非定常時系列データの VAR モデル推定について

明治大学大学院商学研究科　辻　裕行

2010 年 12 月 18 日

【要旨】

単位根を含んだ非定常時系列に対する VAR モデルの推定問題を検証する。伝統的理論では、単位根が存在する時系列を分析する場合、レベルの VAR モデルで推定を行うことは望ましくなく、データの階差を取ったモデルで推定を行わなければならないとされてきた。しかし、Sims,Stock,and Watson(1990)が指摘している様に、データの階差を取ると、元のデータに含まれていた重要な情報が欠落してしまう可能性がある。また、単位根検定・共和分検定といったプレテストそのものの信頼性と、それに伴うモデル特定化の困難さという問題もある。これらのリスクを回避する為、単位根及び共和分関係の有無に関わらず、レベルの VAR で推定を行い、バイアスはいわば甘受してしまうことが、最近の研究の主流となっている。本稿では、モンテ・カルロ・シミュレーションで、有限サンプル下における、VAR モデル、VEC モデル、Sims,Stock,and Watson(1990)の提唱した VAR を変換したモデル（以下「SSW モデル」）の三種のモデルの、非定常時系列に対するパラメータ推定の精度を検証した。また同じく「誤った」推定方法のバイアスを検証するという目線から、時系列データの誤差項同士が相関している場合（モデルの標準的仮定が崩れた場合）の上記 3 モデルにおける OLS 推定と FIML 推定の精度も実験した。その結果、少なくとも今回の実験の範囲においては、こういった「誤った」推定方法を用いることのバイアスは、比較的軽微であるという結論に至った。

1.　序

全く相関関係のないランダム・ウォークに従う I(1)変数同士を回帰した場合、「見せかけの相関」が発生してしまう。その為、伝統的な時系列分析理論においては、データに対して単位根検定及び共和分検定を行い、その結果に応じて適切なモデルを選択する必要があるとされてきた。しかし、Sims,Stock,and Watson(1990)等を根拠として、レベルの VAR で推定を行うことが最近では通常となっている。

あるいはまた、時系列データの誤差項に関する前提（ガウス＝マルコフの定理の前提）が崩れた場合、OLS は BLUE でなくなってしまうが、ここでも漸近理論に頼り、推定量の効率性を軽視するのが最近の風潮である。それ故、標準的仮定を満たす努力自体が過去のものとなりつつもある。

本研究は、こういった伝統的な理論を軽視する流れに対する問題意識から出発し、「誤った」推定方法を用いると、具体的にどの程度の弊害が生じるのかをモンテ・カルロ・シミュレーショ

ンにより検証した。その結果、有限サンプルでは、比較的軽微なバイアスしか生じず、大きな問題ではないという結論を得た。

以降の構成について簡単に記す。2 節で今回検証する時系列データ及び、3 種のモデルについて述べる。3 節ではシミュレーションの内容について詳細を示し、4 節に結果を報告する。5 節にて結論を述べる。

2. モデル

今回シミュレーションで生成する時系列データ及び三種のモデルについて解説する。以下の連立方程式で表わされる時系列を考える。（u_tとv_tは互いに無相関と仮定する。）

$$X_t = -0.4X_{t-1} + 0.7Y_{t-1} + u_t \qquad u_t \sim N(0,1)$$
$$Y_t = 0.2X_{t-1} + 0.9Y_{t-1} + v_t \qquad v_t \sim N(0,1)$$

VAR 形式では以下の様に表わされる。

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

この時系列データが、単位根を持ち、共和分関係にあることを確認する。
係数行列を A と置く。

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} = A$$

A の固有根は固有方程式　$|A - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$　（$\boldsymbol{I}$は単位行列）を成立させるλであるので
$\lambda^2 - 0.5\lambda - 0.5 = 0$　より

$$\lambda = 1, -0.5$$

である。固有根に 1 を含むので、この時系列は単位根を持つ。
また$0 < rank(A - \lambda \boldsymbol{I}) = 1 < N = 2$であることから、共和分関係にあることも確認できる。

次に VEC モデルは、データの 1 階の階差をとり

$$\Delta X_t = -1.4(X_{t-1} - 0.5Y_{t-1}) + u_t$$
$$\Delta Y_t = 0.2(X_{t-1} - 0.5Y_{t-1}) + v_t$$

となる。共和分ベクトルは Johansen の検定により求めることとする。
ここで

$$(X_{t-1} - 0.5Y_{t-1}) = \eta_t$$
$$(\eta_t = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(-0.5)^k \varepsilon_{t-k}\ ,\ \varepsilon_t = u_t - 0.5v_t)$$

と表わせる（変数同士の線形結合が定常となる）ので、X_tとY_tの 2 変数が共和分関係にあることを改めて確認できる。

最後に SSW モデルについて解説する。Sims, Stock, Watson(1990)に基づけば、VAR モデルを Jordan 標準形を用いて変換したモデルを OLS 推定することで、一致推定量を得ることができるとされている。モデルの変換過程を要約すると以下の通りである。
初めに係数行列 A をジョルダン分解する。この時、ジョルダン標準形 J に含まれる固有値に

ついて、1 未満の固有値が上方、1（＝単位根）が下方に来るよう、変形する。

$A = B^{-1}JB$となるような正則行列Bを求める為、A の固有ベクトルを求める。
$\lambda = -0.5$について

$[A - \lambda \boldsymbol{I}]b_1 = 0$　となるベクトルb_1は$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.2 & 1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$　となる$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$であるので

$$b_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$について

$[A - \lambda \boldsymbol{I}]b_2 = 0$　となるベクトルb_2は　$\begin{bmatrix} -1.4 & 0.7 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$　より同様に

$$b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b_1, b_2を合わせて

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる。$BB^{-1} = B^{-1}B = \boldsymbol{I}$より

$$B = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$J = BAB^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。
ここで J を、1 未満の固有根を含むブロックと、固有根 1 のブロックに分割し、それぞれJ_1、J_2とする。即ち

$$J_1 = [-0.5]$$
$$J_2 = [1]$$

である。また、これに基づいて B を分割する。即ち

$$B_1 = \frac{1}{15}[-2 \quad 1]$$

$$B_2 = \frac{1}{15}[1 \quad 7]$$

である。この様にして求めた B を用いて、VAR モデルを変換する。詳細は Sims, Stock, Watson(1990)を参照されたい。ここでは

$$Z_t^1 = B_1\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \frac{-2}{15}(X_t - 0.5Y_t)$$

$$Z_t^2 = B_2\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix}\frac{1}{15}(X_t + 7Y_t)$$

となり、$Z = \begin{bmatrix} Z_t^1 \\ Z_t^2 \end{bmatrix}$が得られる。これを用いて

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t-1}^1 \\ Z_{t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

と置き、これを OLS 回帰させるのが SSW モデルとなる。
ここでは

$$X_t = -0.4X_{t-1} + 0.7Y_{t-1} + u_t$$
$$= \delta_1 \left(\frac{-2}{15} X_{t-1} + \frac{1}{15} Y_{t-1} \right) + \delta_2 \left(\frac{1}{15} X_{t-1} + \frac{7}{15} Y_{t-1} \right) + u_t$$
$$Y_t = 0.2X_{t-1} + 0.9Y_{t-1} + v_t$$
$$= \delta_3 \left(\frac{-2}{15} X_{t-1} + \frac{1}{15} Y_{t-1} \right) + \delta_4 \left(\frac{1}{15} X_{t-1} + \frac{7}{15} Y_{t-1} \right) + v_t$$

より

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

である。

3.モンテカルロ・シミュレーション

以上、VAR モデル、VEC モデル、SSW モデルの 3 モデルについて、上記の時系列生成からパラメータ推定までのモンテカルロ・シミュレーションを行い、パラメータ推定の精度について、比較分析を行う。（Eviews7 を使用。プログラムは添付資料を参照のこと。）2 節にて述べた非定常時系列

$$X_t = -0.4X_{t-1} + 0.7Y_{t-1} + u_t \qquad u_t \sim N(0,1)$$
$$Y_t = 0.2X_{t-1} + 0.9Y_{t-1} + v_t \qquad v_t \sim N(0,1)$$

に対する OLS 推定及び

$$e, f, g \sim N(0,1)$$
$$u_t = \sqrt{2}(0.5e + 0.5f)$$
$$v_t = \sqrt{2}(0.5e + 0.5g)$$

という誤差項の系列相関を加えた時系列に対する OLS・FIML 推定を行う。シミュレーションは
Sample=20,30,50,100,200,300,500,700,1000
Observations=4000
で行うものとする。即ち、時系列の生成と各モデルでの推定をそれぞれ 4000 回繰り返し、各推定値の平均値と、あらかじめ判明している真の値との誤差について、サンプル数の 9 段階の変化に応じた収束のふるまいを観察する。誤差はパーセンテージ（1－推定値/真の値）で測定した。モデル特定化の問題はここでは取り扱わない為、プレテストは行わず、

モデルは特定済みとして推定を行う。
よって、2 節でも述べたが、VEC モデルについては

$$\Delta X_t = a_1(X_{t-1} + bY_{t-1}) + u_t$$
$$\Delta Y_t = a_2(X_{t-1} + bY_{t-1}) + v_t$$

という表現で係数の推定を行う。従って、まず共和分ベクトル b を Johansen の共和分検定により推定し、その後a_1及びa_2を推定するという二段階のプロセスになる。
以下に結果を示す。

4. シミュレーション結果

（1）標準的仮定を満たしたデータに対する OLS 推定

表(1)-1 VAR モデル推定結果

VAR	A1	真の値	A2	真の値	B1	真の値	B2	真の値
		-0.4		0.7		0.2		0.9
Sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	-0.38819	2.9528%	0.68790	1.7284%	0.16756	16.2190%	0.83793	6.8972%
30	-0.38921	2.6985%	0.68626	1.9633%	0.17718	11.4080%	0.85230	5.2997%
50	-0.39355	1.6133%	0.69189	1.1583%	0.18464	7.6805%	0.87217	3.0924%
100	-0.39795	0.5128%	0.69642	0.5120%	0.19298	3.5105%	0.88541	1.6211%
200	-0.39947	0.1332%	0.69842	0.2251%	0.19640	1.7980%	0.89247	0.8368%
300	-0.39873	0.3175%	0.69855	0.2069%	0.19691	1.5470%	0.89543	0.5080%
500	-0.39923	0.1920%	0.69900	0.1434%	0.19864	0.6820%	0.89687	0.3479%
700	-0.39948	0.1293%	0.69939	0.0877%	0.19932	0.3420%	0.89781	0.2430%
1000	-0.40030	-0.0752%	0.69988	0.0171%	0.19984	0.0815%	0.89818	0.2028%

表(1)-2 VEC モデル推定結果

VEC	A1	真の値	A2	真の値	B	真の値
		-1.4		0.2		-0.5
Sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	-1.38127	1.3376%	0.1911	4.4500%	-0.50169	-0.3372%
30	-1.39153	0.6054%	0.186746	6.6270%	-0.5038	-0.7596%
50	-1.3917	0.5932%	0.192663	3.6685%	-0.5007	-0.1400%
100	-1.39629	0.2651%	0.197834	1.0830%	-0.50068	-0.1356%
200	-1.39659	0.2433%	0.197836	1.0820%	-0.50015	-0.0300%
300	-1.39893	0.0766%	0.198518	0.7410%	-0.5001	-0.0200%
500	-1.3993	0.0498%	0.199629	0.1855%	-0.49999	0.0018%
700	-1.39979	0.0150%	0.199363	0.3185%	-0.49993	0.0148%
1000	-1.39953	0.0339%	0.199935	0.0325%	-0.49999	0.0018%

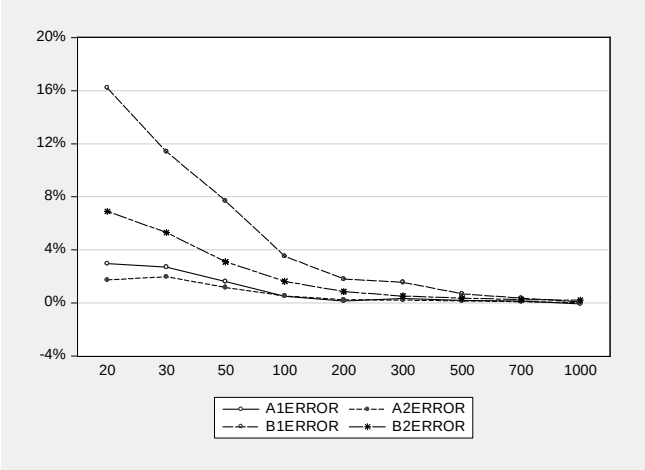
表(1)-3 SSW モデル推定結果

SSW	D1	真の値	D2	真の値	D3	真の値	D4	真の値
		3.5		1		-0.5		2
sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	3.43562	1.8396%	0.97768	2.2319%	-0.32017	35.9654%	1.83457	8.2716%
30	3.42792	2.0595%	0.98096	1.9039%	-0.39168	21.6634%	1.88598	5.7010%
50	3.44746	1.5013%	0.98981	1.0192%	-0.43884	12.2326%	1.92883	3.5585%
100	3.45728	1.2207%	0.99526	0.4736%	-0.46934	6.1328%	1.96321	1.8394%
200	3.47954	0.5845%	0.99689	0.3112%	-0.48027	3.9462%	1.98141	0.9296%
300	3.48134	0.5331%	0.99794	0.2058%	-0.48991	2.0188%	1.98765	0.6177%
500	3.49154	0.2419%	0.99882	0.1182%	-0.49666	0.6672%	1.99233	0.3838%
700	3.49341	0.1883%	0.99918	0.0825%	-0.49492	1.0164%	1.99473	0.2637%
1000	3.49907	0.0266%	0.99929	0.0713%	-0.49650	0.7000%	1.99626	0.1869%

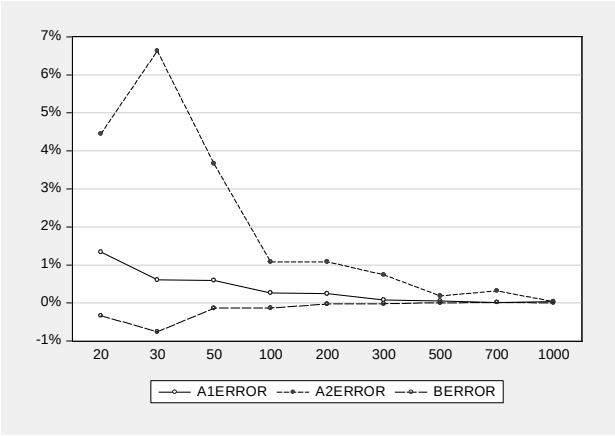
表(1)-4 各モデル内最大誤差（絶対値）比較

sample	VAR	VEC	SSW
20	16.2190%	4.4500%	35.9654%
30	11.4080%	6.6270%	21.6634%
50	7.6805%	3.6685%	12.2326%
100	3.5105%	1.0830%	6.1328%
200	1.7980%	1.0820%	3.9462%
300	1.5470%	0.7410%	2.0188%
500	0.6820%	0.1855%	0.6672%
700	0.3420%	0.3185%	1.0164%
1000	0.2028%	0.0339%	0.7000%

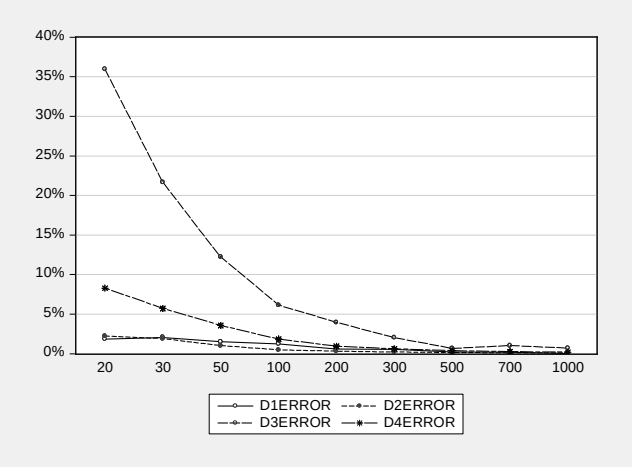
図(1)-1 VAR モデル誤差グラフ



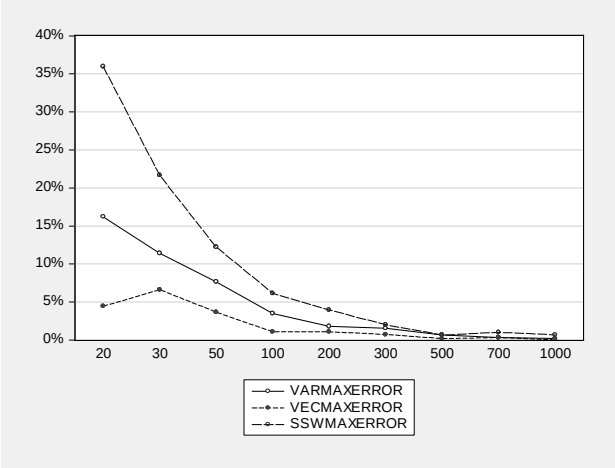
図(1)-2 VEC モデル誤差グラフ



図(1)-3 SSW モデル誤差グラフ



図(1)-4 各モデル内最大誤差（絶対値）比較グラフ



まずは時系列について誤差項の標準的仮定が満たされている場合のシミュレーション結果から見て行く。表(1)-4 より、三モデルを相対比較すると、VEC モデルが最も良い推定結果を示しており、次いで VAR、最も信頼性に掛けるのは SSW モデルであると言える。SSW モデルは理論的に無限サンプルでは一致推定量となるが、今回の実験範囲では、ほぼ VAR モデルに劣ると言わざるを得ない。漸近収束の速度が遅い為、良い推定結果が残せなかったものと考えられる。

また、絶対値を見ると、安定した結果を得る為には最低でも、VEC モデルでサンプル数 50 以上、VAR モデルではサンプル数 100 以上、SSW モデルを運用するのであればサンプル数 200 以上程度が、概ね必要であると考える。サンプル数 500 程度以上の大標本が用意できれば、レベルの VAR モデルでもそれ程悪くない推定値を得られると言えるだろう。勿論、VEC モデルが最良の結果を出している事には変わりない。しかし実際に研究を行うに当たって、ケースバイケースであるにせよ、モデル特定化に失敗するリスクが、1%未満程度の平均誤差の減少と釣り合うかどうかは、一考の余地があるのではないだろうか。

（２）誤差項同士相関のあるデータに対する OLS 推定

表(2)-1 VAR モデル推定結果

VAR	A1	真の値	A2	真の値	B1	真の値	B2	真の値
		-0.4		0.7		0.2		0.9
sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	-0.37782	5.5445%	0.64011	8.5556%	0.20008	-0.0395%	0.81883	9.0186%
30	-0.38731	3.1738%	0.66226	5.3917%	0.19674	1.6285%	0.84779	5.8017%
50	-0.39744	0.6410%	0.67670	3.3283%	0.19624	1.8805%	0.86756	3.6044%
100	-0.39947	0.1332%	0.69842	0.2251%	0.19640	1.7980%	0.89247	0.8368%
200	-0.39781	0.5482%	0.69364	0.9090%	0.19971	0.1470%	0.89166	0.9268%
300	-0.39727	0.6830%	0.69530	0.6710%	0.19940	0.3000%	0.89460	0.5998%
500	-0.39929	0.1783%	0.69739	0.3726%	0.19967	0.1635%	0.89669	0.3677%
700	-0.39976	0.0613%	0.69842	0.2257%	0.19985	0.0750%	0.89766	0.2600%
1000	-0.39923	0.1928%	0.69855	0.2074%	0.20018	-0.0890%	0.89816	0.2042%

表(2)-2 VEC モデル推定結果

VEC	A1	真の値	A2	真の値	B	真の値
		-1.4		0.2		-0.5
Sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	-1.38487	1.0808%	0.195266	2.3670%	-0.50054	-0.1072%
30	-1.38264	1.2401%	0.202355	-1.1775%	-0.50115	-0.2306%
50	-1.39173	0.5910%	0.205136	-2.5680%	-0.50041	-0.0824%
100	-1.39615	0.2752%	0.203159	-1.5795%	-0.50002	-0.0036%
200	-1.39573	0.3050%	0.202017	-1.0085%	-0.50003	-0.0064%
300	-1.39771	0.1638%	0.200455	-0.2275%	-0.49979	0.0420%
500	-1.39893	0.0764%	0.200887	-0.4435%	-0.49996	0.0074%
700	-1.39882	0.0843%	0.199605	0.1975%	-0.49998	0.0040%
1000	-1.39988	0.0084%	0.200541	-0.2705%	-0.50006	-0.0114%

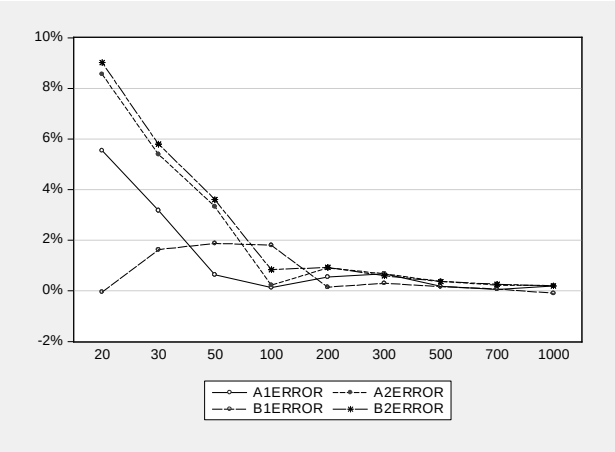
表(2)-3 SSW モデル推定結果

SSW	A1	真の値	A2	真の値	B1	真の値	B2	真の値
		3.5		1		-0.5		2
sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	3.29222	5.9365%	0.90276	9.7237%	-0.57003	-14.0064%	1.84047	7.9765%
30	3.35290	4.2028%	0.93421	6.5795%	-0.54128	-8.2556%	1.89684	5.1583%
50	3.41779	2.3489%	0.96071	3.9289%	-0.51108	-2.2154%	1.93303	3.3485%
100	3.45753	1.2133%	0.97895	2.1054%	-0.50837	-1.6748%	1.96557	1.7216%
200	3.47713	0.6534%	0.98925	1.0752%	-0.51937	-3.8748%	1.98215	0.8927%
300	3.48680	0.3773%	0.99333	0.6666%	-0.50020	-0.0390%	1.98843	0.5787%
500	3.48643	0.3876%	0.99571	0.4294%	-0.50838	-1.6764%	1.99314	0.3429%
700	3.49451	0.1568%	0.99705	0.2947%	-0.50730	-1.4606%	1.99498	0.2512%
1000	3.50136	-0.0389%	0.99783	0.2169%	-0.49513	0.9744%	1.99636	0.1819%

(2)-4 各モデル内最大誤差（絶対値）比較

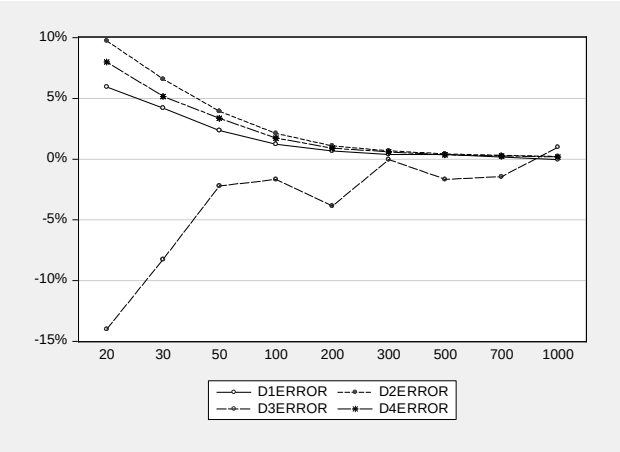
sample	VAR	VEC	SSW
20	9.0186%	2.3670%	14.0064%
30	5.8017%	1.2401%	8.2556%
50	3.6044%	2.5680%	3.9289%
100	1.7980%	1.5795%	2.1054%
200	0.9268%	1.0085%	3.8748%
300	0.6830%	0.2275%	0.6666%
500	0.3726%	0.4435%	1.6764%
700	0.2600%	0.1975%	1.4606%
1000	0.2074%	0.2705%	0.9744%

図(2)-1 VAR モデル誤差グラフ

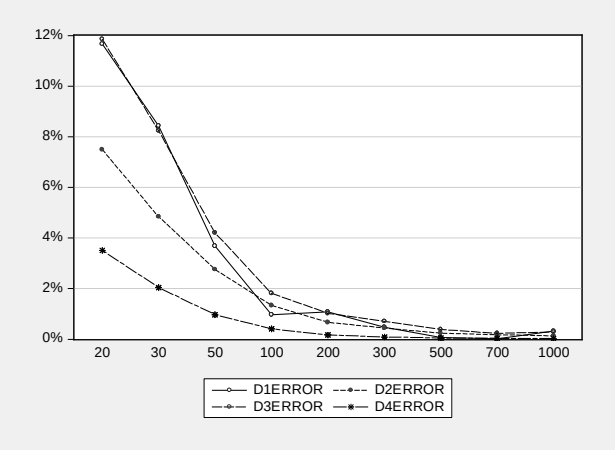


図(2)-2 VEC モデル誤差グラフ

図(2)-3 SSW モデル誤差グラフ



図(2)-4 各モデル内最大誤差（絶対値



次に、誤差項同士に相関がある場合の OLS 推定である。先のシミュレーション（1）と比べて、ある程度のサンプル数―VAR では 700 程度、VEC 及び SSW では 300 から 500 程度―までは、相関が無いケースよりもむしろ収束が早く、良い結果を出しているように見受けられる。しかし、一致推定量を得られる推定ではない為、当然ながら一定のサンプル数を超えた段階で収束は止まり、バイアスが残り続けるという傾向が見て取れる。これは興味深い結果である。

また、2~300 のサンプル数さえ確保されていれば、絶対値では平均誤差 1%以下程度のバイアスである。比較的小さなバイアスとして無視できる研究もあるだろう。

（3）誤差項同士相関のあるデータに対する FIML 推定

表(3)-1 VAR モデル推定結果

VAR	A1	真の値	A2	真の値	B1	真の値	B2	真の値
		-0.4		0.7		0.2		0.9
sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	-0.37818	5.4540%	0.63646	9.0771%	0.19935	0.3230%	0.82095	8.7838%
30	-0.38532	3.6700%	0.66053	5.6390%	0.20116	-0.5820%	0.84537	6.0696%
50	-0.39002	2.4940%	0.67412	3.6967%	0.19945	0.2730%	0.86711	3.6548%
100	-0.39479	1.3023%	0.68706	1.8484%	0.19952	0.2425%	0.88388	1.7912%
200	-0.39629	0.9275%	0.69275	1.0359%	0.20062	-0.3100%	0.89077	1.0253%
300	-0.39935	0.1620%	0.69603	0.5677%	0.19926	0.3690%	0.89458	0.6018%
500	-0.39934	0.1653%	0.69771	0.3273%	0.19935	0.3235%	0.89696	0.3373%
700	-0.40013	-0.0323%	0.69858	0.2024%	0.20013	-0.0645%	0.89746	0.2826%
1000	-0.39934	0.1663%	0.69858	0.2026%	0.19982	0.0925%	0.89835	0.1838%

表(3)-2 VEC モデル推定結果

VEC	A1	真の値	A2	真の値	B	真の値
		-1.4		0.2		-0.5
Sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	-1.37752	1.6056%	0.19968	0.1600%	-0.50053	-0.1060%
30	-1.38688	0.9374%	0.196976	1.5120%	-0.49969	0.0624%
50	-1.38925	0.7681%	0.201427	-0.7135%	-0.50028	-0.0568%
100	-1.39395	0.4323%	0.199953	0.0235%	-0.50001	-0.0010%
200	-1.3989	0.0786%	0.201408	-0.7040%	-0.50007	-0.0140%
300	-1.39868	0.0944%	0.200702	-0.3510%	-0.50007	-0.0148%
500	-1.40041	-0.0294%	0.1994	0.3000%	-0.49998	0.0038%
700	-1.39922	0.0554%	0.199448	0.2760%	-0.50003	-0.0062%
1000	-1.39901	0.0711%	0.19966	0.1700%	-0.49995	0.0096%

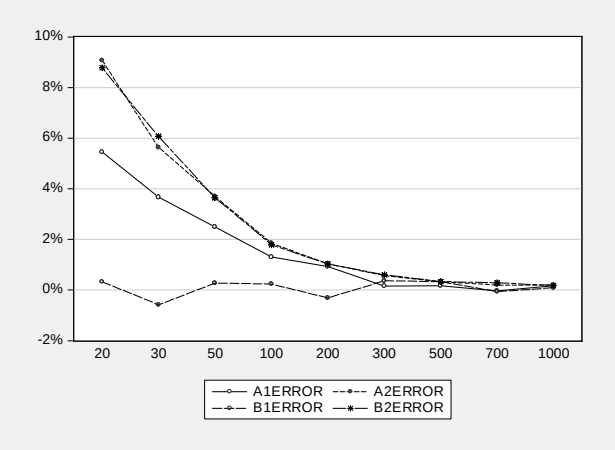
表(3)-3 SSW モデル推定結果

SSW	A1	真の値	A2	真の値	B1	真の値	B2	真の値
		3.5		1		-0.5		2
sample	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差	推定値	誤差
20	3.33342	4.7594%	0.90700	9.3004%	-0.51490	-2.9802%	1.84728	7.6359%
30	3.38635	3.2471%	0.93468	6.5321%	-0.48893	2.2146%	1.89664	5.1680%
50	3.42095	2.2587%	0.95930	4.0698%	-0.52571	-5.1428%	1.93114	3.4428%
100	3.45755	1.2129%	0.97873	2.1269%	-0.50733	-1.4664%	1.96402	1.7988%
200	3.48693	0.3736%	0.99016	0.9836%	-0.48800	2.3992%	1.98293	0.8536%
300	3.48772	0.3509%	0.99287	0.7133%	-0.50734	-1.4678%	1.98833	0.5836%
500	3.48980	0.2916%	0.99600	0.4005%	-0.49309	1.3822%	1.99339	0.3308%
700	3.49290	0.2029%	0.99688	0.3118%	-0.50135	-0.2696%	1.99517	0.2417%
1000	3.49410	0.1685%	0.99787	0.2135%	-0.50637	-1.2736%	1.99661	0.1695%

表(3)-4 各モデル内最大誤差（絶対値）比較

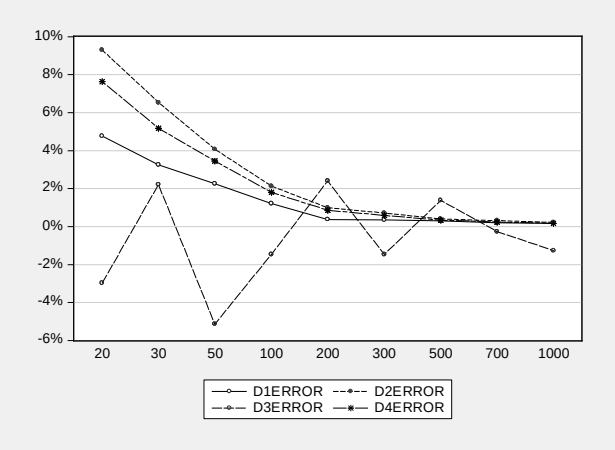
sample	VAR	VEC	SSW
20	9.0771%	1.6056%	9.3004%
30	6.0696%	1.5120%	6.5321%
50	3.6967%	0.7681%	5.1428%
100	1.8484%	0.4323%	2.1269%
200	1.0359%	0.7040%	2.3992%
300	0.6018%	0.3510%	1.4678%
500	0.3373%	0.3000%	1.3822%
700	0.2826%	0.2760%	0.3118%
1000	0.2026%	0.1700%	1.2736%

図(3)-1 VAR モデル誤差グラフ

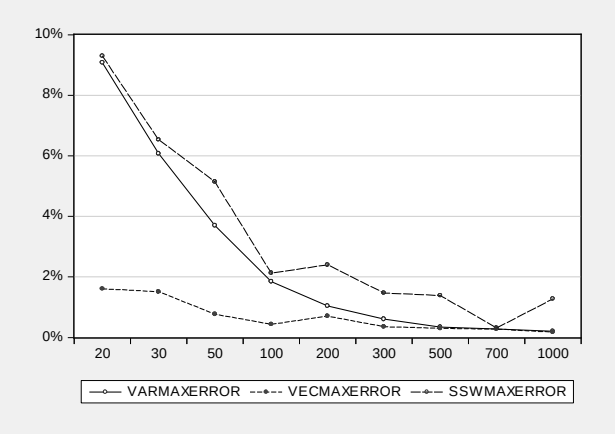


図(3)-2 VEC モデル誤差グラフ

図(3)-3 SSW モデル誤差グラフ



図(3)-4 各モデル内最大誤差（絶対値）比較グラフ



最後に、誤差項同士相関があるデータに対して FIML 検定を行ったシミュレーション結果についてまとめる。VAR・SSW モデルは OLS 推定を行ったシミュレーション（２）の結果と比べ、それほど差は無いように見られる。対して VEC モデルに関しては、概ね二倍程度の収束の良さが見られる。三つのシミュレーション全体を通して言えることでもあるが、サンプル数が 30 や 50 など小標本の場合には、VEC モデルが信頼できるモデルであり、逆に VAR や SSW モデルでは使い物にならないという可能性も大きくなってくるだろう。とりわけ FIML で推定を行う場合は、三種のモデルの中で唯一恩恵を受けられるようでもある。VAR や SSW モデルに比して、誤差をかなり大きくカット出来る。メリットが十分に大きいと感じられる場合は、モデルを特定化し、階差を取るリスクに見合うと考えることもできるだろう。また、大標本を利用できる場合は、やはりレベルの VAR モデルで推定を行ってもそれほど差し支えないと考えられる。

5. おわりに

本稿では、伝統的理論によれば「誤った」推定方法とされる最近の分析手法のバイアスを検証する為、一つの具体例として、モンテカルロ・シミュレーションを行った。その結果、今回のシミュレーションの範囲では、誤差項同士に相関が無い場合は 500 以上、相関がある場合は 200～300 程度以上のサンプル数があれば、レベルの VAR で推定を行うことにより生じるバイアスは、ほとんどのケースで差し支えないであろうと感じられた。その上で、求める推定精度、プレテストの信頼性、時系列（誤差項）の特性に対する研究者の確信、等を加味して、必要に応じて VAR 以外のモデルを選択・利用すれば良いだろう。具体的には、例えば、小標本の場合や FIML 推定を行う場合に VAR モデルと VEC モデルを併用する、あるいは、巨大標本で誤差項同士に相関が無く、階差を取らずに OLS 一致推定量を得たい場合は SSW モデルを利用する…等の選択が考えられる。いずれにせよ、時系列データを推定する際のモデル選択に関しては、サンプル数が最も大きなファクターである。小標本を利用せざるを得ない場合、あるいは 10000、20000 といった巨大なサンプル数のデータを利用出来る場合には、VAR 以外のモデルを利用するという選択を考慮する余地があるだろう。

また、今回のシミュレーションは、検証する時系列に関して、係数、サンプル数等、バリエーションに乏しく、限定された範囲での結論であるということは強調しておかなければならない。どの様な時系列データを扱うケースにおいても、今回の様な結果が得られるとは限らない。

他の様々なケースを扱い更なる検証を行うことは、今後の課題である。

参考文献

Dickey, D. A. and Fuller, W. A.(1979),"Distribution of the Estimators for Autoregressive time Series with a Unit Root",*Journal of the American Statistical Association,* Vol.74, pp.427-431.

Engle,R.F. and Granger,C.W.J.(1987),"Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing",*Econometrica*, Vol.55, pp.251-277.

Phillips,P.C.B.(1987),"Time Series Regression with a Unit Root",*Econometrica*, Vol.55, pp.277-.301.

Sims, C. A., Stock, J. H. and M. W. Watson(1990),"Inference in linear time series models with some unit roots",*Econometrica*,Vol.58,No.1, pp.113-144.

Brooks,C.(2008),"*Introductory Econometrics for Finance*", Cambridge University Press,2008.

北岡孝義、高橋青天、矢野順治『EViews で学ぶ実証分析入門　応用編』、日本評論社、２００８年