

GB012b: 2次元の粘性流体

本 whitepaper は Gunnar Backstrom 氏の承諾のもと、書籍“*Simple Fields of Physics by Finite Element Analysis*” に記されている多数の FlexPDE 適用事例の中からその一部を紹介するものです。

2次元の流れでも粘性を考慮する場合には Navier-Stokes の方程式を用いて計算を行う必要があります。関連する方程式の導出過程については別資料

- GB012a: 粘性流体の扱いについて

を参照してください。ライトストーン web ページ

<http://www.lightstone.co.jp/products/flexpde/backstrom/gb012a.htm>

よりダウンロードできます。

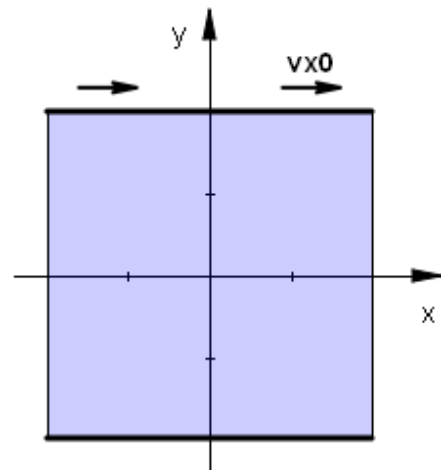
1 Case1 - 移動壁に伴う流れ

ここでは右図に示すように平行な壁面にはさまれた流体の動きについて考察します。 x 方向に向かって右側の壁は固定壁ですが、左側の壁は一定速度 v_{x0} で移動しているものとします。なお重力場の向きは z 軸方向である点に注意してください。

1m のオーダのドメイン、1mm/sec といった速度のケースで Reynolds 数

$$Re = \frac{\rho_0 v_0 L_0}{\eta}$$

として小さな値を得るため、粘性係数 η の値が非常に大きな仮想的な流体をここでは想定しています。



1.1 Problem descriptor [vfluid01a.pde]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
'Flow Due to a Moving Wall'    { vfluid01a.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。

```
SELECT
Errlim = 1e-5
```

従属変数を定義します。ポテンシャル流れの場合には一つのスカラー変数によって流れが表現できましたが、N-S 方程式を使用する場合には速度ベクトルの個々の成分（2次元の場合には v_x と v_y ）と圧力 p を従属変数とする連立偏微分方程式を解く形になります。

```
VARIABLES
vx vy p
```

関連するパラメータや数式を定義します。単位としては SI 単位系を使用します。

GB011 では $p_0 = 1e5$ といった圧力 (ambient pressure) をかけてきました。これは角の部分で圧力が負値とにならないようにするための措置であったわけですが、N-S 方程式においては p の微分項しか入ってこないため、 p_0 の指定は省略できます。ただし解の中で p の値が負となるような事態が発生した場合には適宜 ambient pressure の値を指定するようにしてください。

```
DEFINITIONS
Lx = 1.0 Ly = 1.0
vx0 = 1e-3          { Speed of moving wall }
visc = 1e4          { Viscosity ( $\eta$ ) }
dens = 1e3          { Mass density }
Re = dens*vx0*2*Ly/visc { Reynolds number }
v = vector(vx, vy)  vm = magnitude(v) { Speed }
```

資料 GB012a 中に記載されている方程式 (12), (13) を定義します。その際、従属変数との対応付けを行う必要があるので注意してください。なお、方程式 (13) 中の発散項についてはここでは省略します ($C = 0$)。

```
EQUATIONS { Tagged by dominant variable } { For vanishing Re }
vx:  dx(p) - visc*div(grad(vx)) = 0
vy:  dy(p) - visc*div(grad(vy)) = 0
p:   div(grad(p)) = 0          { Divergence term neglected }
```

BOUNDARIES セクションでは境界形状の規定と同時に境界条件を設定します。 v_x の値についてはドメイン下端で $v_x = 0$ 、ドメイン上端で $v_x = v_{x0}$ という設定を行っている点に注意してください。またドメイン左端と右端で $\text{Natural}(v_x) = 0$ という指定を行っていますが、これは

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

という条件を表しています。これに対し圧力については、流れが壁の移動によってもたらされることから、ドメイン左端と右端における圧力 p の値は 0 としてあります。一方、ドメイン上端と下端における圧力については GB012a 中の数式 (14) に基づく自然境界条件を指定しています。ただし法線ベクトルはドメインの中から外へ向う方向に取られるため、上端境界上では $n_y = 1$ 、下端境界上では $n_y = -1$ となる点に注意が必要です。

BOUNDARIES

Region 1

Start 'outer' (-Lx, Ly)

Natural(vx) = 0 Value(vy) = 0 Value(p) = 0

Line to (-Lx, -Ly) { Left }

Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = -visc*div(grad(vy))

Line to (Lx, -Ly) { Lower }

Natural(vx) = 0 Value(vy) = 0 Value(p) = 0

Line to (Lx, Ly) { Right }

Value(vx) = vx0 Value(vy) = 0 Natural(p) = visc*div(grad(vy))

Line to Close { Upper }

最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

Grid(x, y)

Elevation(vx, vy) on 'outer' Report(Re)

Contour(vx)

Contour(vy)

Contour(p)

Vector(v) norm

Contour(div(v))

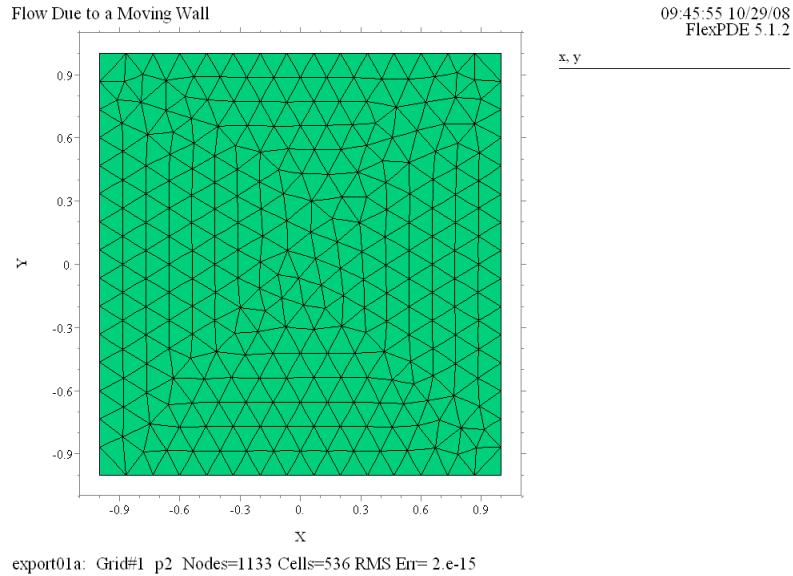
Contour(curl(v)) painted

END

1.2 実行結果

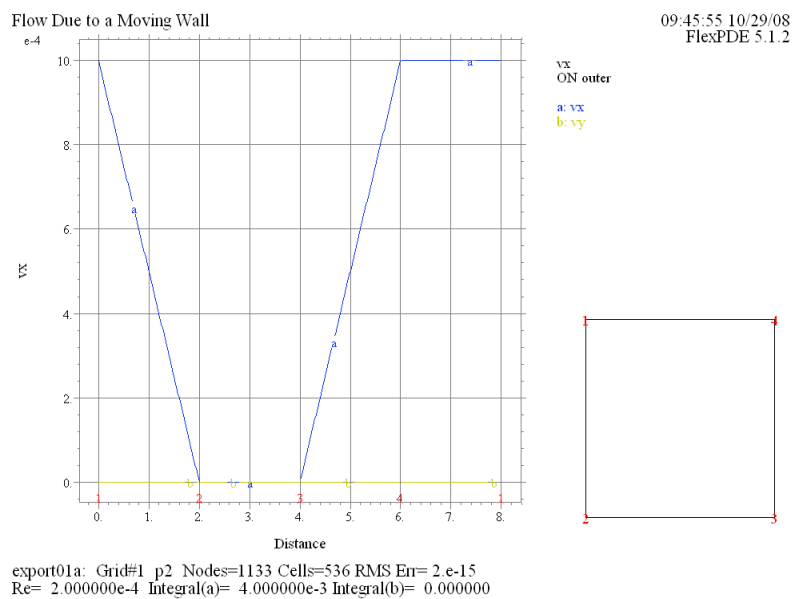
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。問題が単純であるためメッシュの再構成は行われていません。



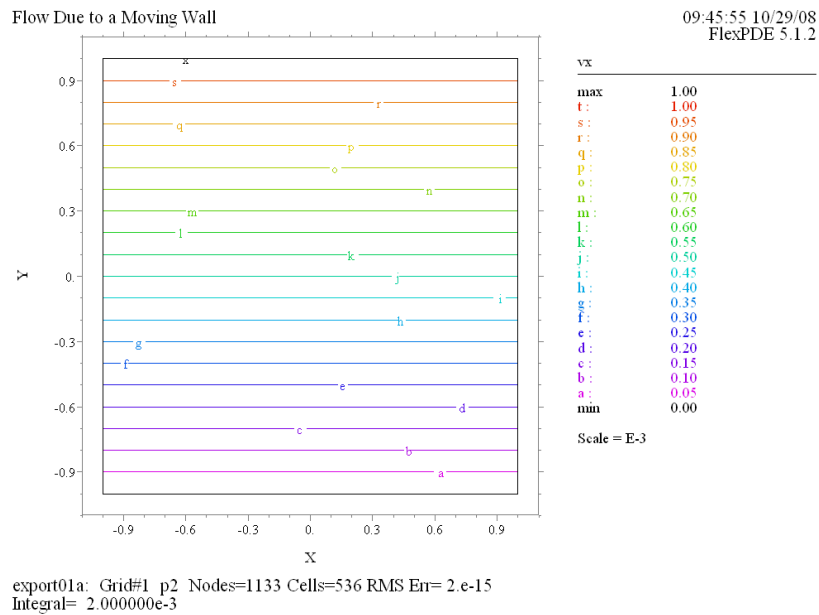
(2) Elevation(vx, vy) on 'outer' Report(Re)

v_x, v_y の値を境界上でプロットしたもので、境界条件で指定した内容が反映されていることが確認できます。なお Reynolds 数を計算していますが、 $2e-4$ という小さな値となっている点に注意してください。



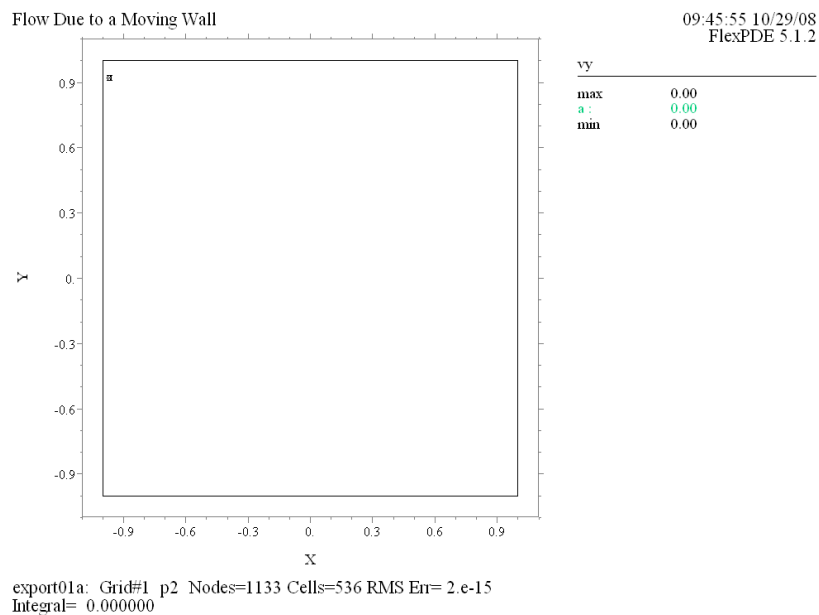
(3) Contour(vx)

x 方向の流体速度 v_x に関する等高線プロットです。ドメイン境界上端における流速 v_{x0} がリニアに減少して行き、下端では値が 0 となっていることがわかります。



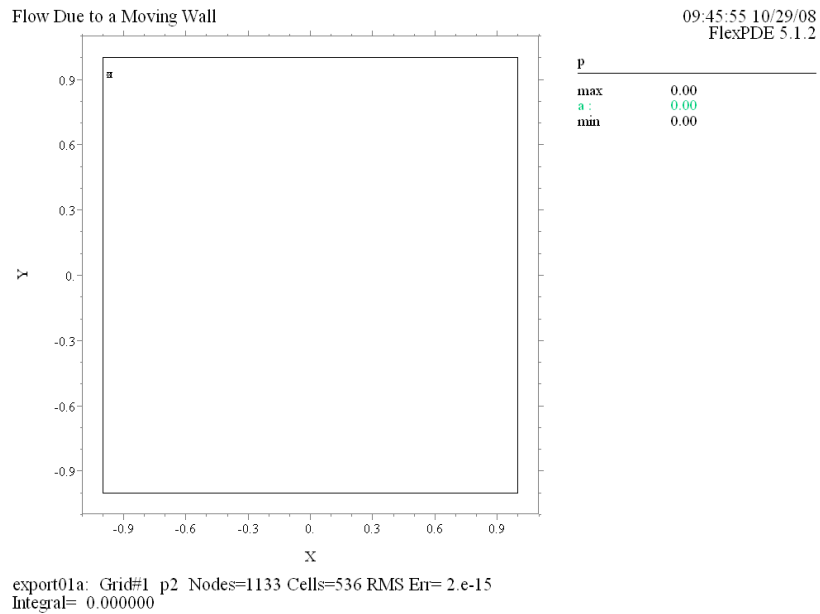
(4) Contour(vy)

y 方向の流体速度 v_y に関する等高線プロットです。ドメイン全域で $v_y = 0$ となっており、流れが x 方向の層流であることがわかります。



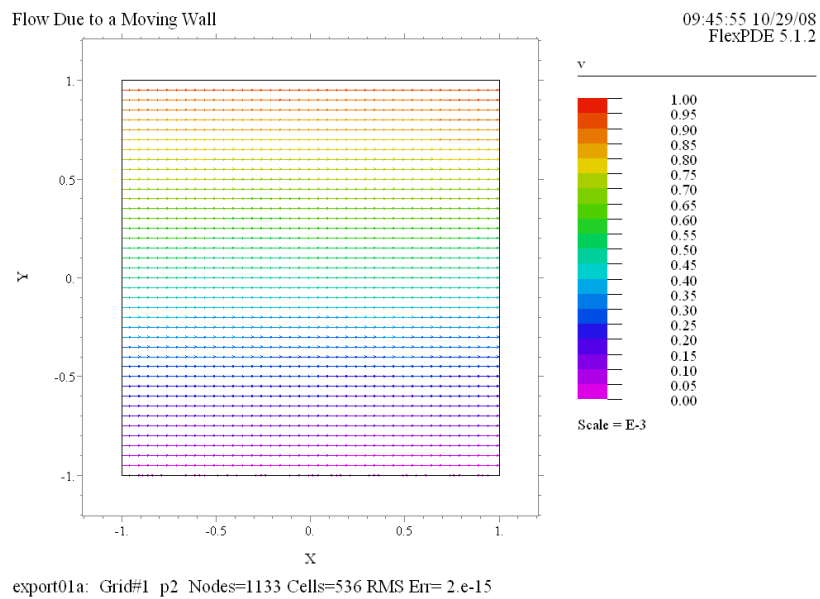
(5) Contour(p)

圧力 p に関する等高線図です。ドメイン全域で $p = 0$ という結果になっています。



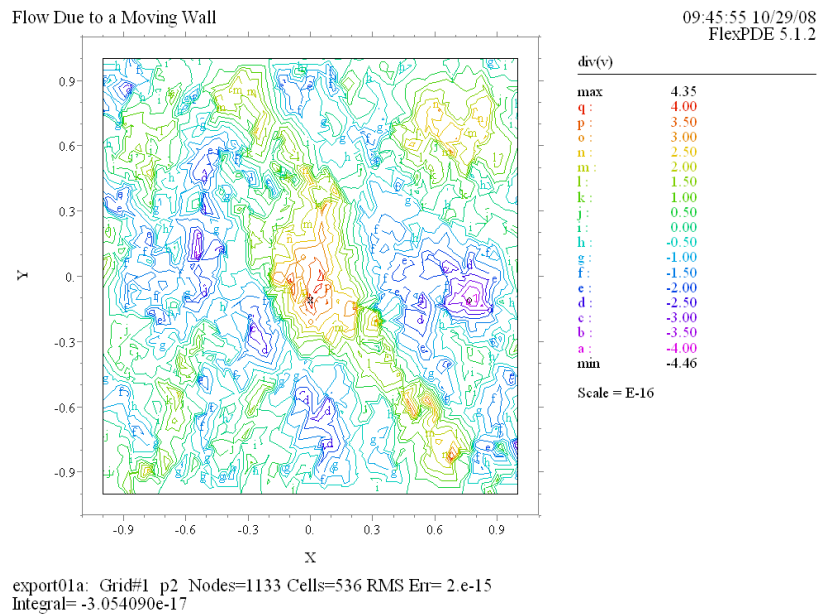
(6) Vector(v) norm

流体速度 v に関するベクトルプロットです。norm を指定しているため、速度の大きさはカラーによって表現されています。



(7) Contour($\text{div}(v)$)

$\text{div}(v)$ の値をプロットした等高線図です。Scale = E-16 という表示からもわかるように、全域で $\text{div}(v) = 0$ という条件が満足されていることがわかります。



(8) Contour(curl(v)) painted

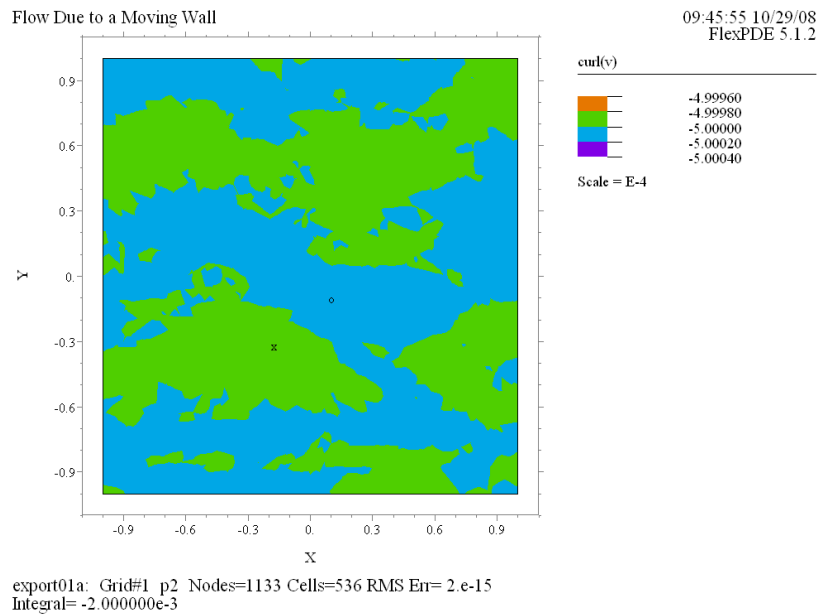
curl(v) の値をプロットしたもので、ドメイン全域で $-5e-4$ という一定値となっていることがわかります。回転の定義式

$$\text{curl}(\mathbf{v})_z = (\nabla \times \mathbf{v})_z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

をドメイン境界上に適用して得られる値

$$\frac{0 - v_{x0} \cdot 2L_x}{2L_x \cdot 2L_y} = -\frac{v_{x0}}{2} = -5e-4$$

と矛盾しない点に注意してください。



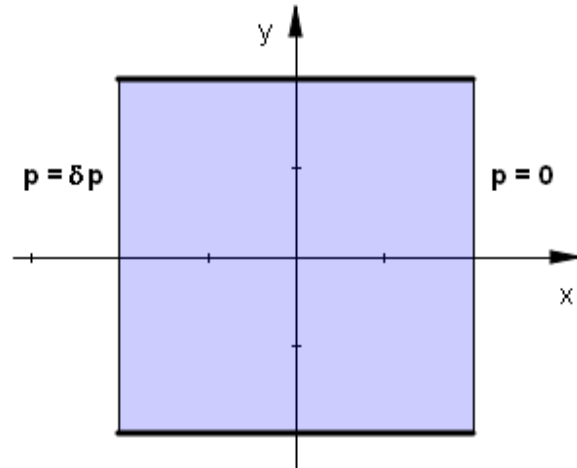
2 Case2 - 圧力による流れ

今度は圧力によって流れが生ずるケースについて考察することにします。チャンネルの形状は Case1 の場合と同一ですが、入口側の圧力を $p = \delta p$ 、出口側の圧力を $p = 0$ と設定することにします。

この単純な問題に関しては次のような解析解が知られています。

$$\begin{cases} v_x = \frac{\delta p}{2\eta l} (w^2 - y^2) \\ v_y = 0 \end{cases}$$

ここに l はチャンネル長を、 $2w$ はチャンネル幅を意味します。FlexPDE による計算結果をこの厳密解と比較するコードも以下のスクリーンショット中には含めてあります。



2.1 Problem descriptor [vfluid01b.pde]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
  'Pressure-Driven Flow through a Channel'    { vfluid01b.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。

```
SELECT
  Errlim = 1e-5
```

従属変数の設定は基本的には Case1 の場合と同一ですが、 v_y に対しては Threshold というクローズを設けています。FlexPDE の演算ロジックは Errlim で指定された相対誤差精度を達成すべく機能しますが、たまたまこの問題では $v_y = 0$ が解となるため相対誤差の判定が有効に機能せず、メッシュ生成が際限なく繰返されるという問題が発生します。Threshold クローズによる絶対誤差の明示はこの問題を回避するための措置と言えます。

```
VARIABLES
  vx
  vy(Threshold = 1e-5)
  p
```

関連するパラメータや数式を定義します。単位としては SI 単位系を使用します。

Case1 では Reynolds 数の計算 (資料 GB012a 中の数式 (5)) に v_{x0} という定数値を用いることができましたが、本ケースではそれが利用できないため、演算結果の中から v_x の最大値を抽出 (globalmax)、その値を用いて Reynolds 数を算出するというアプローチを取ります。

DEFINITIONS

```
Lx = 1.0 Ly = 1.0
visc = 1e4 { Viscosity }
delp = 100 { Driving pressure }
vx.ex = delp/(2*Lx)/(2*visc)*(Ly^2 - y^2) { Exact solution }
dens = 1e3 { Mass density }
Re = dens*globalmax(vx)*2*Ly/visc { Reynolds number }
v = vector(vx, vy) vm = magnitude(v) { Speed }
```

資料 GB012a 中に記載されている方程式 (12), (13) を定義します。なお、方程式 (13) 中の発散項については Case1 の場合と同様省略します ($C = 0$)。

```
EQUATIONS { Tagged by dominant variable } { For vanishing Re }
vx: dx(p) - visc*div(grad(vx)) = 0
vy: dy(p) - visc*div(grad(vy)) = 0
p: div(grad(p)) = 0 { Divergence term neglected }
```

BOUNDARIES セクションでは境界形状の規定と同時に境界条件を設定します。入口側では $p = \delta p$ 、出口側では $p = 0$ という指定を行っています。入口、出口部における $\text{Natural}(v_x) = 0$ という指定は

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

を意味しています。またドメイン上端、下端における $\text{Natural}(p)$ の指定は資料 GB012a 中の数式 (14) に基づくものです。

BOUNDARIES

```
Region 1
Start 'outer' (-Lx, Ly)
Natural(vx) = 0 Value(vy) = 0 Value(p) = delp
Line to (-Lx, -Ly) { In }
Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = -visc*div(grad(vy))
Line to (Lx, -Ly) { Lower }
Natural(vx) = 0 Value(vy) = 0 Value(p) = 0
Line to (Lx, Ly) { Out }
Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = visc*div(grad(vy))
Line to Close { Upper }
```

最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

```

Grid(x, y)
Elevation(vx, vy) on 'outer' Report(Re)
Contour(vx)
Contour(vx - vx_ex) Report(globalmax(vx))
Contour(vy)
Contour(p)
Vector(v) norm
Contour(div(v))
Contour(curl(v)) painted

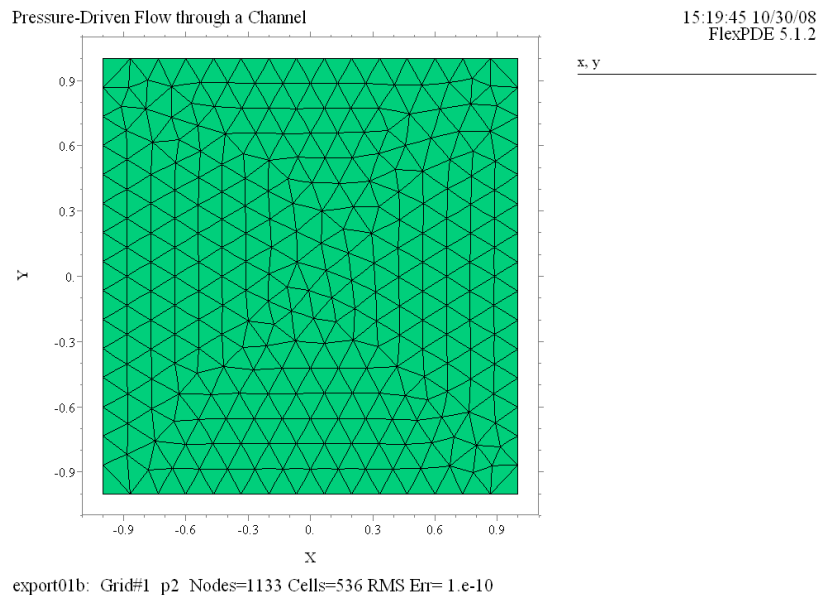
```

END

2.2 実行結果

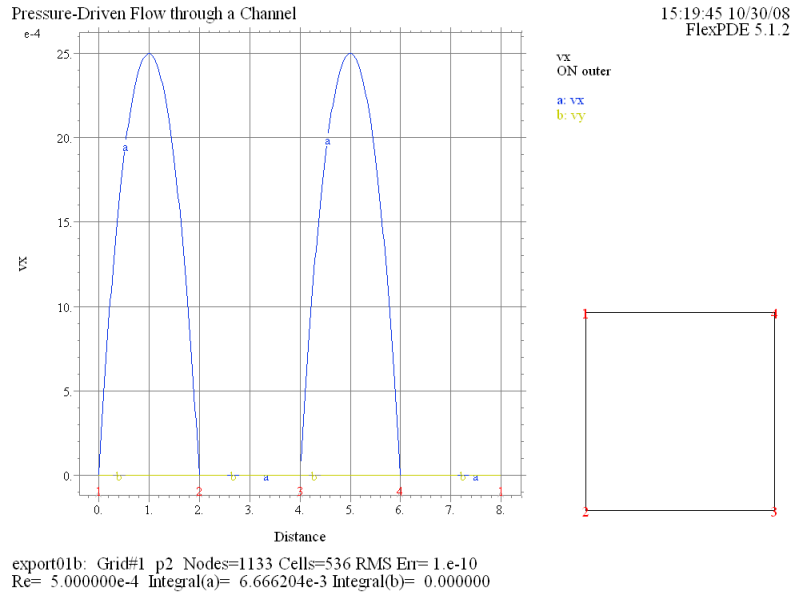
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。問題が単純であるためメッシュの再構成は行われていません。



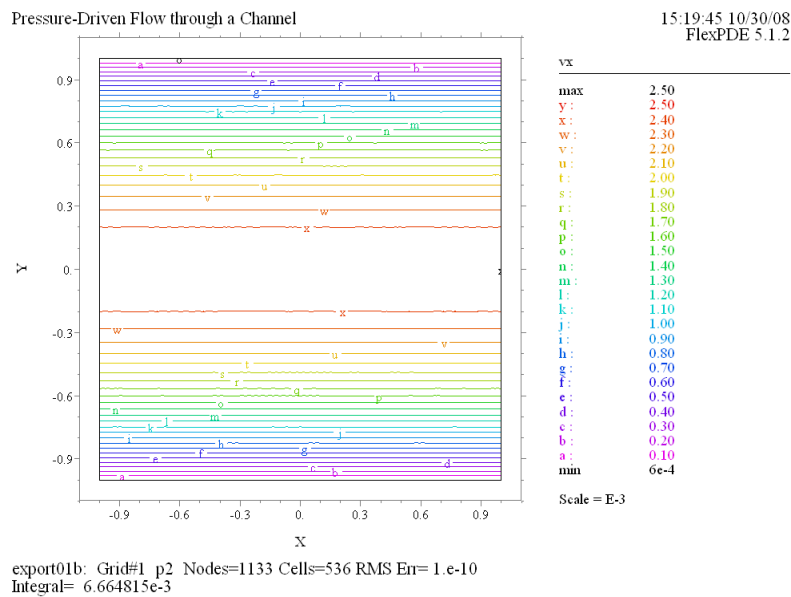
(2) Elevation(vx, vy) on 'outer' Report(Re)

v_x, v_y の値を境界上でプロットしたものです。 v_x の値はチャンネル壁に接している部分で 0、チャンネル中央部で最大となっています。変化の形状は放物線状ですが、これは厳密解の数式に符合しています。一方、 v_y の値は境界上で一律 0 です。なお Reynolds 数は $5e-4$ という小さな値であることが確認できます。



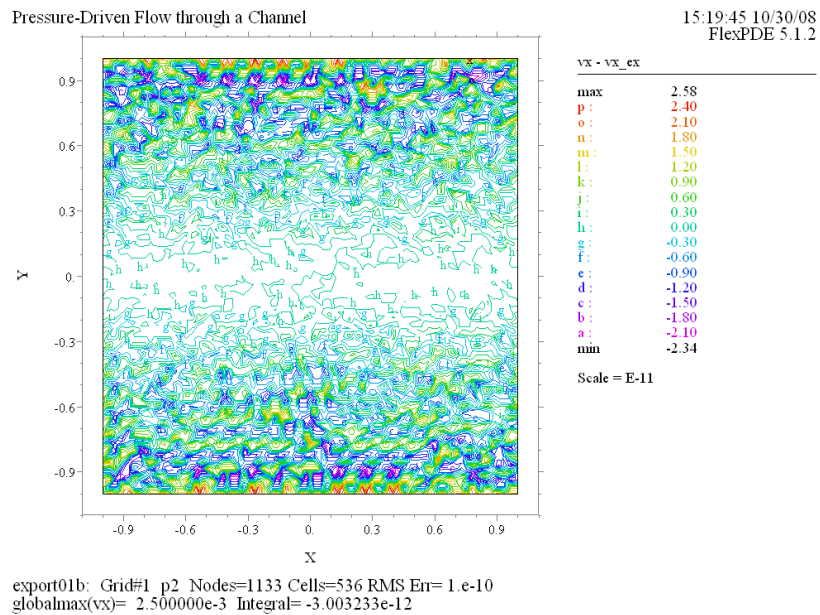
(3) Contour(vx)

x 方向の流速 v_x に関する等高線図です。チャンネル壁に接している部分で 0、チャンネル中央部で最大となっていることがわかります。



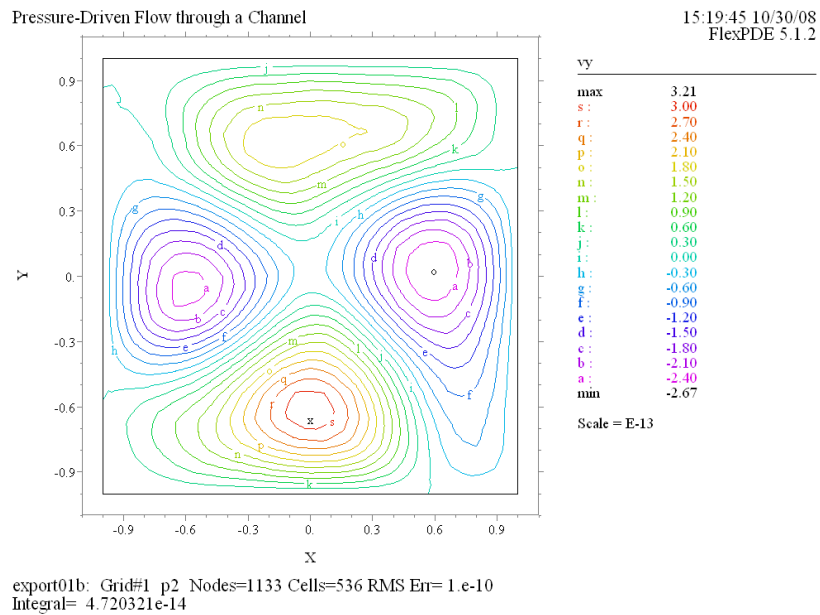
(4) Contour(vx - vx_ex) Report(globalmax(vx))

FlexPDE が算出した v_x の値を理論値と比較したものです。Scale = E-11 という表示に見られるように厳密解との良い一致が見られます。なお v_x の最大値は $2.5e-3$ である点に注意してください。



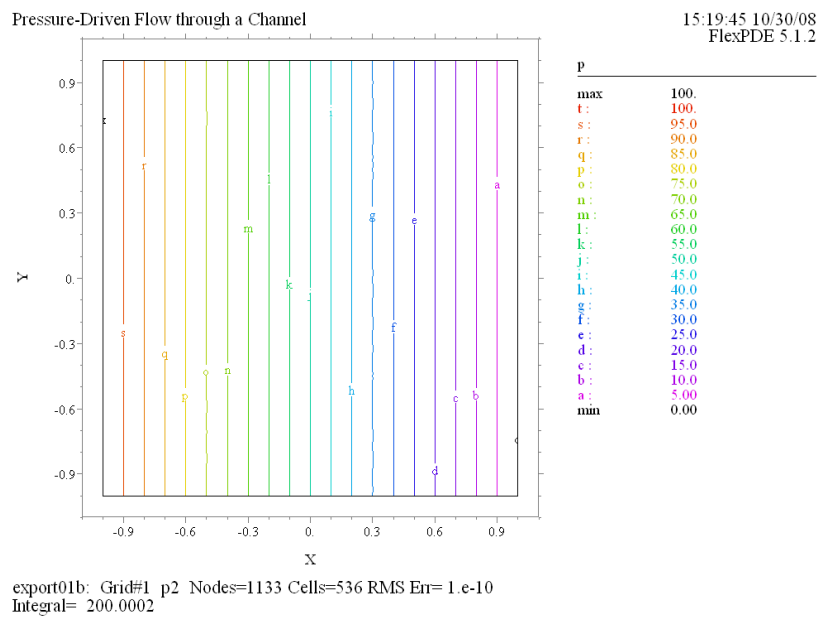
(5) Contour(vy)

y 方向の流速 v_y が全域でほぼ 0 であることが示されています。



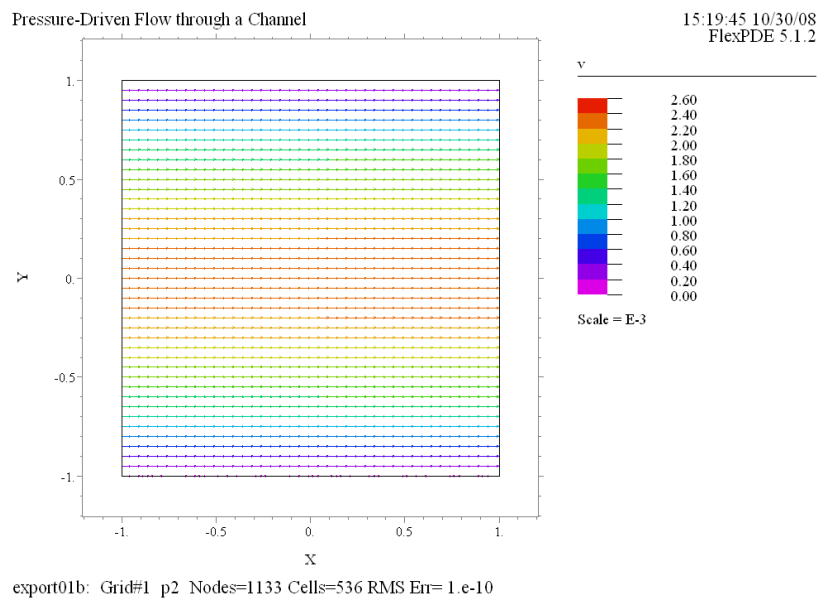
(6) Contour(p)

圧力 p の値をプロットした等高線図です。ドメイン左端で 100、右端で 0、その間リニアに減少していることがわかります。



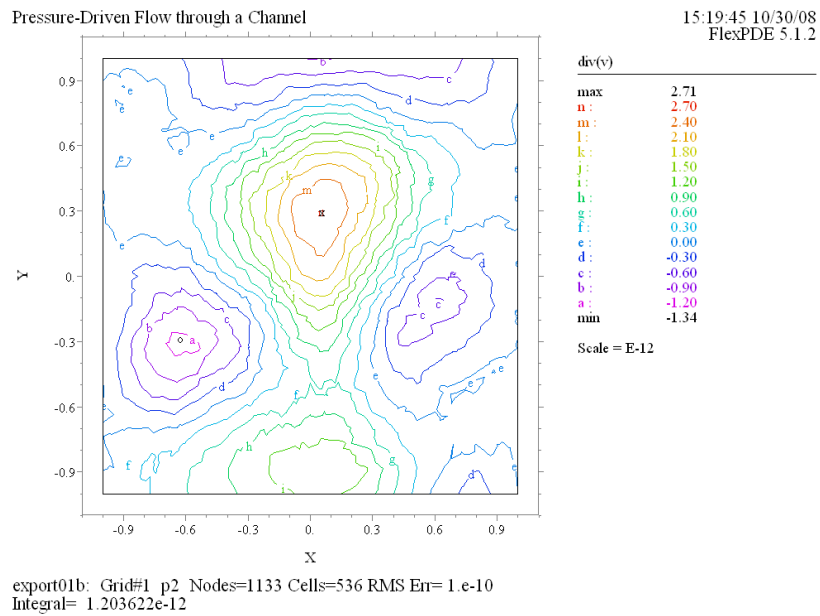
(7) Vector(v) norm

流体速度 v に関するベクトルプロットです。norm を指定しているため、速度の大きさはカラーによって表現されています。チャンネル壁に平行な層流が示されています。

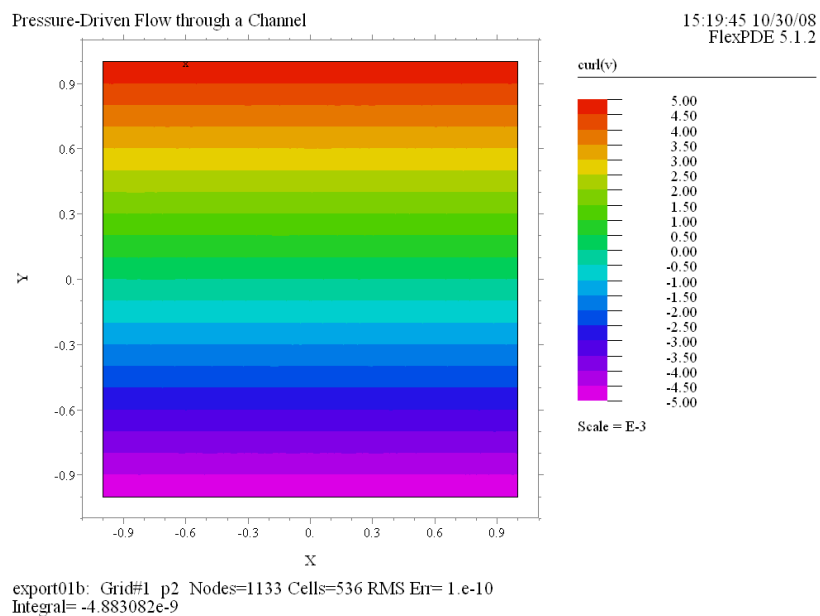


(8) Contour($\text{div}(v)$)

$\text{div}(v)$ の値がドメイン全域で 0 となっていることがわかります。

(9) Contour($\text{curl}(v)$) painted

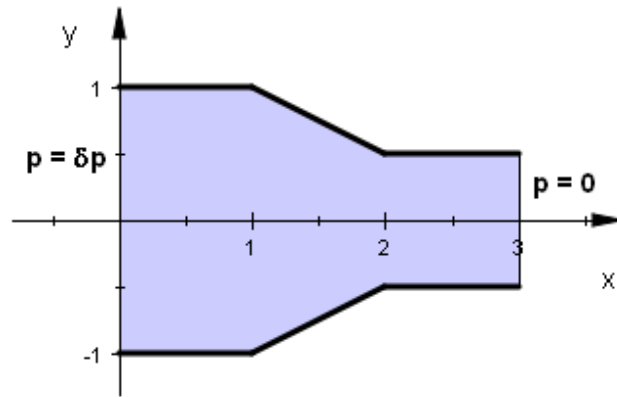
$\text{curl}(v)$ の値に関する等高線図です。単純な層流ですが、チャンネル中央部以外では回転の値が 0 でない点に注意してください。



3 Case3 - くびれのあるチャンネルにおける流れ [1]

これは GB011 で扱った問題とほぼ同一の問題設定ではありますが、粘性の影響を考慮した方程式を使用する点が本質的に異なります。

ただし最初に発散項を含まない形 ($C = 0$, 資料 GB012a 中の数式 (13) 参照) での求解を試みます。結果的に誤った解が誘導されてしまう点に注意してください。



3.1 Problem descriptor [vfluid01c.pde]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
  'Viscous Flow through a Constricted Channel' { vfluid01c.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。

```
SELECT
  Errlim = 1e-4
```

従属変数を規定します。

```
VARIABLES
  vx vy p
```

関連するパラメータや数式を定義します。単位としては SI 単位系を使用します。

ここで任意境界面上における外向き単位法線ベクトルを n としたとき、その x 成分、 y 成分である n_x, n_y の算出方法について触れておきます。 n の偏角を θ とすると

$$n = (n_x, n_y) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

一方、 x 方向、 y 方向の単位ベクトルを e_x, e_y としたとき、これらに normal 演算子を施すことによって各々の n 方向の成分を求められるわけですが、

$$\text{normal}(e_x) = \cos \theta \quad \text{normal}(e_y) = \sin \theta$$

という関係式が成り立ちます。従って n_x, n_y は

$$n_x = \text{normal}(e_x) \quad n_y = \text{normal}(e_y)$$

のように算出できることがわかります。

DEFINITIONS

```

Lx = 1.0 Ly = 1.0
coef = 0.5           { Constriction coefficient }
visc = 1e4           { Viscosity }
delp = 100           { Driving pressure }
dens = 1e3           { Mass density }
Re = dens*globalmax(vx)*2*Ly/visc { Reynolds number }
v = vector(vx, vy)  vm = magnitude(v) { Speed }
unit_x = vector(1, 0) { Unit vector fields }
unit_y = vector(0, 1)
nx = normal(unit_x) { Direction cosines }
ny = normal(unit_y)
natp = visc*(nx*div(grad(vx)) + ny*div(grad(vy)))
{ Natural boundary condition for p }

```

資料 GB012a 中に記載されている方程式 (12), (13) を定義します。なお、方程式 (13) 中の発散項については取り敢えず無視して ($C = 0$) 計算を行ってみます。

EQUATIONS

```

vx: dx(p) - visc*div(grad(vx)) = 0
vy: dy(p) - visc*div(grad(vy)) = 0
p: div(grad(p)) = 0

```

BOUNDARIES セクションでは境界形状の規定と同時に境界条件を設定します。入口側では $p = \delta p$, 出口側では $p = 0$ という指定を行っています。入口、出口部における $\text{Natural}(vx) = 0$ という指定は

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

を意味しています。またドメイン上端、下端における $\text{Natural}(p)$ の指定は資料 GB012a 中の数式 (14) に基づくものです。

BOUNDARIES

```

Region 1
Start 'outer' (0, Ly)
Natural(vx) = 0 Value(vy) = 0 Value(p) = delp { In }
Line to (0, -Ly)
Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = natp { Lower }
Line to (Lx, -Ly) to (2*Lx, -Ly*coef) to (3*Lx, -Ly*coef)
Natural(vx) = 0 Value(vy) = 0 Value(p) = 0 { Out }
Line to (3*Lx, Ly*coef)
Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = natp { Upper }
Line to (2*Lx, Ly*coef) to (Lx, Ly) to Close

```

最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

```

Grid(x, y)
Elevation(nx, ny) on 'outer' as 'direction cosines'
Contour(vx) Report(Re)
Contour(vy)
Vector(v) norm
Contour(p)
Contour(div(v)) painted
Contour(curl(v)) painted
Elevation(vx) from (0.5*Lx, -Ly) to (0.5*Lx, Ly)
Elevation(vx) from (2.5*Lx, -Ly*coef) to (2.5*Lx, Ly*coef)

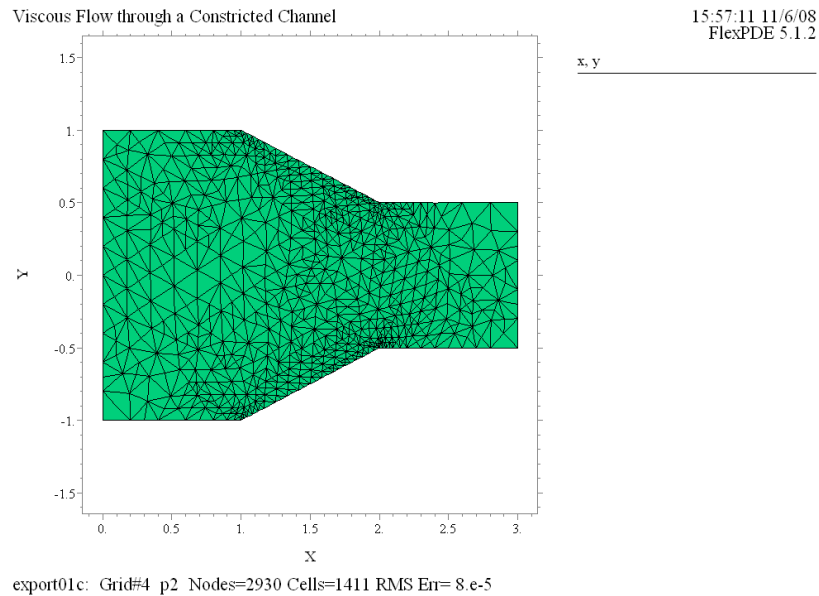
```

END

3.2 実行結果

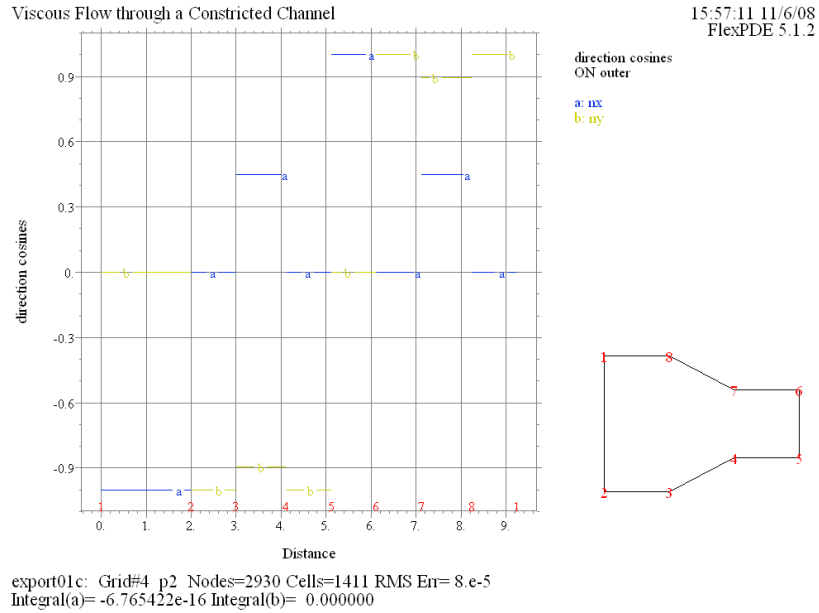
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュの再構成が3回行われているため計算には10秒前後を要しますが、一応所定の演算精度を持つ解に到達することができます。



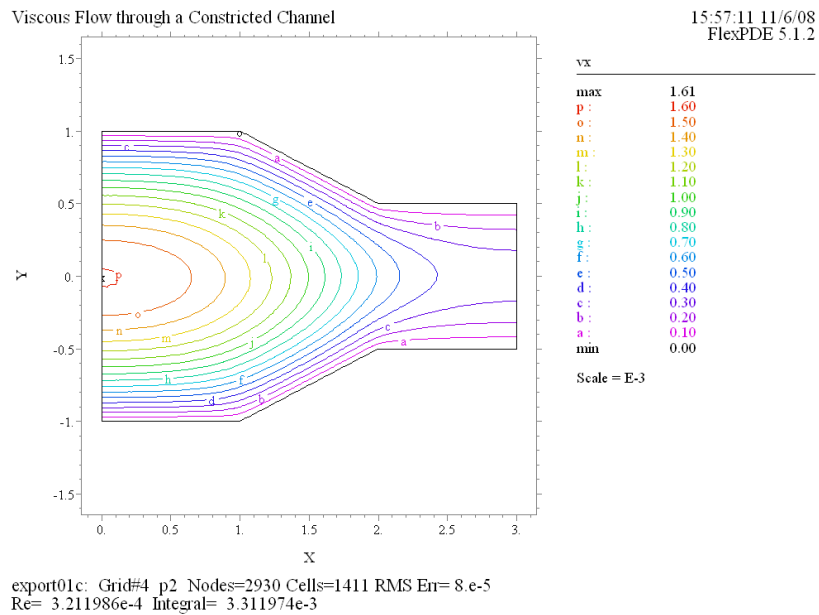
(2) Elevation(n_x, n_y) on 'outer' as 'direction cosines'

境界に沿って n_x, n_y の値がどう変化するかをプロットしたものです。



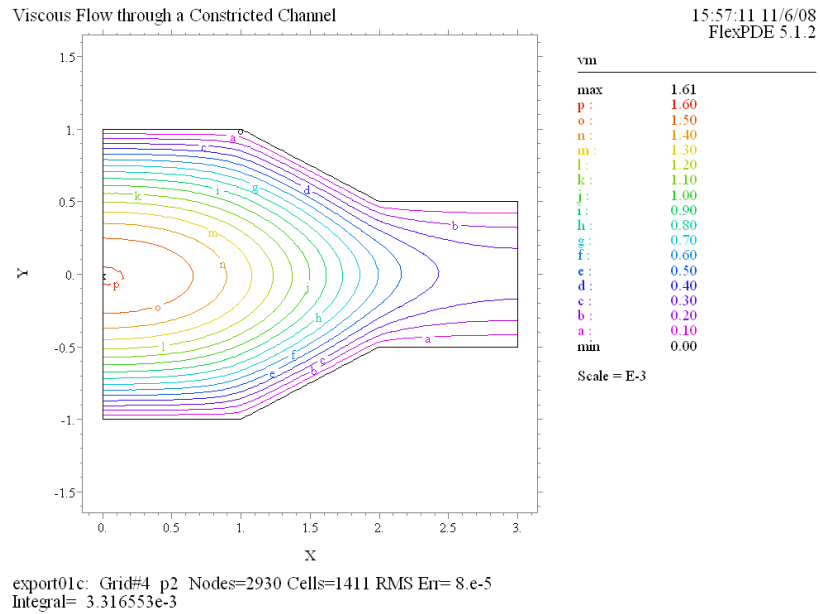
(3) Contour(v_x) Report (Re)

x 方向の流速 v_x に関する等高線図です。出口側での流速が入口側よりも小さいという奇異な結果になっている点に注意してください。



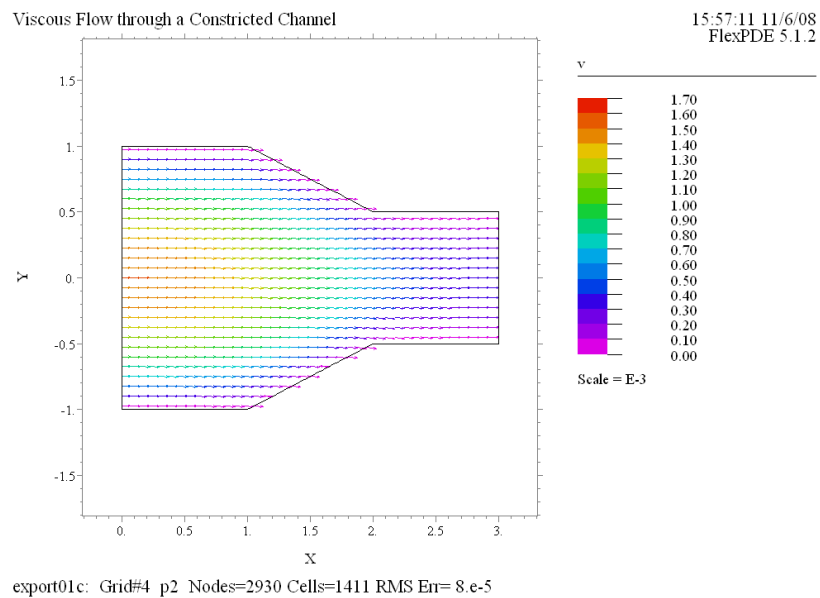
(4) Contour (vm)

流速ベクトル v の絶対値に関する等高線図です。実質プロット (3) と変わりません。



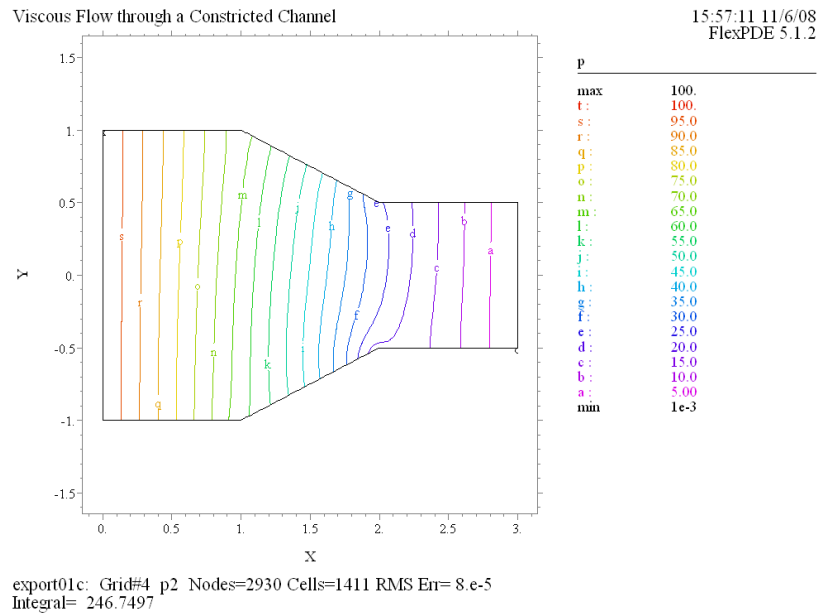
(5) Vector (v) norm

流速 v のベクトルプロットです。



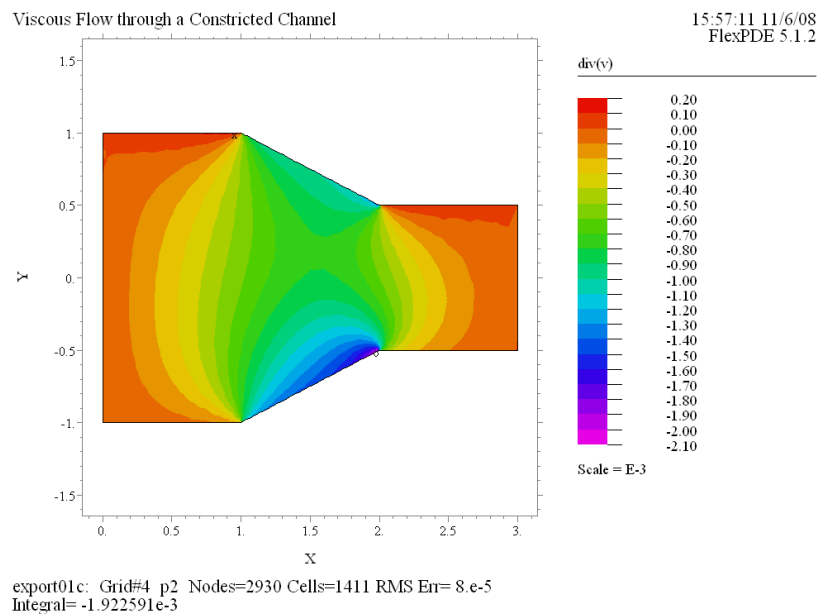
(6) Contour(p)

圧力 p の値をプロットした等高線図です。



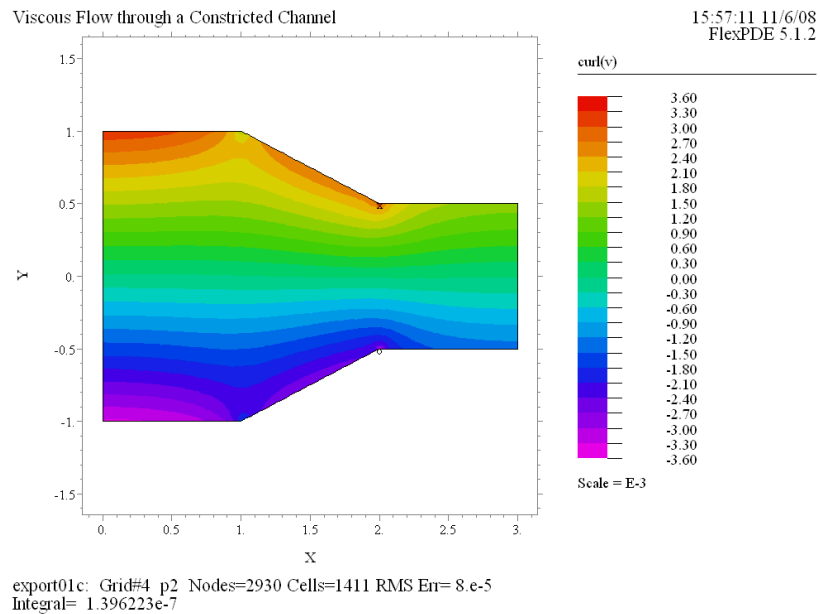
(7) Contour(div(v)) painted

$\text{div}(v)$ の値をプロットしたものです。非圧縮性の定常流の場合、これは全域で 0 でなくてはならないはずで
す。ここで得られた解が連続の式に違反していることがわかります。

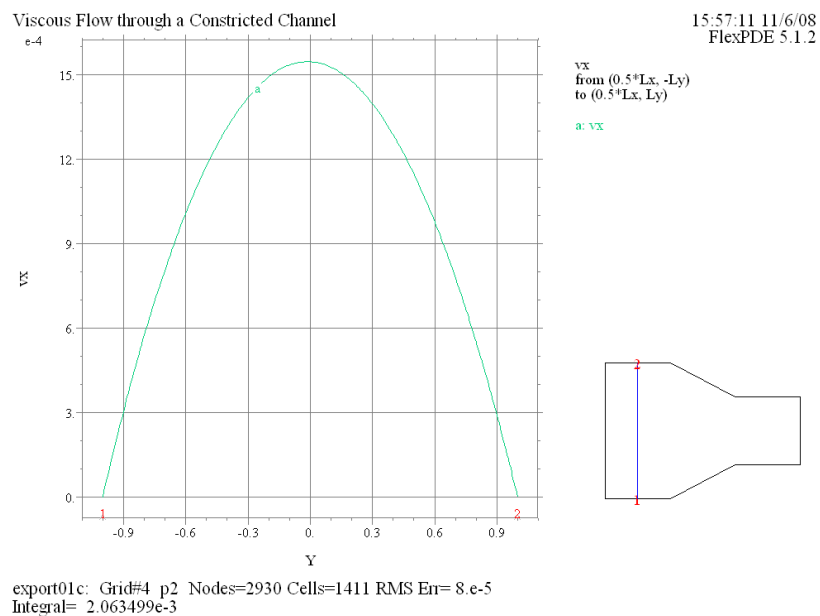


(8) Contour(curl(v)) painted

curl(v) の値に関する等高線図です。

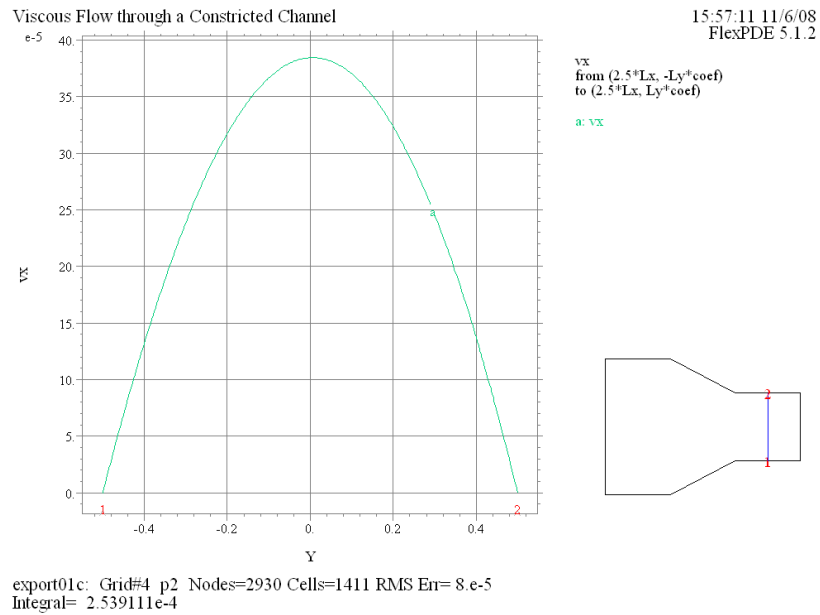
(9) Elevation(v_x) from $(0.5 \cdot L_x, -L_y)$ to $(0.5 \cdot L_x, L_y)$

チャンネル幅が広い部分における v_x の elevation プロットです。下部に示されている積分値 $2.06e-3$ に注意してください。これはこの断面を単位時間に通過した流量に対応する数値です。



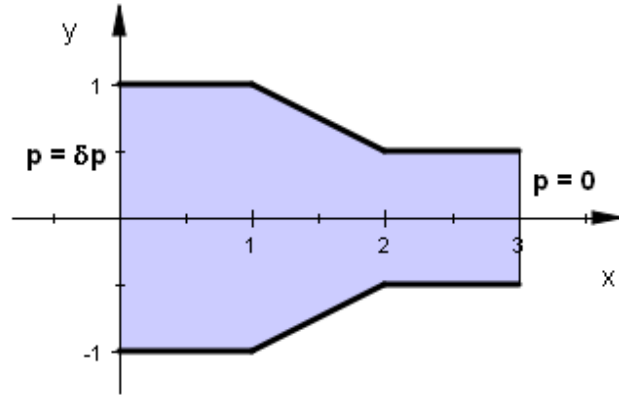
(10) Elevation(v_x) from $(2.5*Lx, -Ly*coef)$ to $(2.5*Lx, Ly*coef)$

チャンネル幅が半分になった部分における v_x の elevation プロットです。下部に示されている積分値 $2.54e-4$ はプロット (9) の結果と明らかに異なっており、質量保存則（連続の式）が満たされていない解であることがこれからもわかります。



4 Case4 - くびれのあるチャンネルにおける流れ [2]

Case3 と全く同じ問題ですが、今回は $\text{div}(v)$ が 0 となるような解を誘導すべく、数式 (13)(資料 GB012a 参照)中におけるパラメータ C に 0 以外の値をセットして計算を行わせます。ただし C に対する適正値を見出すためには少々試行錯誤が必要となります。



4.1 Problem descriptor [vfluid01d.pde]

Case3 のスクリプト vfluid01c.pde に対する変分のみを記すことにします。

TITLE

```
'Constricted Channel with Divergence Term' { vfluid01d.pde }
```

方程式を定義します。変更が加わるのは第 3 式のみです。ここでは発散項に対して $C = 1e3$ という重みをかけています。

EQUATIONS

```
vx: dx(p) - visc*div(grad(vx)) = 0
vy: dy(p) - visc*div(grad(vy)) = 0
p: div(grad(p)) - 1e3*visc/Ly^2*div(v) = 0
```

PLOTS セクションに対しては次の変更を加えます。最後の 1 文は追加です。

PLOTS

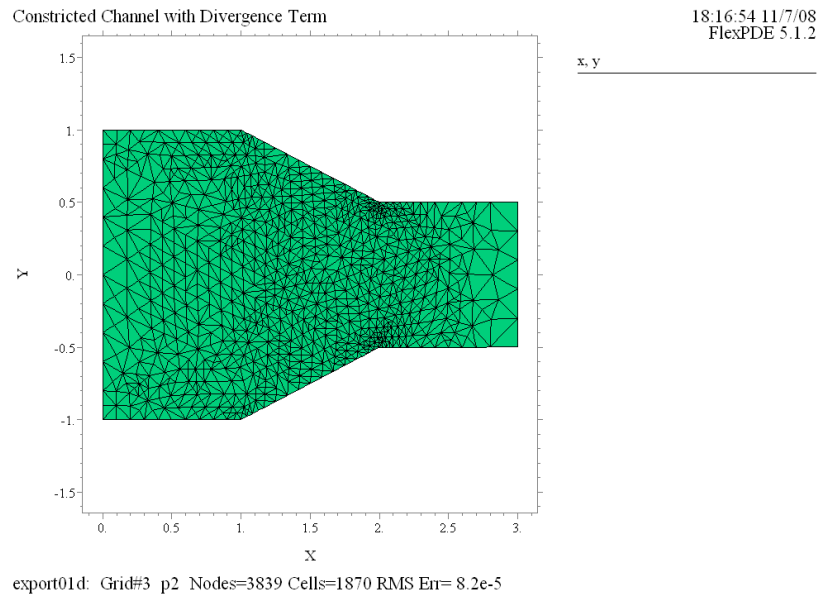
```
...
Contour(div(v))
...
Elevation(natp) on 'outer'
```

END

4.2 実行結果

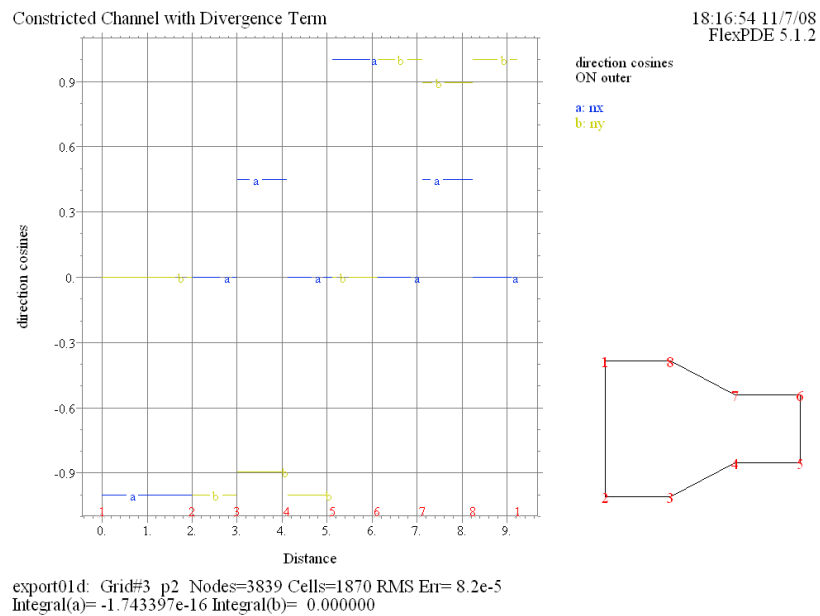
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュの再構成は2回で済んでいます。



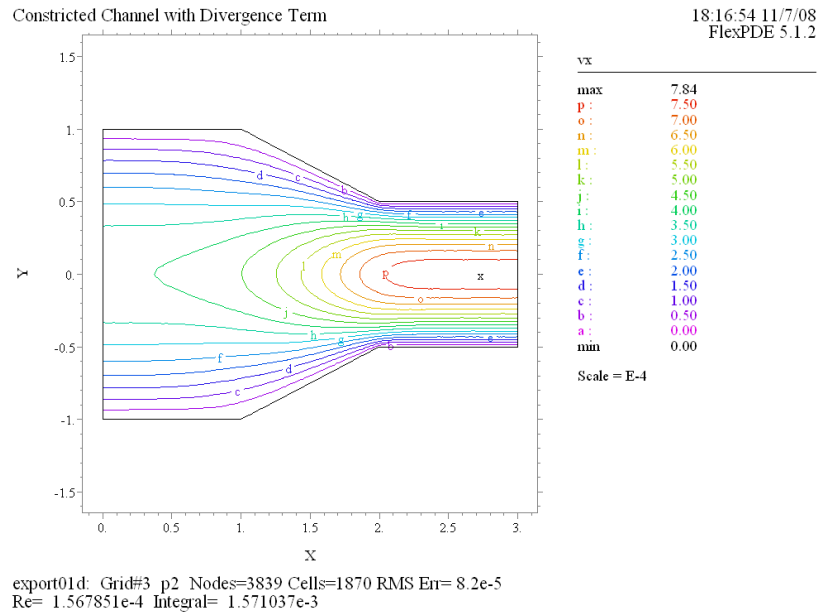
(2) Elevation(n_x , n_y) on 'outer' as 'direction cosines'

境界に沿って n_x, n_y の値がどう変化するかをプロットしたものです。



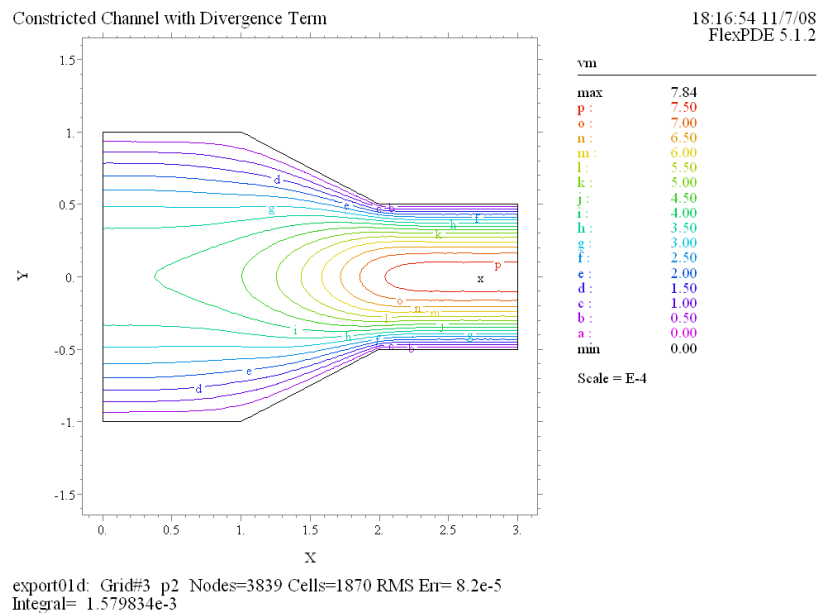
(3) Contour(vx) Report (Re)

x 方向の流速 v_x に関する等高線図です。チャンネル中央部における流速を見た場合、出口側での流速は入口側でのその約 2 倍となっていることがわかります。また Reynolds 数は $1.57e-4$ という小さな値であることがレポートされています。



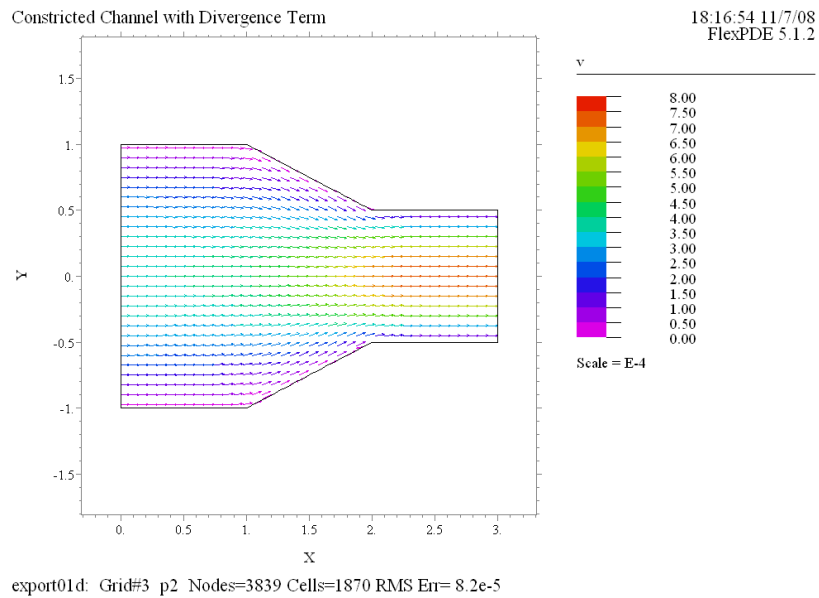
(4) Contour(vm)

流速ベクトル v の絶対値に関する等高線図です。実質プロット (3) と変わりません。



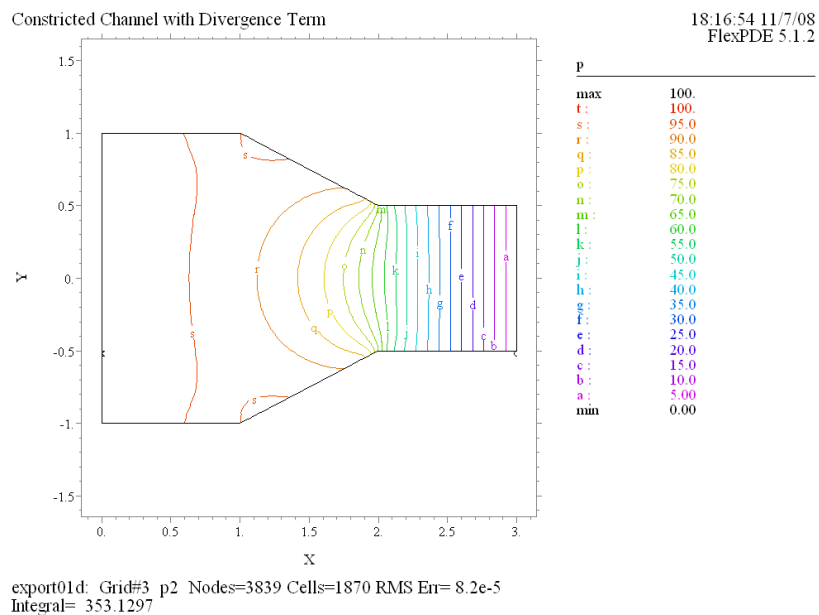
(5) Vector(v) norm

流速 v のベクトルプロットです。チャンネル境界の近傍でベクトルが壁面に平行となっている点も改善点の一つです。



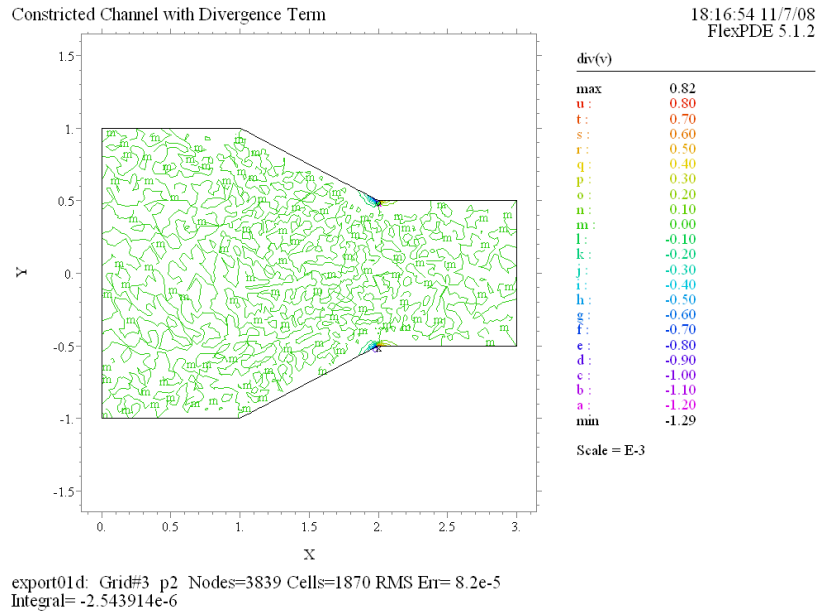
(6) Contour(p)

圧力 p の値をプロットした等高線図です。曲線の形状がチャンネルの中心線を軸に上下対称となっている点も改善点の一つです。

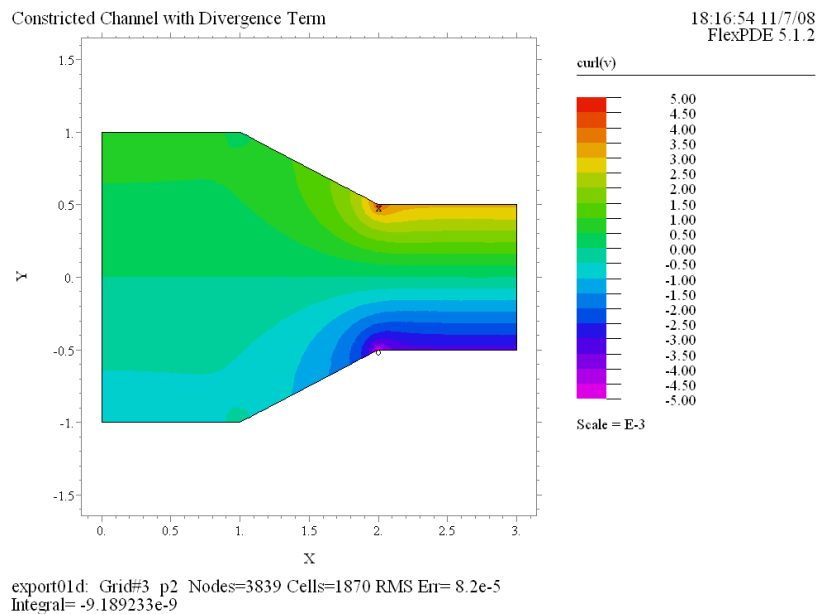


(7) Contour($\text{div}(v)$)

$\text{div}(v)$ の値をプロットしたものです。全域でほぼ 0 となっており、物理法則にかなった解であることが確認できます。

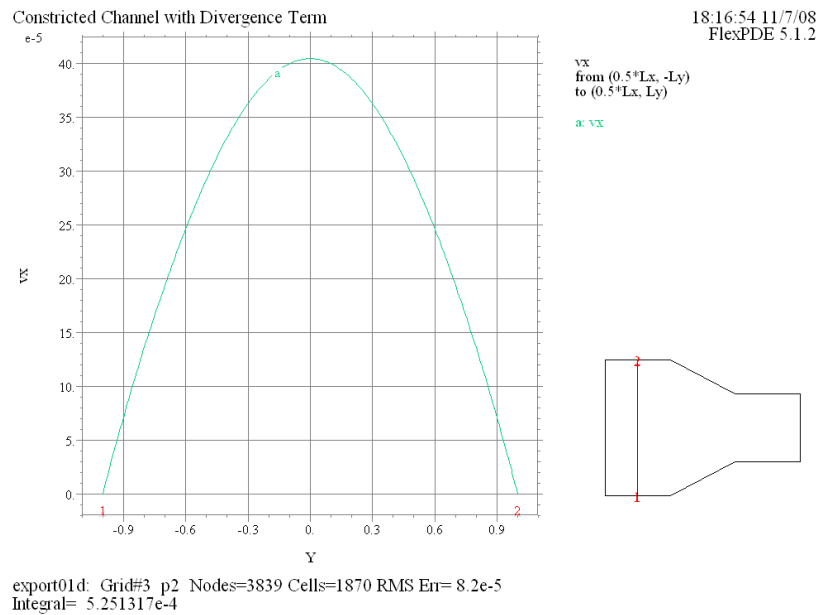
(8) Contour($\text{curl}(v)$) painted

$\text{curl}(v)$ の値に関する等高線図です。

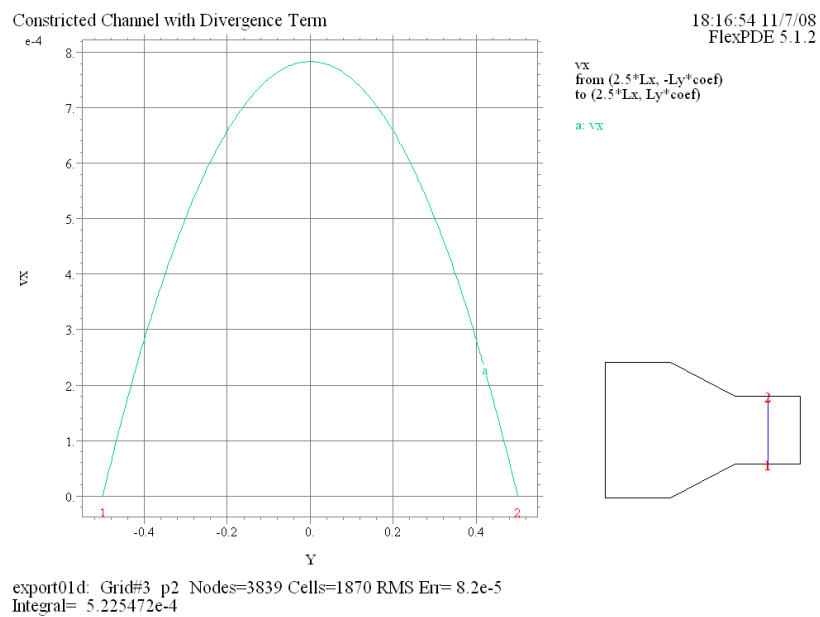


(9) Elevation(v_x) from $(0.5*Lx, -Ly)$ to $(0.5*Lx, Ly)$

チャンネル幅が広い部分における v_x の elevation プロットです。下部に示されている積分値 $5.25e-4$ に注意してください。これはこの断面を単位時間に通過した流量に対応する数値です。

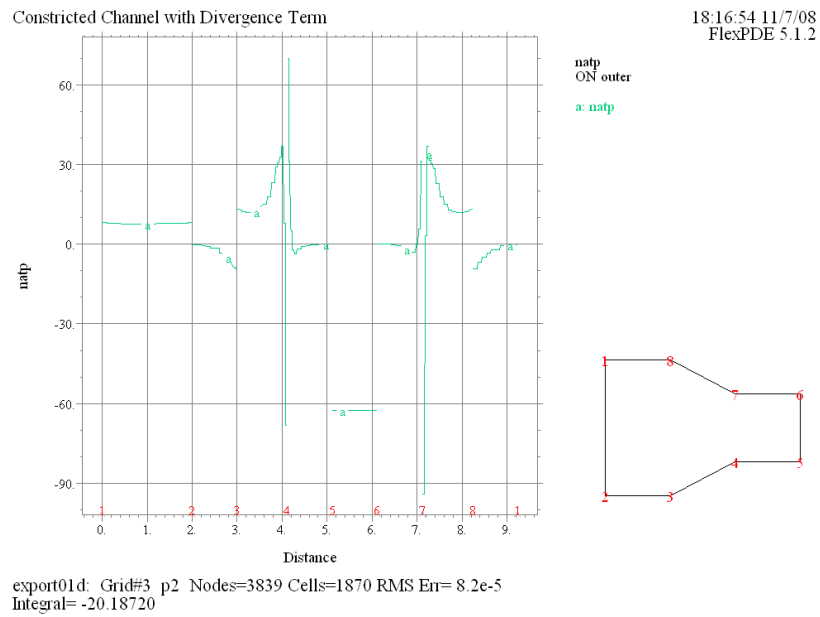
(10) Elevation(v_x) from $(2.5*Lx, -Ly*coef)$ to $(2.5*Lx, Ly*coef)$

チャンネル幅が半分になった部分における v_x の elevation プロットです。下部に示されている積分値 $5.23e-4$ はプロット (9) の結果と良く一致しています。



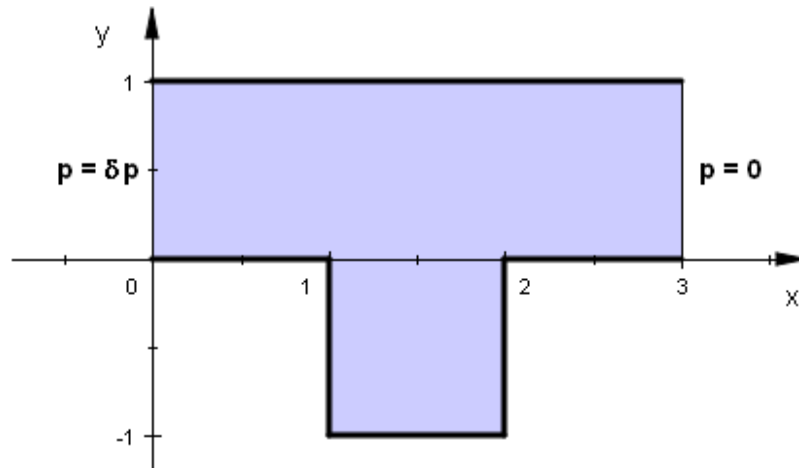
(11) Elevation(natp) on 'outer'

境界上で $\frac{\partial p}{\partial n}$ の値をプロットしたものです。関数式 natp には 2 階の微分項が含まれているためグラフは階段状の形状を呈しています。



5 Case5 - 側溝のあるチャンネルにおける流れ

今度はチャンネル右岸に矩形の凸部がある場合の流れについて解析してみます。基本的には Case4 のスクリプトを踏襲します。C の値としてはここでも $1e3$ を用いることにします。



5.1 Problem descriptor [vfluid01e.pde]

まずタイトルを設定します。まずタイトルを設定します。

```
TITLE
'Channel with a Lateral Cavity'    { vfluid01e.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。Errlim = $1e-3$ という設定では解への収束が見られないため、若干演算精度を落として計算を実行します。

```
SELECT
Errlim = 3*1e-3
```

従属変数を定義します。

```
VARIABLES
vx
vy
p
```

関連するパラメータや数式を定義します。 n_x, n_y の算出式については Case3 を参照ください。

DEFINITIONS

```

Lx = 1.0 Ly = 1.0
visc = 0.1                { Viscosity }
delp = 1e-6              { Driving pressure }
dens = 1e3               { Mass density }
Re = dens*globalmax(vx)*2*Ly/visc    { Reynolds number }
v = vector(vx, vy)  vm = magnitude(v) { Speed }
unit_x = vector(1, 0)    { Unit vector fields }
unit_y = vector(0, 1)
nx = normal(unit_x)     { Direction cosines }
ny = normal(unit_y)
natp = visc*(nx*div(grad(vx)) + ny*div(grad(vy)))
                                { Natural boundary condition for p }

C = 1e3

```

方程式を定義します。

EQUATIONS

```

vx:  dx(p) - visc*div(grad(vx)) = 0
vy:  dy(p) - visc*div(grad(vy)) = 0
p:   div(grad(p)) - C*visc/Ly^2*div(v) = 0

```

BOUNDARIES セクションでは境界形状の規定と同時に境界条件を設定します。

BOUNDARIES

```

Region 1
Start 'outer' (0, Ly)
Natural(vx) = 0 Value(vy) = 0 Value(p) = delp    { In }
Line to (0, 0)
Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = natp    { Lower }
Line to (Lx, 0) to (Lx, -Ly) to (2*Lx, -Ly)
to (2*Lx, 0) to (3*Lx, 0)
Natural(vx) = 0 Value(p) = 0                      { Out }
Line to (3*Lx, Ly)
Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = natp    { Upper }
Line to Close

```


最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

```

Grid(x, y)
Vector(v) norm Report(Re)
Contour(vm)
Vector(v) norm zoom(Lx, -Ly, Lx, Ly)
Contour(p)
Contour(div(v))
Contour(curl(v)) painted

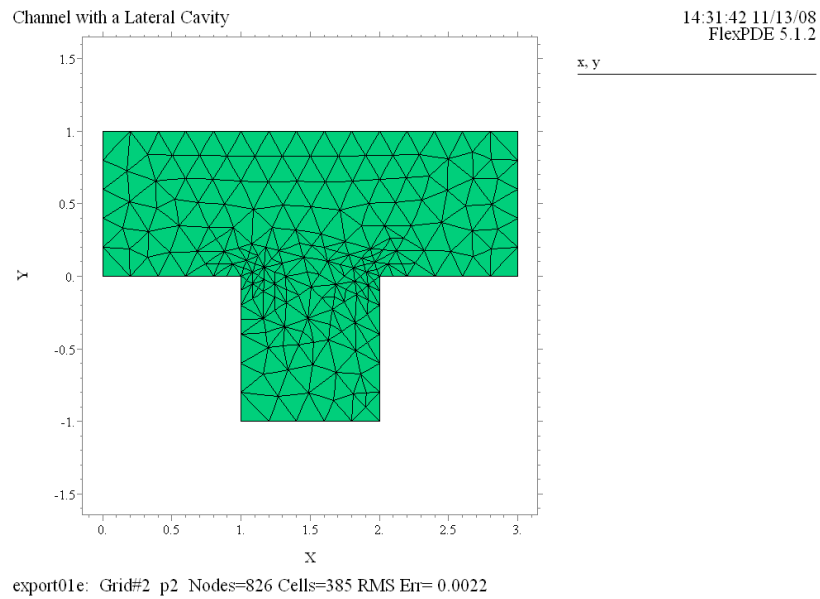
```

END

5.2 実行結果

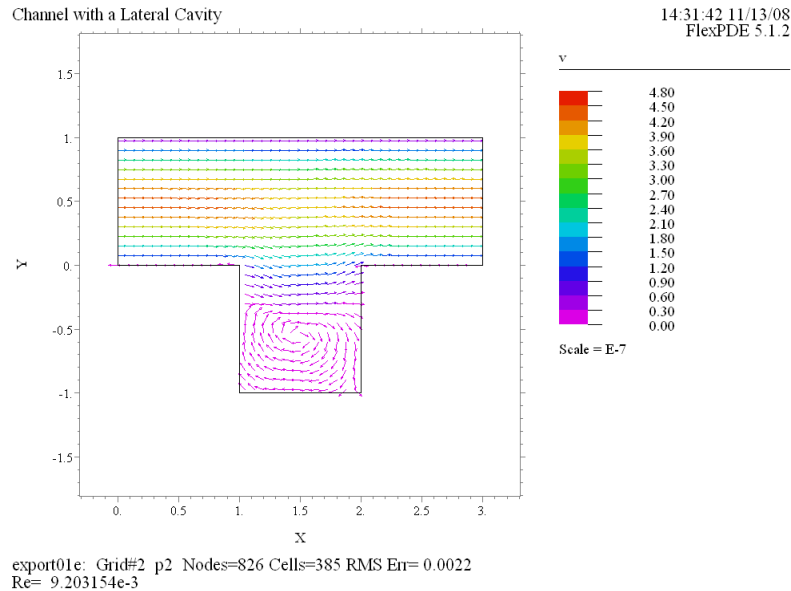
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。メッシュの再構成は 1 回で済んでいます。

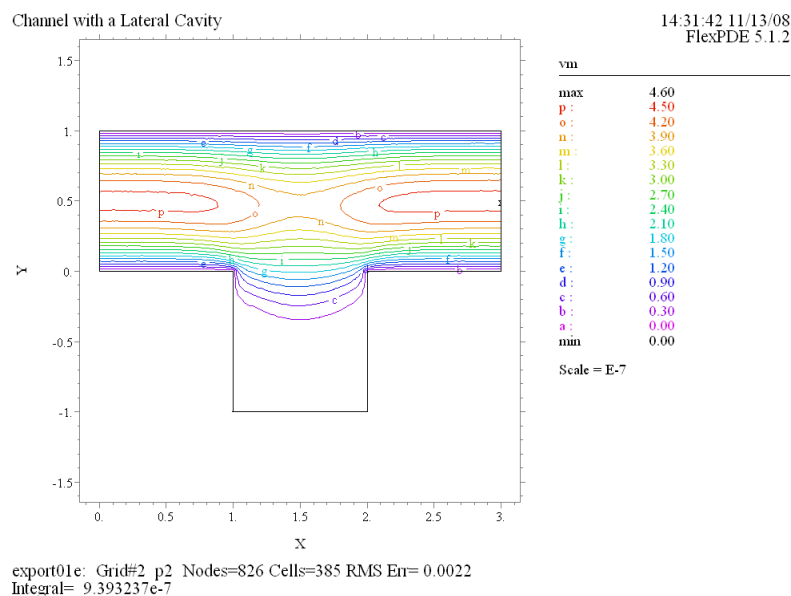


(2) Vector(v) norm Report(Re)

流速 v のベクトルプロットです。流速はカラーでコード化されている点に注意してください。側溝内で速度の遅い渦が発生していることがわかります。Reynolds 数は $9.2e-3$ という小さな値におさまっています。

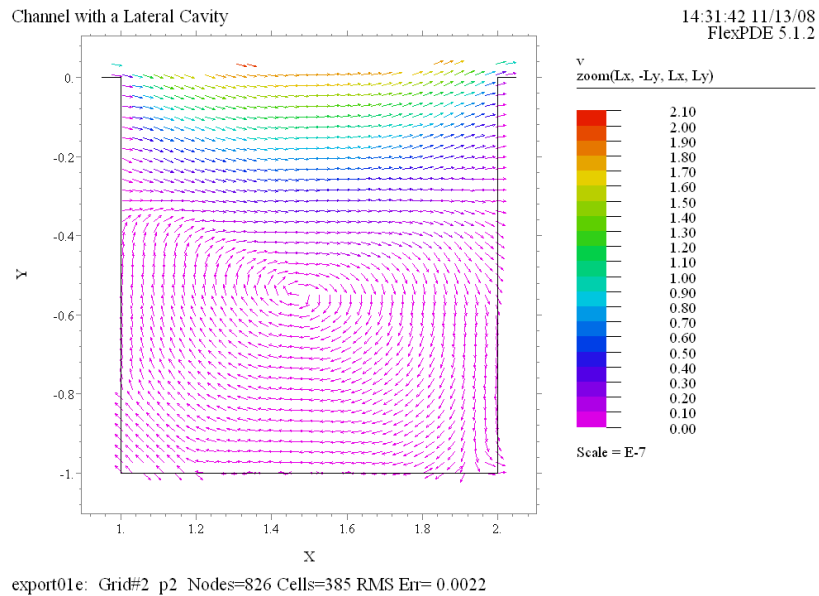
(3) Contour(vm)

流速ベクトル v の絶対値に関する等高線図です。流れはメインのチャンネル部に限られ、側溝内の流速ははるかに小さなものであることがわかります (プロット (2) では $norm$ を指定しているため、渦が目立つ形となっています)。



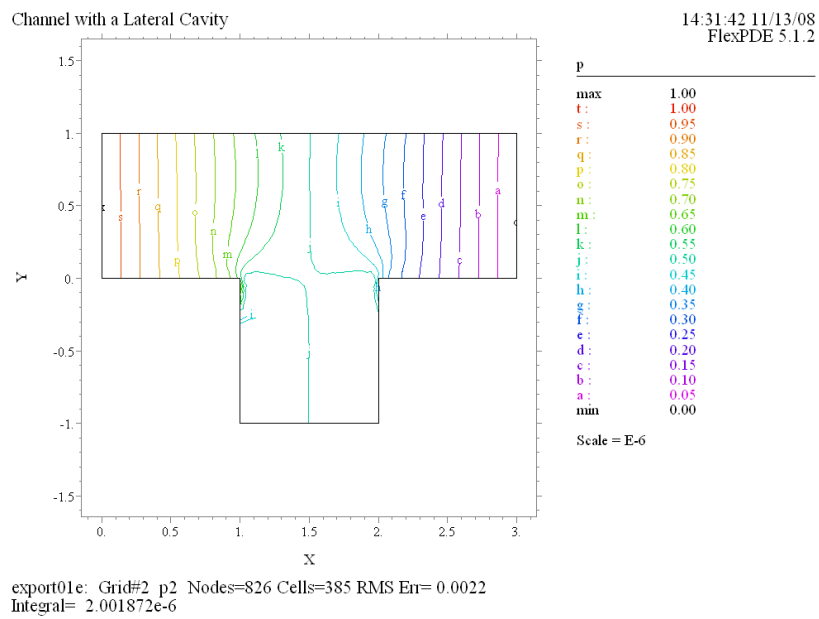
(4) Vector(v) norm zoom(Lx, -Ly, Lx, Ly)

側溝内のベクトルプロットを拡大表示したものです。



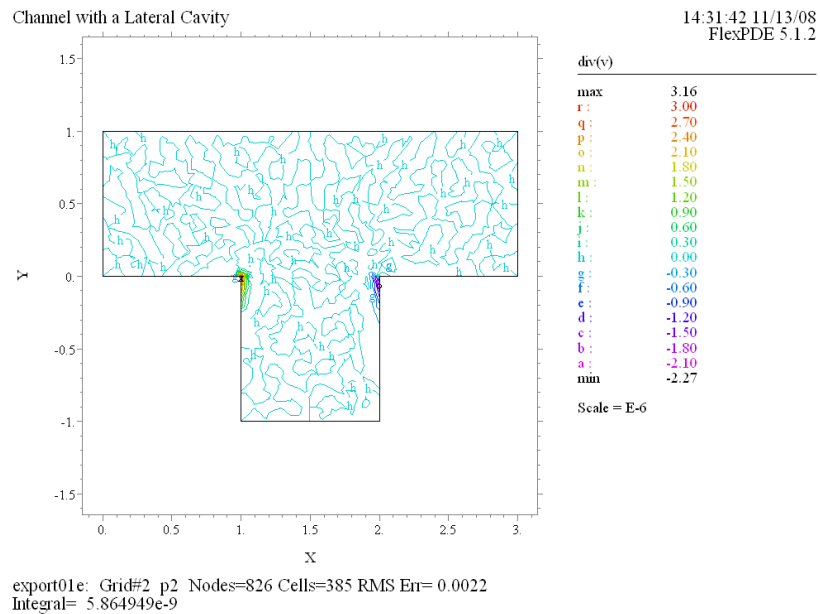
(5) Contour(p)

圧力 p の値をプロットした等高線図です。

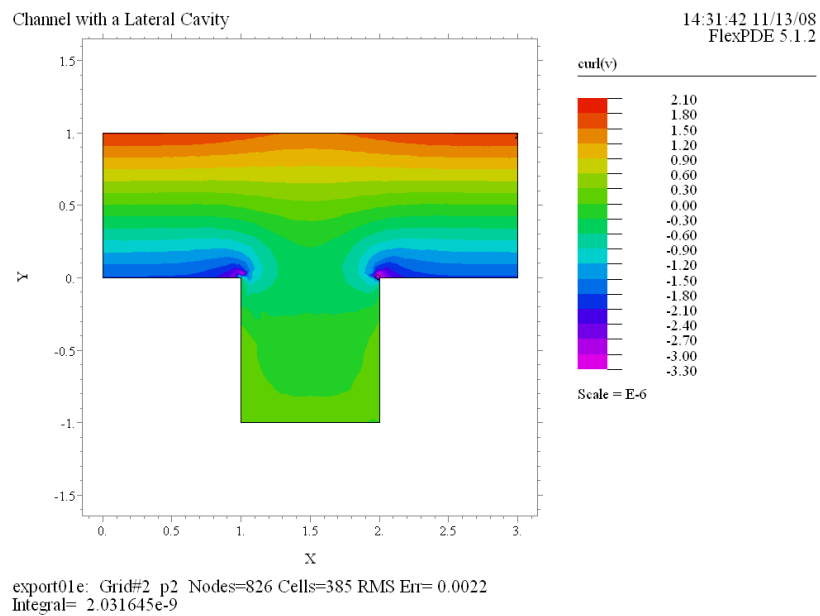


(6) Contour($\text{div}(v)$)

$\text{div}(v)$ の値をプロットしたものです。全域でほぼ 0 となっています。

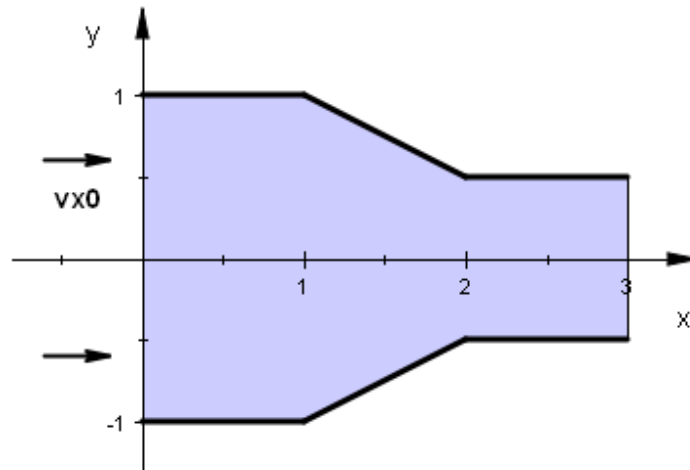
(7) Contour($\text{curl}(v)$) painted

$\text{curl}(v)$ の値に関する等高線図です。



6 Case6 - くびれのあるチャンネルにおける流れ [3]

Case3, 4 ではチャンネル入口部において一定の圧力をかけた場合を想定し解析を行いました。ここでは流速値が一定という条件を課したときの流れについて計算を行ってみます。



6.1 Problem descriptor [vfluid01f.pde]

まずタイトルを設定します。

```
TITLE
'Uniform Velocity of Injection'    { vfluid01f.pde }
```

次に演算精度に関するセレクトをセットします。Case3, 4 に比べて演算精度を落としている点に注意してください。

```
SELECT
  Errlim = 3*1e-3
```

従属変数を規定します。

```
VARIABLES
  vx
  vy
  p          { Pressure minus ambient }
```

関連するパラメータや数式を定義します。Case3, 4 の場合とは全く異なる粘性係数値が使用されている点に注意してください。 v_{x0} の値は Reynolds 数が小さな値を取るように考慮して設定する必要があります。 C の値は条件に合わせて試行錯誤が必要です。

DEFINITIONS

```

Lx = 1.0 Ly = 1.0
coef = 0.5           { Constriction coefficient }
visc = 1.0           { Viscosity }
vx0 = 1e-5           { Input velocity }
dens = 1e3           { Mass density }
Re = dens*vx0*2*Ly/visc { Reynolds number }
v = vector(vx, vy)  vm = magnitude(v) { Speed }
unit_x = vector(1, 0) { Unit vector fields }
unit_y = vector(0, 1)
nx = normal(unit_x) { Direction cosines }
ny = normal(unit_y)
natp = visc*(nx*div(grad(vx)) + ny*div(grad(vy)))
                                     { Natural boundary condition for p }

C = 1e3

```

方程式を定義します。

EQUATIONS

```

vx: dx(p) - visc*div(grad(vx)) = 0
vy: dy(p) - visc*div(grad(vy)) = 0
p:  div(grad(p)) - C*visc/Ly^2*div(v) = 0

```

BOUNDARIES セクションでは境界形状の規定と同時に境界条件を設定します。圧力 p については基本的にその微分値（自然境界条件）で規定しますが、出口部については Dirichlet 型で $p = 0$ という指定を行っています。現実の圧力という意味では得られた p の値に大気圧を加える必要があります。

BOUNDARIES

```

Region 1
Start 'outer' (0, Ly)
Value(vx) = vx0 Natural(vy) = 0 Natural(p) = natp { In }
Line to (0, -Ly)
Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = natp { Wall }
Line to (Lx, -Ly) to (2*Lx, -Ly*coef) to (3*Lx, -Ly*coef)
Natural(vx) = 0 Natural(vy) = 0 Value(p) = 0 { Out }
Line to (3*Lx, Ly*coef)
Value(vx) = 0 Value(vy) = 0 Natural(p) = natp { Wall }
Line to (2*Lx, Ly*coef) to (Lx, Ly) to Close

```

最後に出力すべき情報を規定します。

PLOTS

```

Grid(x, y)
Elevation(vx) from (0, -Ly) to (0, Ly)
Elevation(vx, 0.1*dy(vx)) from (3*Lx, -Ly*coef) to (3*Lx, Ly*coef)
Elevation(p) on 'outer'
Vector(v) norm Report(Re)
Contour(vx)
Contour(vy)
Contour(vm)
Contour(p)
Contour(div(v))
Contour(curl(v)) painted

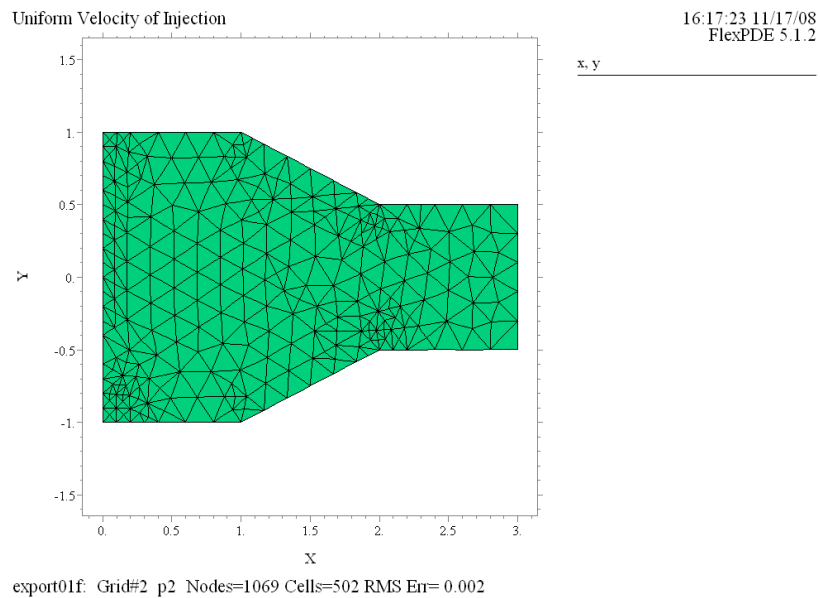
```

END

6.2 実行結果

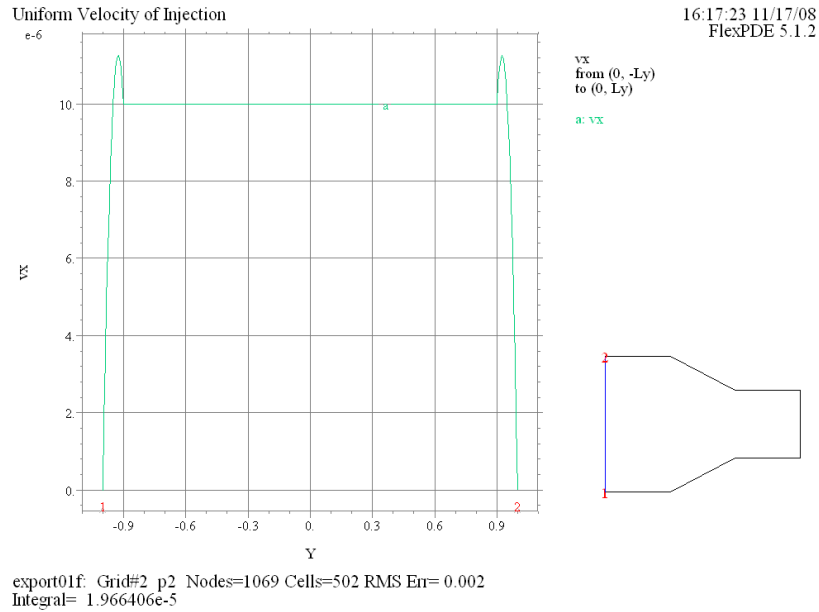
(1) Grid(x, y)

FlexPDE によって生成されたメッシュ構成を示しています。

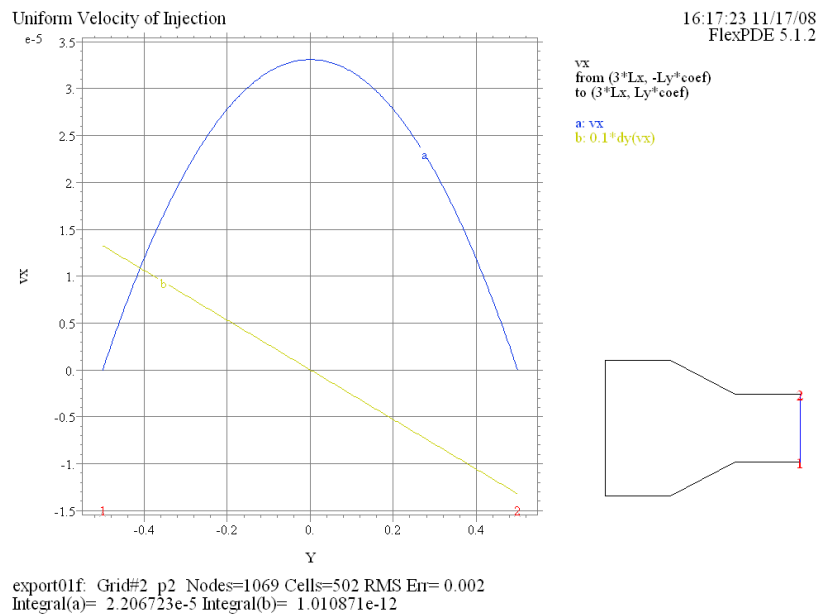


(2) Elevation(v_x) from $(0, -L_y)$ to $(0, L_y)$

チャンネル入口部における流速 v_x の値をプロットしたものです。1e-5 という値がチャンネル壁に接する部分で 0 に変化する形となっている点に注意してください。

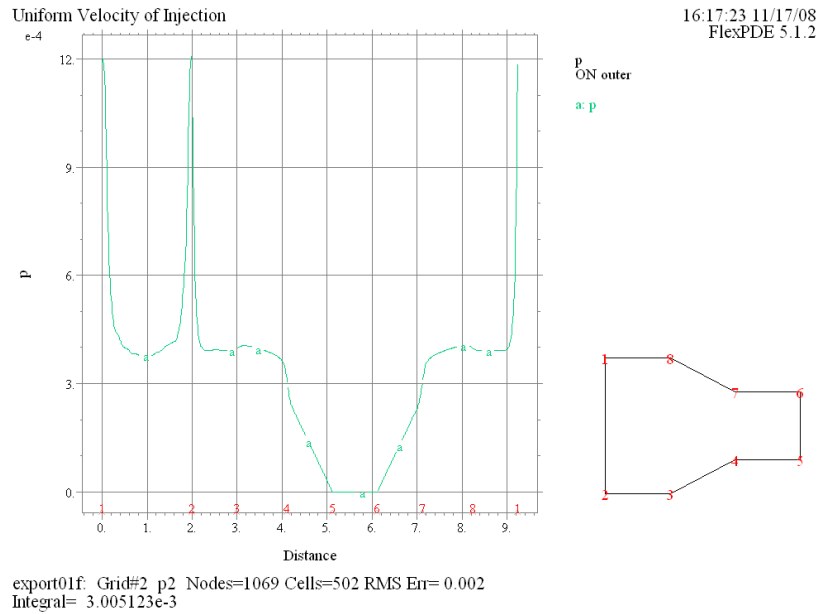
(3) Elevation($v_x, 0.1*dy(v_x)$) from $(3*L_x, -L_y*coef)$ to $(3*L_x, L_y*coef)$

チャンネル出口部分において v_x とその導関数の値をプロットしたものです。導関数のグラフが直線であることから、 v_x の値の変化は 2 次関数に従っていることがわかります。

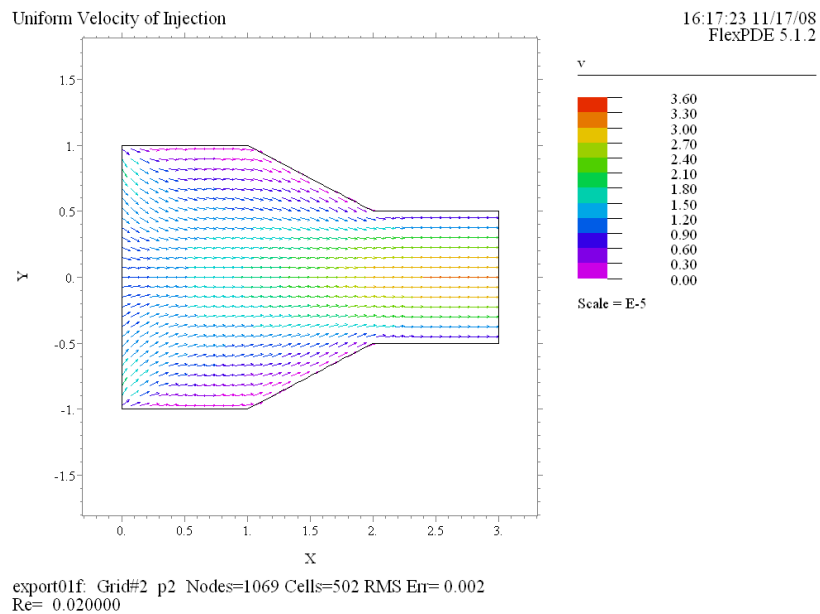


(4) Elevation(p) on 'outer'

圧力 p の値が外部境界上でどう変化しているかをプロットしたものです。チャンネル出口部分では設定通り $p = 0$ となっていることが、一方、入口部分では p の値が大きく変化していることがわかります。

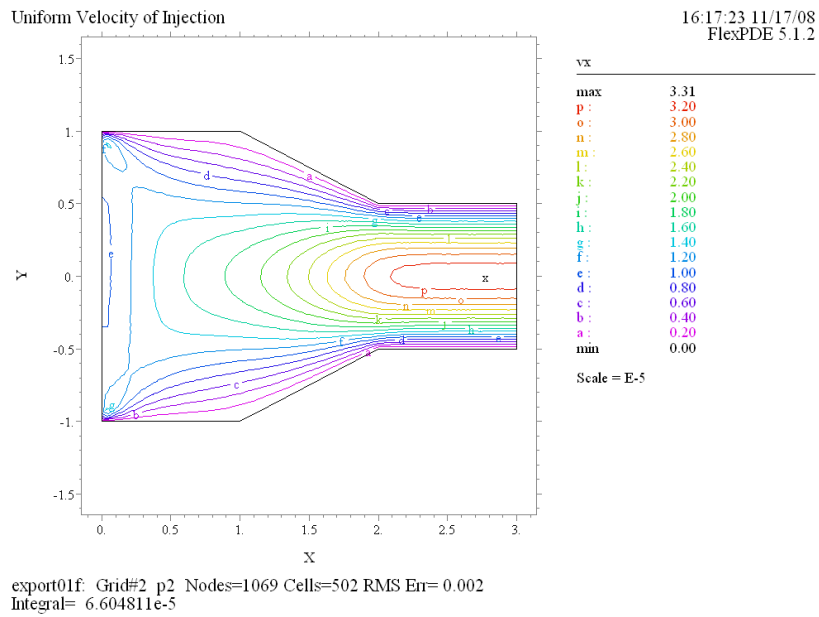
(5) Vector(v) norm Report(Re)

流速 v のベクトルプロットです。Reynolds 数は 0.02 とレポートされています。



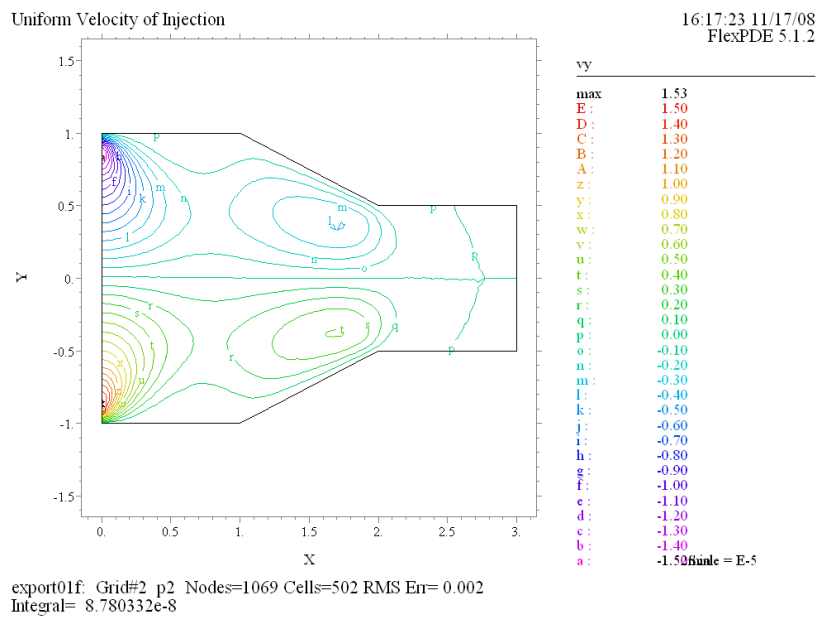
(6) Contour(vx)

流速 v_x の値をプロットした等高線図です。チャンネル幅が細まったところでは流速が v_{x0} の3倍以上になっていることがわかります(チャンネル中央部)



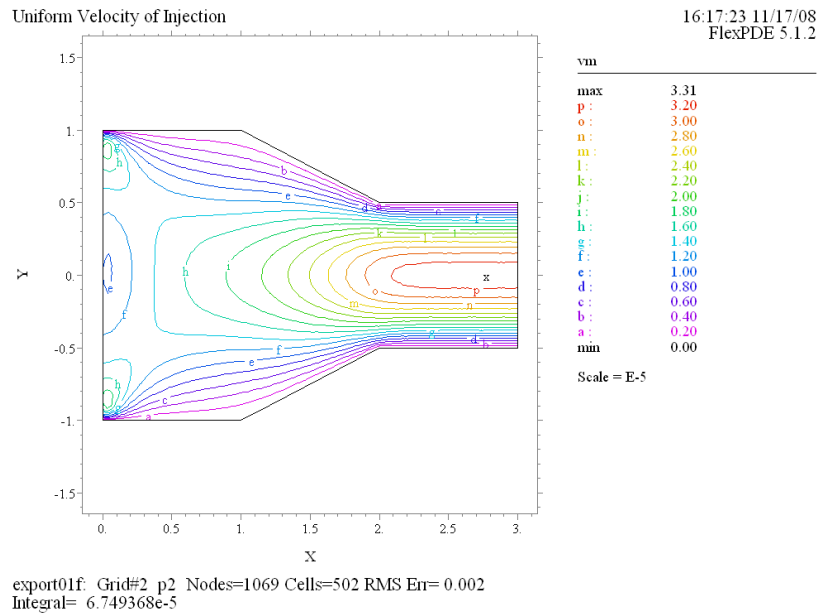
(7) Contour(vy)

流速 v_y の値をプロットした等高線図です。



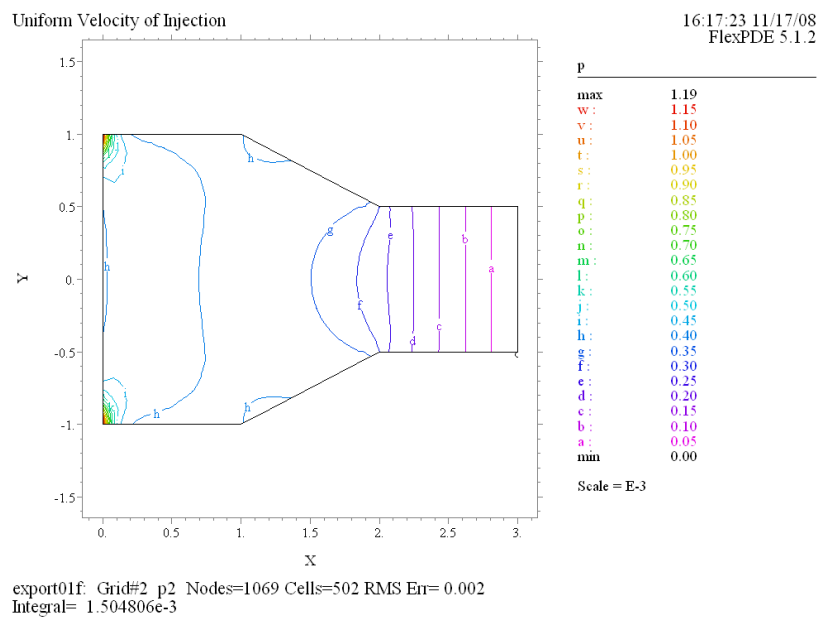
(8) Contour (vm)

流速ベクトル v の絶対値に関する等高線図です。



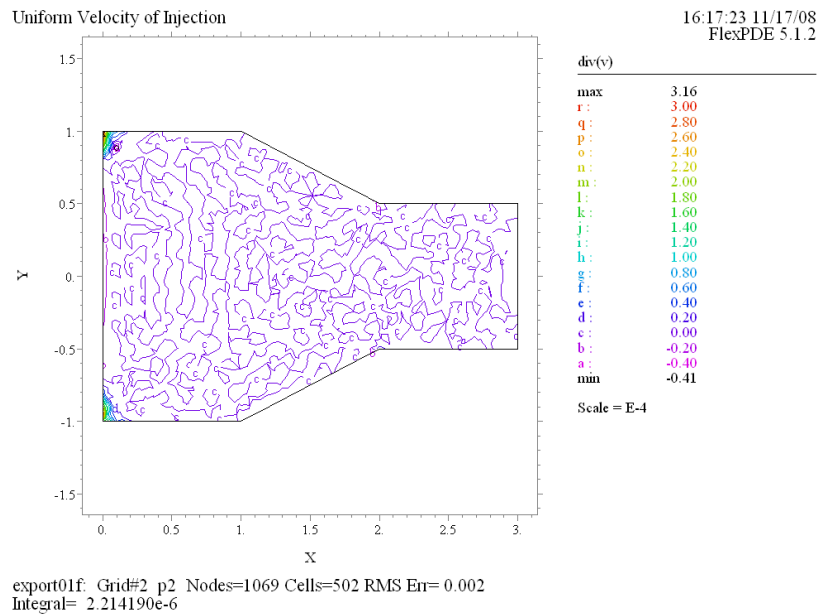
(9) Contour (p)

圧力 p の値についての等高線図です。チャンネル出口部では0であるのに対し、入口部分の壁に接する部分で最大の圧力がかかっています。



(10) Contour($\text{div}(v)$)

チャンネル入口部の上下端では v_x の値が v_{x0} から 0 に不連続に変化するという境界条件のため計算誤差が大きくなっていますが、その部分を除くと $\text{div}(v)$ の値はほぼ 0 となっていることがわかります。

(11) Contour($\text{curl}(v)$) painted

$\text{curl}(v)$ の値の色塗り等高線図です。チャンネル幅が狭まった部分で回転が加わっています。

