ替え, 53
2 次の多項式の解, 57
複素数解, 56
部分分数, 52, 248
モジュラ m, 441
モジュラ多項式, 442
累乗と積, 53
多重回帰, 421
多条件関数, 105
正しい定義名, 97
縦スペース, 15
多変数の微積分, 275
単位
圧力, 44
エネルギー, 42
温度, 44
角度, 44
キーボードショートカット, 40, 41
輝度, 43
隅角, 44
光束, 43
光度, 43
混合単位名, 44
質量, 43
周波数, 43
照度, 43
時間, 44
磁気インダクタンス, 43
磁気誘導, 43
磁束, 43
数値演算, 45
体積, 44
単位の記号, 41
単位名ダイアログ, 41
力, 42
電位差, 42
電荷, 42
電気抵抗, 42
電気伝導度, 42
電気容量, 42
電流, 41
電力, 44
長さ, 43
物質量, 41
物理単位, 39
平面角, 44
変換する, 45
放射能, 41
面積, 41
単位表, 41
単位名ダイアログ, 39
単体
可能判定, 448
最小化, 448
最大化, 448
双対, 449
標準化, 449
単体法, 448

台形法, 261
代入
デファード計算, 100
フル計算, 101
変数の定義, 100
ダイン, 42
楕円, 186
楕円積分, 283

力, 42
置換, 69, 223
自動置換, 99
置換積分, 247
中央値, 399
中国人剰余定理, 435
注釈, 150
中点矩形, 256
中点法, 259, 260
超幾何分布, 419
長除
整数, 21
多項式, 53
調和平均, 401
直線
ベクトル方程式, 345
直交, 323
直交行列, 323, 324, 331, 333
直交座標
2D プロット, 142
3D プロット, 183
プロットの座標ダイアログ, 146

定義
MuPAD 関数, 114
新しい定義, 60, 100, 102, 104
一変数の関数, 102
一般定数, 233
関数の定義, 60
下付き文字を使った関数, 104
全定義の削除, 62
単位名, 45
定義の削除, 62, 107, 114
定義の作成方法, 59
定義の表示, 62, 107
定義の保存, 108, 114
定義の読込み, 108, 114
デファード計算, 100
汎用関数, 106
汎用定数, 107
複数の変数を持つ関数, 107
フル計算, 101

変数を定義する, 60, → 代入
命名法, 97
定義域
2D プロット, 148
3D プロット, 179
定義した関数
2D プロット, 155
3D プロット, 184
円柱座標プロット, 195
球面プロット, 199
定義の削除, 62, 107
定義の保存, 108
定義の読込み, 108
定義を表示する, 62
定数, 7
MuPAD 定数, 117
一般定数, 233
陰関数の微分, 235
汎用定数, 107
汎用的な定数, 235
定積分
台形法, 261
中点法, 259, 260
定義, 255
表記, 250
テイラー級数, 274, 375
1 変数, 274
2 変数, 278
テクニカルサポート, xiv
テスラ, 43
展開, 11, 50
帯分数, 20
多項式, 53
転置, 310
点のプロット
2D プロット, 160
3D プロット, 192
多角形と点のプロット, 160

データ
カーブフィット, 421
データのインポート, 396
乱数, 420
リストと行列の変形, 300, 395
データセット, 395
データのインポート, 396
データのプロット, 160
データポイントの数
2D プロット, 148
データリスト
行列に変換, 300, 395
ディスプレイ, 140
ディラックインパルス関数, 375
デカルト
デカルトの葉線, 215
デカルトの葉線, 215
デファード計算, 100
デフォルト設定
プロットオプション, 209
電気
電位差, 42
電荷, 42
電気抵抗, 42
電気伝導度, 42
電気容量, 42
電流, 41
電力, 44

投影行列, 334
等角写像プロット, 364
統計, 395
カーブフィット
次数 n の多項式, 423
多重回帰, 421
回帰, 421
確率密度関数, 406
逆分布関数, 407
正規分布, 408
分布
F, 412
一様, 417
カイ二乗, 411
ガンマ, 414
コーシー, 416
指数, 413
スチューデント t, 409
超幾何, 419
二項, 417
ベータ, 415
ポアソン, 419
ワイブル, 413
乱数, 420
累積分布, 406
統計関数
BetaDen, 415, 416
BetaDist, 415
BinomialDen, 417
BinomialDist, 417
CauchyDist, 416
ChiSquareDen, 411
ChiSquareDist, 411
ExpenentialDen, 413
ExponentialDist, 413
FDen, 412
FDist, 412
GammaDen, 414
GammaDist, 414
HypergeomDen, 419
HypergeomDist, 419
NormalDen, 408
NormalDist, 408
PoissonDen, 419
PoissonDist, 419
TDen, 409
TDist, 409
UniformDen, 417
UniformDist, 417
WeibullDen, 413
WeibullDist, 413
統計メニュー
幾何平均, 400
共分散, 404
最頻値, 400
四分位数, 399
相関, 405
中央値, 399

調和平均, 401
標準偏差, 403
分散, 403
平均, 398
平均偏差, 402
モーメント, 405
等高線, 276
特異値, 331
特性
値, 319
行列, 326
多項式, 317
ベクトル, 319
特別な解を無視する, 73
トル, 44
トレース, 310

度, 44
単位名, 44
度とラジアンの表記, 80
度の単位でプロットする, 153
表記方法と機能, 80
同語反復, 34
同値行列, 325
ドット積, 301, 310, 338
ド·モアブルの定理, 91

内積, 301, 310, 338
平行六面体の体積, 341
長さ, 43
ナブラ記号, 346
名前の種類
関数や変数, 98
添え字, 98
並べ替え, 53

ニーブル, 440
二階微分, 244
二項演算, 3
二項関係, 9
二項係数, 417
階乗の書換え, 23
二項式
係数, 22
二項分布, 417
ニュートンの繰返し関数, 238
ニュートンの重力ポテンシャル, 366
ニュートン法, 237, 238
入力
自動計算式, 112
数式名, 98
入力ポイント, 1
任意の関数, 232

年, 44

ノルム, 314

ハイパボリック関数
逆, 88
ハイパボリック関数
定義, 87
ハイパボロイド曲面
一平面, 186
二平面, 187
発散, 348
ハミングコード, 440
搬送波, 167
反転表示, 3
汎用関数, 106
汎用定数, 107
汎用的な定数, 235

バール, 44
倍角の公式, 83
バイト, 440
馬力, 44
バンド行列, 296

パーセンタイル, 399
パーマネント, 313
π, 117
パイント, 44
パスカル, 44
パラメトリックプロット, 144, 165
3D 直交座標, 185, 190
円柱座標, 196
環のプロット, 191
球面座標, 200
極座標, 170
パラメトリック方程式, 267

日, 44
引数
カッコの有無, 129
非固有積分, 253
サンプル, 254
練習問題, 284
ヒストグラム, 161
非相当性, 34
左側矩形, 257, 260
比判定法, 272
表記, xiii
表示
選択, 138
表示範囲, 178
標準, 181
標準的な表記, 16
標準偏差, 403
表面, 266
表面の面積, 266
ヒルベルト-シュミットノルム, 315
ヒルベルト行列, 295

微積分
陰関数の微分, 232
極限, 222
極値, 277
近似積分, 259
近似積分のプロット, 256
繰返し, 236
積分, 249
多項式の除算, 243
置換積分, 252
微分式のプロット, 230
不定積分, 245

部分積分, 247, 252
部分分数, 248, 252
変数の置換, 247
微分, 221, 280
2D プロット, 230
陰関数, 232
陰関数の微分, 107
極値を探す, 241
区間定義関数, 230
定義, 228
ニュートン法, 237
表記, 228
方向微分, 351
微分方程式, 371
級数解, 375, 384
境界値問題, 382
初期値問題, 382, 385, 386
常微分方程式, 371
数値解, 385, 386
線形, 371, 374
同次, 371, 374
プロット, 386, 388
ベッセル関数, 388
方向フィールド, 352
連立方程式, 382
微分方程式を解く, 371
解, 371
ビュー
2D プロット, 141
2D プロット極座標, 143
軸範囲, 142
選択, 137
選択する, 177
直交座標, **142**
向き, 3D プロット, 176
秒, 44

PLU 分解, 332

フートキャンドル, 43
フーリエ変換, 380
ファイ関数, 131
ファラッド, 42
ファンデルモンド行列, 295
フィート, 43
フェルマーの定理, 438
フォト, 43
複素関数のプロット, 364
複素数
基本操作, 35
共役複素数, 38
極形式, 89, 90
虚数単位 i または j, 35
実数部と虚数部, 37
絶対値, 38
不定積分, 245
太い環, 190
不等式, 68
浮動小数点, 23, 26
フル計算, 101
フレーム
インラインに配置, 139
選択, 136
ディスプレイ, 140
プロパティ, 138
プロパティダイアログで大きさ変更, 139
マウスによるサイズ変更, 138
不連続関数のプロット, 157
不連続点を調整する, 155
フロア関数
プロット, 157
モジュラ関数, 432
最大の整数, 32
フロベニウス形, 328
フロベニウスノルム, 315
分, 44

物質量, 41
物理単位, 39
部分計算, 12
部分分数
積分, 248
代数, 52
部分和, 271
ブロック運算, 441
分散, 403, 404
文書に単位を入力する, 39
分数, 2
帯分数, 20
有理化, 26
文節の中央揃え, 5
文節を表示する, 5
分布, ➔ 統計
表, 407
離散分布, 417
連続分布, 408
分布関数, 406
分母の有理化, 26

プレインテキスト, 439
不連続関数のプロット, 155
プロット, ➔ 2D プロット, ➔ 3D プロット
3D の点のプロット, 192
拡大ツール, 145
基本操作, 135
区間定義関数, 156
グリッド, 162
軸, 181
常微分方程式の系, 388
数式を追加する, 183
定義した関数, 155, 184
点の 2D プロット, 160
デフォルトオプション, 209
ビューを変更する, 145
複数の数式, 152
プロットの座標ダイアログ, 146
プロットプロパティダイアログ, 177
リーマン和, 256
プロットオリエンテーションツール, 176
プロットからの座標点, 146
プロットした数式
範囲, 148
不連続点を調整する, 155
プロットスタイル, 148
プロットの色, 148
プロット範囲, 148

プロット番号, 147
変数の変換, 198
ポイント数, 148
プロットした数式の番号, 179
プロットスタイル
折れ線, 148
ポイント, 148
プロットツール
2D プロット, 144
3D プロット, 177
プロットに数式を追加する
2D プロット, 153
3D プロット, 183
プロットにラベルを付ける, 150
プロットのアイコン化, 151
プロットの印刷, 207
プロットの再描画, 210
プロットの座標ダイアログ, 146
プロットの種類
片対数と両対数, 164
プロットの設定, 209, 211
プロットのプロパティ
3D プロット, 176
プロットのプロパティダイアログ, 210
プロットの向き, 176
プロット範囲
2D パラメトリックプロット, 144
2D プロット陰関数, 144
3D プロット, 176
プロット番号, 147
プロットプロパティ
ダイアログを開く, 137
デフォルト設定, 209
表示, 回転, 177
フレームの位置, 139
ポイント数, 179
ラベリング, 182
レイアウト, 138
プロットレイアウト, 209

平均, 398
幾何, 400
算術, 398
調和, 401
平均値, 398
平均偏差, 402
平行六面体, 341, 343
平方和, 50
平面角, 44
ヘッセ, 361
ヘビサイド関数, 159, 376
ヘルプ
追加の情報, xiv
テクニカルサポート, xiv
変換
逆フーリエ, 381
逆ラプラス変換, 378
フーリエ, 380
ラプラス, 377
変数
仮定の作成, 109
条件を設定する, 254
定義, 60
デファード計算, 101
フル計算, 101
命名法, 97
変数に値を代入する, 60
変数に他の変数を代入する, 69
変数の仮定, 109
グローバル変数, 109
変数の制約, 110
名前付き変数, 110
変数の置換
積分, 247
変数の変換, 197, 199
偏微分, 275
表記, 228
ヘンリー, 43

ベータ関数, 128
ベータ分布, 415
べき乗
べき級数, 273
べき級数, 273
ベクトル, 291
3 重積, 340
外積, 339
スカラーとの乗算, 338
特徴的なベクトル, 319
ドット積, 338
内積, 301, 338
ノルム, 342
表記, 337
フィールド, 351
ベクトルの加算, 338
ポテンシャル, 360
ベクトル 3 重積, 340
ベクトル解析, 337
回転, 349
基底変数の設定, 348, 360
勾配, 347
スカラーポテンシャル, 359
発散, 348
ヘッセ, 361
ベクトルポテンシャル, 360
ヤコビアン, 362
ラプラシアン, 350
ロンスキアン, 363
ベクトル空間
解空間, 322
行空間, 320
列空間, 322
ベクトルフィールド, 351
3D プロット, 354
ベクトル方程式
直線, 345
平面, 344
ベクレル, 41
ベッセル関数, 388
ベルヌイ
数, 128
多項式, 128

方向微分, 351, 366
方向フィールド, 352
放射能, 41

方程式の求解
    逆三角関数, 86
方程式を解く, → 求解
    解, 63, 65
    繰返し, 236
    数値解, 66
    ニュートン法, 237
包絡線, 167

棒グラフ, 161
ボックス, 181
ボルト, 42

ポアソン分布, 419
ポイント数
    2D プロット, 148
    3D プロット, 179
ポイントプロット
    プロットスタイル, 148
ポイントマーカ, 149

マウスポインタ, 1
マクスウェル, 43
マクローリン級数, 273

右側矩形, 257, 260
ミリ, 43

∞ ノルム, 315

メートル, 43
メッセージワード, 440
面積, 41

モーメント, 405
目的関数, 448
文字/数式ボタンの切替え, 1
文字送り, 36
モジュラ, → 合同式, 431
モジュラ m の乗算表, 432
文字を入力する, 1
モル, 41

ヤコビアン, 362

ユークリッドノルム, 314, 315, 342
ユーザ設定
    スペース, 15
ユーザ選択, 9
ユーザ定義関数, 116
ユーザ定義の単位名, 45
有理式, 51
有理数近似, 429
有理標準形, 327, 328
ユニタリ行列, 331

余因子, 312
要素の作成, 294
    関数で定義, 295
    行列, 226, 294
    ジョルダンブロック, 295
    単位行列, 294
    バンド, 296
    ランダム, 294

ラグランジュの乗数法, 277
ラジアン, 44
ラプラシアン, 350
ラプラス変換, 374, 377
ラベリング, 182
乱数, 420
ランダム行列
    三角, 293
    対称, 293
    非対称, 293
    無制限, 293

リーマン和, 250, 256
リスト形式のデータ, 395
リストと行列の変形, 300, 395
立体化
    環プロット, 265
リットル, 44
隣接, 312

ルート, 24
    複素数, 36
ルーメン, 43
累次積分, 280
    不定積分, 283
累次積分で体積を求める, 280
累乗, 24, 36
    モジュラ m, 437
累積分布関数, 406
ルックス, 43

レイアウト
    印刷設定, 141
    画面表示設定, 141
    ディスプレイ配置, 140
    デフォルト, 138
    配置
        インライン, 139
    フレームの大きさ, 139
    フローティング配置, 140
列空間, 322
列の追加, 297
連結, 103, 227, 299, 300
連鎖律, 232
練習問題と解答
    応用現代代数, 450
    関数の定義, 131
    曲線と曲面のプロット, 213
    行列と代数, 334
    三角法, 93
    数値, 関数, 単位, 46
    代数, 73
    統計, 427
    微積分, 283
    微分方程式, 391
    ベクトル解析, 366
連続
    有限区間, 32
連続関数のプロット, 155, 157
連分数, 429
連立方程式, 65

行列を方程式に, 309
解く, 66
方程式を行列に, 308

ロンスキアン, 363
論理演算子, 34
論理積, 31, 35
論理演算子, 34
論理和, 31, 35
論理演算子, 34

和, 34
ワイブル分布, 413
ワット, 44